



---

**UNIVERSITATEA TEHNICĂ**  
DIN CLUJ-NAPOCA  
FACULTATEA DE CONSTRUCȚII

Ing. Ioana Vasilica MARCHIȘ

# **TEZĂ DE DOCTORAT**

**Analiza Neliniară Avansată a Structurilor în Cadre  
Alcătuite din Bare cu Secțiune Variabilă și  
Conexiuni Semirigide**

**CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC:  
Prof.dr.ing. Cosmin Gruia CHIOREAN**

---

**2016**

*Pagină albă*

## COPYRIGHT

*Conținutul acestei lucrări poate fi vizualizat, transmis și imprimat numai în scopuri personale, didactice, de cercetare și noncomerciale. Dreptul de autor pentru informațiile existente în această lucrare este deținut de autorul lucrării și/sau de coordonatorul științific. Niciun material din această lucrare nu poate fi reprodus parțial, integral sau modificat fără permisiunea anterioară explicită, prin acord scris a autorului lucrării și a coordonatorului științific.*

*Conținutul acestei lucrări, textele, relațiile matematice, ilustrațiile, fotografiile, și orice alte materiale prezente în lucrare sunt protejate de legea dreptului de autor.*

*Următoarele pagini au fost eliminate din conținutul electronic al acestei lucrări: Paginile 44; 59; 78; 98; 136*

*Citarea lucrării se va face în acest format:*

**Marchiș, I.V., *Analiza Neliniară Avansată a Structurilor în Cadre Alcătuite din Bare cu Secțiune Variabilă și Conexiuni Semirigide*, Teză de doctorat, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca, 2016.**

## Cuprins

Lista figurilor .....	viii
Lista tabelelor .....	xiii
Abrevieri și notații principale .....	xiv
Cap. 1 Introducere .....	1
1.1 Necesitatea temei de cercetare și încadrarea ei în domeniul științific .....	1
1.2 Obiectivele propuse .....	4
1.3 Metodologia cercetării științifice .....	5
1.4 Structura tezei de doctorat .....	6
Cap. 2 Metode de analiză elasto-plastică de ordinul al II-lea a structurilor în cadre – stadiu actual	9
2.1 Conceptul de analiză avansată .....	9
2.2 Metode de analiză bazate pe conceptul de articulație plastică .....	9
2.2.1 Modelul articulațiilor plastice cu formare instantanee .....	10
2.2.2 Modelul articulațiilor plastice cu formare graduală .....	12
2.2.3 Modelul articulațiilor plastice bazat pe încărcări laterale fictive .....	13
2.3 Metode bazate pe conceptul de zone plastice .....	13
2.3.1 Metoda elementelor finite .....	14
2.3.2 Modelul articulațiilor plastice rafinate .....	15
2.4 Surse de neliniaritate .....	15
2.4.1 Neliniaritatea de material .....	16
2.4.2 Neliniaritatea geometrică .....	20
2.4.3 Efectul imperfecțiunilor geometrice inițiale .....	23
2.4.4 Efectul încovoierii barei asupra rigidității axiale (scurtarea barei) .....	29
2.4.5 Efectul imperfecțiunilor mecanice (tensiuni reziduale) .....	30
2.5 Integrarea efectelor neliniare ale conexiunilor semi-rigide .....	32
2.5.1 Metode analitice pentru modelarea conexiunilor flexibile .....	33
2.5.2 Modelarea conexiunilor flexibile utilizând MEF .....	37
2.6 Metode de determinare a soluției în calculul neliniar al structurilor .....	37
2.6.1 Metode incrementale .....	38
2.6.2 Metode incremental – iterative .....	39
Cap. 3 Calculul geometric neliniar al barelor cu secțiune variabilă .....	41
3.1 Introducere .....	41
3.2 Modele numerice pentru analiza elementelor cu secțiune variabilă – stadiu actual	41
3.2.1 Rezolvarea ecuației diferențiale de echilibru cu coeficienți variabili - prin dezvoltare în serii de puteri având ca necunoscută deplasarea .....	43

3.2.2	Modelarea elementelor cu secțiune variabilă utilizând MEF .....	49
3.3	Analiza barelor cu secțiune variabilă: modelul simplificat .....	50
3.4	Analiza barelor cu secțiune variabilă: modelul exact.....	53
3.4.1	Includerea efectelor din imperfecțiunile geometrice inițiale .....	55
3.4.2	Determinarea matricei de rigiditate și a vectorului forțelor nodale echivalente .....	55
3.5	Integrarea funcțiilor neliniare.....	60
3.6	Studii numerice pentru calibrarea modelului numeric propus .....	60
3.6.1	Element cu secțiune circulară și înălțime variabilă. Determinarea funcțiilor de stabilitate.....	61
3.6.2	Element cu secțiune dreptunghiulară și înălțime variabilă. Determinarea funcțiilor de stabilitate .....	66
3.6.3	Bară cu secțiune I și înălțime variabilă. Deplasarea maximă ținând cont de efectul defomațiilor de lunecare .....	69
3.6.4	Bară cu secțiune I și înălțime variabilă. Determinarea forței axiale critice de compresiune pentru cele două direcții principale de inerție .....	70
3.6.5	Bară cu secțiune I și înălțime variabilă. Determinarea forței axiale critice de compresiune pentru diferite lungimi ale elementului, respectiv diferite rapoarte între secțiunile transversale de capăt .....	72
3.6.6	Bară cu dublă variație având secțiunea transversală I. Determinarea forței axiale critice de compresiune considerând diferite rapoarte între secțiunile transversale de capăt. 77	
3.6.7	Bară cu dublă variație având secțiunea I. Determinarea forței axiale critice de compresiune pentru diferite funcții de variație a momentului de inerție.....	78
3.6.8	Bară cu secțiune I și înălțime variabilă. Studii numerice privind convergența metodelor de integrare studiate .....	79
3.6.9	Bară cu secțiune I și înălțime variabilă. Studii privind determinarea coeficientului mediu de compresiune ideal .....	82
3.7	Concluzii preliminare.....	85
Cap. 4	Modelul de calcul propus pentru analiza avansată a structurilor în cadre. Aplicația EPASS	87
4.1	Introducere .....	87
4.1.1	Ipotezele de calcul ale metodei .....	87
4.2	Analiza la nivel de element.....	88
4.2.1	Modelarea comportării elasto-plastice a secțiunilor. Criteriul de plastificare .....	88
4.2.2	Plastificarea graduală .....	89
4.2.3	Efectul local al neliniarității geometrice în cazul barelor prismatice .....	90
4.2.4	Efectul imperfecțiunilor geometrice inițiale în cazul barelor prismatice .....	91
4.2.5	Integrarea ecuației diferențiale a fibrei medii deformată. Ecuația momentului încovoietor în secțiunea curentă pentru bara prismatică .....	92
4.2.6	Efectele de ordinul al II-lea asupra forțelor nodale echivalente pentru bara prismatică.....	94

4.2.7	Efectele curbei de interacțiune plastică asupra matricei de rigiditate și a forțelor nodale echivalente .....	95
4.2.8	Matricea de rigiditate elasto-plastică.....	100
4.2.9	Includerea efectelor conexiunilor flexibile în calculul elasto-plastic de ordinul al II-lea	100
4.2.10	Matricea de rigiditate și vectorul forțelor echivalente pe noduri în sistemul de coordonate local .....	102
4.3	Efectul global al neliniarității geometrice.....	103
4.3.1	Reactualizarea configurației geometrice a structurii .....	103
4.3.2	Matricea de rigiditate geometrică.....	105
4.4	Algoritmul de analiză neliniară. Aplicația EPASS .....	105
4.4.1	Etapele metodei.....	106
4.5	Studii numerice la nivel de bară pentru verificarea și calibrarea modelului numeric implementat în EPASS.....	111
4.5.1	Element de bară comprimat. Efectul imperfecțiunilor geometrice inițiale locale, considerând diferite condiții de rezemare .....	112
4.5.2	Bară rezemată cu considerarea imperfecțiunilor geometrice inițiale .....	113
4.5.3	Bara cu secțiune variabilă și imperfecțiuni geometrice inițiale. Calcul geometric neliniar	115
4.5.4	Bara cu secțiune variabilă și imperfecțiuni geometrice inițiale. Calcul elasto-plastic	117
4.5.5	Bară cu secțiune variabilă încărcată excentric. ....	123
4.6	Concluzii preliminare.....	129
Cap. 5	Exemple numerice pentru validarea și calibrarea programului de analiză neliniară pentru structurile în cadre.....	130
5.1	Cadrul portal Karabalis.....	131
5.2	Cadrul portal Saffari .....	135
5.3	Cadrul fermă Li&Li.....	136
5.4	Cadrul portal Hayalioglu & Saka .....	138
5.5	Cadrul portal El-Zanaty .....	140
5.6	Cadrul portal Vogel.....	145
5.7	Cadrul portal cu imperfecțiuni geometrice inițiale locale și globale Galambos&Ketter .....	150
5.8	Cadrul portal cu imperfecțiuni geometrice inițiale locale .....	155
5.9	Cadrul cu două niveluri Ziemian.....	157
5.10	Cadrul cu un nivel și două deschideri.....	160
5.11	Cadrul cu două niveluri și o deschidere, Liew .....	165
5.12	Cadrul cu șase niveluri Vogel .....	167
5.13	Concluzii preliminare.....	176
Cap. 6	Concluzii, contribuții personale și direcții viitoare de cercetare.....	178

6.1	Concluzii generale .....	178
6.2	Contribuții personale .....	183
6.3	Direcții viitoare de cercetare .....	184
Bibliografie .....		186
	- <i>Cărți și Teze de Doctorat</i> - .....	186
	- <i>Rapoarte științifice și volume conferințe</i> - .....	190
	- <i>Articole jurnale și conferințe</i> - .....	191
	- <i>Surse de documentare electronice</i> - .....	201
-	ANEXE - .....	202
	Anexa A .....	202
	Anexa B .....	203
	Anexa C .....	204
	Anexa D .....	206
	D1. Metoda Simpson 3/8 .....	206
	D2. Cuadratura Gauss – Legendre .....	207
	D3. Cuadratura Gauss – Lobatto .....	210
	Anexa E .....	212

## Lista figurilor

Fig. 1.1 Structuri din oțel: (a) Turnul Eiffel (Wikipedia), (b) Burj Khalifa (Wikipedia),.....	1
Fig. 2.1 Metode de analiză elasto-plastică a structurilor în cadre .....	10
Fig. 2.2 Tipuri de elemente finite: (a) unidimensionale (“beam”), (b) bidimensionale (“shell”), (c) solide (“brick”).....	14
Fig. 2.3 Criterii de plastificare pentru profile metalice, pentru structuri plane .....	17
Fig. 2.4 Distribuția tensiunilor reziduale conform ECCS (Zubydan, 2010).....	18
Fig. 2.5 Degradarea modului de elasticitate tangent $E_t$ , în funcție de solicitări (Zubydan, 2010).....	19
Fig. 2.6 Efectul $P-\Delta$ și $P-\delta$ .....	20
Fig. 2.7 Efectul global al neliniarității geometrice .....	22
Fig. 2.8 Combinarea efectului imperfecțiunilor locale și globale (Alvarenga & Silveira, 2009b).....	24
Fig. 2.9 Imperfecțiuni geometrice la nivel de structură.....	25
Fig. 2.10 Element de bară având imperfecțiuni geometrice inițiale.....	26
Fig. 2.11 Imperfecțiuni locale modelate ca un sistem de forțe orizontale .....	27
Fig. 2.12 Metoda cu forțe laterale fictive pentru imperfecțiuni geometrice globale.....	27
Fig. 2.13 Modul de elasticitate tangent cu și fără considerarea efectului imperfecțiunilor geometrice inițiale – metoda CRC (Chen & Kim, 1997) .....	28
Fig. 2.14 Elementul de bară încărcat .....	29
Fig. 2.15 Model de distribuție pe înălțimea secțiunii transversale. (a) Galambos&Ketter (1959), (b) Young, (1975), (c) ECCS (1976), (d) Bild&Trahair (1989) .....	31
Fig. 2.16 Modul de elasticitate tangent, conform AISC-LRFD și CRC.....	32
Fig. 2.17 Tipuri de conexiuni: (a) noduri articulate, (b) noduri rigide, (c) noduri semi-rigide	32
Fig. 2.18 Modele matematice ale conexiunilor semirigide. (a) (Colson & Louveau, 1983), (b) (Kishi & Chen, 1987a), (c) (Ramberg & Osgood, 1943), (d) (Richard & Abbott, 1975) .....	34
Fig. 2.19 Element de bară cu conexiuni flexibile.....	35
Fig. 2.20 Metode incrementale cu diferiți parametri de control .....	38
Fig. 2.21 Metoda simplu-incrementală.....	39
Fig. 3.1 Eforturile și deplasările în sistemul local pentru elementul de bară neprismatic. Modelul Li (Li & Li, 2002).....	44
Fig. 3.2 Eforturile și deplasările în sistemul local pentru elementul de bară neprismatic.Modelul Al – Sadder (2004) .....	47
Fig. 3.3 Elementul de bară în sistemul de coordonate de bază. Modelul simplificat.....	51
Fig. 3.4 Element de bară având imperfecțiuni geometrice inițiale.....	55
Fig. 3.5 Configurație geometrică bară cu secțiune circulară și înălțime variabilă (Al-Sadder, 2004).....	61
Fig. 3.6 Funcția $S_{11}$ pentru bara cu secțiune circulară și înălțime variabilă .....	62
Fig. 3.7 Funcția $S_{12}$ pentru bara cu secțiune circulară și înălțime variabilă .....	63
Fig. 3.8 Funcția $S_{22}$ pentru bara cu secțiune circulară și înălțime variabilă .....	63
Fig. 3.9 Funcția $S_{11}$ pentru bara cu secțiune circulară și înălțime variabilă ( $\beta=2.5$ ) pentru coeficienți mari de încărcare axială.....	64



Fig. 3.10 Funcția S12 pentru bara cu secțiune circulară și înălțime variabilă ( $\beta = 2.5$ ) pentru coeficienți mari de încărcare axială.....	64
Fig. 3.11 Funcția S22 pentru bara cu secțiune circulară și înălțime variabilă ( $\beta = 2.5$ ) pentru coeficienți mari de încărcare axială.....	65
Fig. 3.12 Funcțiile de stabilitate pentru bara neprismatică cu secțiune circulară având coeficientul de compresiune axială $\lambda_B = 1$ .....	66
Fig. 3.13 Configurație geometrică bară cu secțiune dreptunghiulară și înălțime variabilă (Al-Sadder, 2004).....	67
Fig. 3.14 Funcția S11 pentru bara cu secțiune dreptunghiulară și înălțime variabilă.....	67
Fig. 3.15 Funcția S12 pentru bara cu secțiune dreptunghiulară și înălțime variabilă.....	68
Fig. 3.16 Funcția S22 pentru bara cu secțiune dreptunghiulară și înălțime variabilă.....	68
Fig. 3.17 Bară cu secțiune I și înălțime variabilă sollicitată la compresiune cu forță concentrată la mijlocul deschiderii (Li & Li, 2002).....	69
Fig. 3.18 Bară în consolă cu secțiune I și înălțime variabilă.....	71
Fig. 3.19 Bară cu secțiune variabilă I. Curba încărcare - deplasare laterală,.....	71
Fig. 3.20 Bară cu secțiune variabilă I. Curba încărcare - deplasare laterală,.....	71
Fig. 3.21 Bară neprismatică cu profil I având diferite rapoarte între secțiunile transversale de capăt respectiv diferite lungimi (Soltani, Asgarian, & Mohri, 2014).....	72
Fig. 3.22 Bară comprimată cu dublă variație având secțiunea transversală I.....	77
Fig. 3.23 Curba încărcare – deplasare laterală la mijlocul deschiderii.....	78
Fig. 3.24 Bară comprimată cu dublă variație având secțiunea transversală I.....	78
Fig. 3.25 Convergența funcțiilor de stabilitate în funcție de numărul termenilor în funcția polinomială ( $\alpha = 0.4$ ).....	80
Fig. 3.26 Convergența funcțiilor de stabilitate în funcție de numărul termenilor în funcția polinomială ( $\alpha = 0.6$ ).....	80
Fig. 3.27 Convergența funcțiilor de stabilitate în funcție de numărul termenilor în funcția polinomială ( $\alpha = 0.8$ ).....	80
Fig. 3.28 Convergența funcțiilor de stabilitate în funcție de numărul punctelor de integrare în lungul elementului ( $\alpha = 0.4$ ).....	81
Fig. 3.29 Convergența funcțiilor de stabilitate în funcție de numărul punctelor de integrare în lungul elementului ( $\alpha = 0.6$ ).....	81
Fig. 3.30 Convergența funcțiilor de stabilitate în funcție de numărul punctelor de integrare în lungul elementului ( $\alpha = 0.8$ ).....	81
Fig. 3.31 Coeficientul $\psi$ în funcție de raportul secțiunilor la capetele elementului.....	83
Fig. 3.32 Influența factorului de încărcare axială în evaluarea funcției S11, în funcție de metoda utilizată.....	83
Fig. 3.33 Influența factorului de încărcare axială în evaluarea funcției S12, în funcție de metoda utilizată.....	84
Fig. 3.34 Influența factorului de încărcare axială în evaluarea funcției S22, în funcție de metoda utilizată.....	84
Fig. 4.1 Criterii de plastificare pentru profile metalice.....	89
Fig. 4.2 Zone potențial plastice.....	90
Fig. 4.3 Element de bară cu imperfecțiuni geometrice locale inițiale.....	91

Fig. 4.4 Criteriul de plastificare: (a) liniar ((AISC), 1994); (b) neliniar (Orbison, McGuire, & Abel, 1982) .....	95
Fig. 4.5 Cadru încărcat cu forță uniform distribuită.....	97
Fig. 4.6 Element de bară cu conexiuni semi-rigide.....	100
Fig. 4.7 Sistemul de coordonate de bază și cel local al elementului de bară.....	103
Fig. 4.8 Efectul global al neliniarității geometrice .....	104
Fig. 4.9 Schema logică a metodei incrementale pentru analiza statică neliniară a cadrelor plane.....	108
Fig. 4.10 Schema logică a procesului iterativ din etapa corector, pentru un pas de încărcare.....	109
Fig. 4.11 Schema logică a metodelor propuse pentru determinarea matricei de rigiditate a unui element de bară cu secțiune variabilă .....	110
Fig. 4.12 Curbe comparative pentru bara cu imperfecțiuni geometrice inițiale .....	113
Fig. 4.13 Bară simplu rezemată cu imperfecțiuni geometrice inițiale.....	114
Fig. 4.14 Bară cu imperfecțiuni geometrice - Curba încărcare-deplasare axială.....	114
Fig. 4.15 Bară cu secțiune variabilă .....	115
Fig. 4.16 Curbe comparative încărcare-deplasare, (a) cu ignorarea efectului imperfecțiunilor geometrice, (b) cu considerarea efectului.....	116
Fig. 4.17 Bară cu secțiune variabilă supusă la încărcare uniform distribuită și forță axială de compresiune .....	117
Fig. 4.18 Curbe comparative încărcare – deplasare maximă în câmp.....	119
Fig. 4.19 Variația combinației de eforturi în bază, cu și fără considerare imperfecțiunilor geometrice inițiale .....	120
Fig. 4.20 Variația combinației de eforturi în secțiunile plastificate .....	121
Fig. 4.21 Curbe comparative încărcare-deplasare laterală: influența numărului de puncte de integrare .....	122
Fig. 4.22 Poziția articulațiilor plastice în cuprinsul barei în funcție de schema de integrare .....	122
Fig. 4.23 Bară cu secțiune variabilă și imperfecțiuni geometrice inițiale .....	123
Fig. 4.24 Curbe comparative încărcare-deplasare pentru axa maximă de inerție fără includerea efectului imperfecțiunilor geometrice inițiale.....	124
Fig. 4.25 Curbe comparative încărcare-deplasare pentru axa maximă de inerție, cu includereaefectului imperfecțiunilor geometrice inițiale.....	125
Fig. 4.26 Influența numărului de termeni asupra curbe încărcare-deplasare, cu includereaefectului imperfecțiunilor geometrice inițiale.....	126
Fig. 4.27 Efectul conexiunilor flexibile asupra curbelor încărcare-deplasare laterală.....	128
Fig. 5.1 Cadrul portal Karabalis .....	131
Fig. 5.2 Curbe comparative încărcare-deplasare laterală cadrul portal Karabalis: fără imperfecțiuni geometrice inițiale, respectiv cu imperfecțiuni geometrice inițiale.....	132
Fig. 5.3 Cadrul portal Karabalis încastrat în bază.....	133
Fig. 5.4 Curbe comparative încărcare-deplasare laterală cadrul portal Karabalis încastrat în bază – calcul elasto-plastic.....	134
Fig. 5.5 Variația combinației de eforturi la baza stâlpului 1.....	134
Fig. 5.6 Variația combinației de eforturi la baza stâlpului 2.....	135
Fig. 5.7 Cadrul portal Saffari .....	136
Fig. 5.8 Caracteristicile geometrice și de încărcare pentru cadrul portal Li&Li.....	137

Fig. 5.9 Curbe comparative încărcare-deplasare.....	138
Fig. 5.10 Caracteristici geometrice cadru portal Hayalioglu & Saka.....	139
Fig. 5.11 (a) Curba încărcare – deplasare verticală, (b) Variația combinației de eforturi.....	140
Fig. 5.12 Caracteristicile geometrice și de încărcare pentru cadrul portal El-Zanaty .....	141
Fig. 5.13 Cadru portal, El-Zanaty, cu considerarea forțelor gravitaționale constante și aplicarea forțelor laterale incremental, cu tensiuni reziduale. ....	142
Fig. 5.14 Cadru portal, El-Zanaty, cu considerarea forțelor aplicate incremental, fără tensiuni reziduale.....	143
Fig. 5.15 Cadru portal, El-Zanaty, cu considerarea forțelor aplicate incremental, cu tensiuni reziduale.....	143
Fig. 5.16 Cadru portal, El-Zanaty, variația modului de elasticitate tangent în raport cu variația momentului încovoietor adimensional, diferite ipoteze de încărcare; fără tensiuni reziduale ( încărcări aplicate incremental).....	144
Fig. 5.17 Cadru portal, El-Zanaty, variația modului de elasticitate tangent în raport cu variația momentului încovoietor adimensional, diferite ipoteze de încărcare; cu tensiuni reziduale ( încărcări aplicate incremental).....	144
Fig. 5.18 Configurația geometrică și distribuția încărcărilor pentru cadru plan Vogel.....	145
Fig. 5.19 Curbe comparative încărcare-deplasare laterală pentru diferite curbe de interacțiune plastică.....	147
Fig. 5.20 Curbe încărcare-deplasare laterală pentru compararea cu modele bazate pe conceptul de articulație plastică .....	147
Fig. 5.21 Curbe încărcare-deplasare laterală pentru compararea cu modele bazate pe conceptul de zone plastice .....	148
Fig. 5.22 Variația combinației de eforturi în stâlpul 2, în bază, pentru diferite curbe de plastificare.....	148
Fig. 5.23 Variația modului de elasticitate în funcție de momentul încovoietor adimensional .....	149
Fig. 5.24 Efectul conexiunilor semirigide asupra curbelor de comportare încărcare- .....	149
Fig. 5.25 Cadrul portal cu imperfecțiuni Galambos&Ketter (2009b).....	150
Fig. 5.26 Combinații imperfecțiuni geometrice locale (Alvarenga & Silveira, 2009b).....	150
Fig. 5.27 Combinații imperfecțiuni geometrice globale (Alvarenga & Silveira, 2009b).....	151
Fig. 5.28 Combinații imperfecțiuni geometrice locale și globale ale cadrului portal (Alvarenga & Silveira, 2009b).....	151
Fig. 5.29 Combinarea efectelor imperfecțiunilor geometrice inițiale locale și globale .....	152
Fig. 5.30 Curbele încărcare deplasare laterală pentru cea mai defavorabilă combinație a efectelor imperfecțiunilor geometrice locale și globale .....	154
Fig. 5.31 Cadru portal cu imperfecțiuni geometrice inițiale .....	156
Fig. 5.32 Curbe comparative încărcare – deplasare pentru cadrul portal cu imperfecțiuni....	156
Fig. 5.33 (a) Pozițiile și ordinea de formare a articulațiilor plastice; (b) variația combinației de eforturi în stâlp în nodul monitorizat .....	157
Fig. 5.34 Configurația geometrică și distribuția încărcărilor.....	158
Fig. 5.35 Curba încărcare-deplasare laterală pentru nivelul 1 .....	159
Fig. 5.36 Curba încărcare-deplasare laterală pentru nivelul 2 .....	159
Fig. 5.37 Ordinea aparițiilor articulațiilor plastice.....	160

Fig. 5.38 Variația combinației de eforturi în secțiunea A.....	160
Fig. 5.39 Caracteristicile geometrice, secționale și de încărcare ale cadrului plan cu două deschideri.....	161
Fig. 5.40 Curbele forță axială P-deplasare laterală, pentru cele două configurații de rezemare considerate:.....	161
Fig. 5.41 Pozițiile și ordinea de formare a articulațiilor plastice pentru cadrul plan cu două deschideri.....	162
Fig. 5.42 Variația combinației de eforturi în secțiunea de la mijlocul stâlpului 1, pentru cadrul plan articulată în bază.....	163
Fig. 5.43 Variația combinației de eforturi în secțiunea de la nodul 2 al stâlpului 2, pentru cadrul plan articulată în bază.....	163
Fig. 5.44 Variația combinației de eforturi în secțiunea de la nodul 1 al stâlpului 1, pentru cadrul plan încastrat în bază.....	164
Fig. 5.45 Variația combinației de eforturi în secțiunea de la mijlocul stâlpului 1, pentru cadrul plan încastrat în bază.....	164
Fig. 5.46 Cadrul Liew cu noduri semirigide.....	166
Fig. 5.47 Diagrama de momente încovoietoare la factorul de încărcare 1,0 (1.4x Încărcarea gravitațională).....	166
Fig. 5.48 Curba încărcare-deplasare laterală pentru nivelul 1.....	167
Fig. 5.49 Curba încărcare-deplasare laterală pentru nivelul 2.....	167
Fig. 5.50 Cadrul cu șase niveluri. Configurația geometrică și distribuția încărcărilor.....	168
Fig. 5.51 Curba încărcare-deplasare laterală pentru nivelul 4.....	169
Fig. 5.52 Curba încărcare-deplasare laterală pentru nivelul 6.....	170
Fig. 5.53 Curba comparative încărcare-deplasare laterală pentru nivelurile 4 și 6.....	170
Fig. 5.54 Variația combinației de eforturi în secțiunile plastificate.....	170
Fig. 5.55 Variația modulului de elasticitate în funcție de momentul încovoietor adimensional fără considerarea tensiunilor reziduale; pentru stâlpi.....	171
Fig. 5.56 Variația modulului de elasticitate în funcție de momentul încovoietor adimensional fără considerarea tensiunilor reziduale; pentru grinzi.....	171
Fig. 5.57 Variația modulului de elasticitate în funcție de momentul încovoietor adimensional cu considerarea tensiunilor reziduale conform ECCS; pentru stâlpi.....	172
Fig. 5.58 Variația modulului de elasticitate în funcție de momentul încovoietor adimensional cu considerarea tensiunilor reziduale conform ECCS; pentru grinzi.....	172
Fig. 5.59 Distribuția procentuală a secțiunilor plastificate.....	173
Fig. 5.60 Diagramele de momente încovoietoare și eforturi axiale.....	174
Fig. 5.61 Efectul conexiunilor semi-rigide asupra curbelor de comportare încărcare-deplasare laterală pentru nivelul 4.....	175
Fig. 5.62 Efectul conexiunilor semi-rigide asupra curbelor de comportare încărcare-deplasare laterală pentru nivelul 6.....	175
Fig. D.0.1 Funcția cubică $f^*(x)$ pentru metoda de integrare Simpson.....	207

## Lista tabelelor

Tabel 3.1 Deplasarea maximă la mijlocul deschiderii.....	69
Tabel 3.2 Studiu privind importanța dimensiunii elementului finit în Abaqus .....	73
Tabel 3.3 Forța axială critică determinată pentru un profil I cu diferite lungimi ( $L = 4 - 10$ m) și rapoarte ale secțiunilor transversale de capăt ( $\alpha = 0.4 - 1$ ) – plan de încovoiere minim.....	73
Tabel 3.4 Forța axială critică determinată pentru un profil I cu diferite lungimi ( $L = 2 - 10$ m) și rapoarte ale secțiunilor transversale de capăt ( $\alpha = 0.4 - 1$ ) - plan de încovoiere maxim.....	74
Tabel 3.5 Forța axială critică evaluată pentru un profil I cu diferite lungimi ( $L = 4 - 10$ m) și rapoarte ale secțiunilor transversale de capăt ( $\alpha = 0.4 - 1$ ) în funcție de numărul termenilor în funcția polinomială - plan de încovoiere minim .....	75
Tabel 3.6 Forța axială critică evaluată pentru un profil I cu diferite lungimi ( $L = 4 - 10$ m) și rapoarte ale secțiunilor transversale de capăt ( $\alpha = 0.4 - 1$ ) în funcție de numărul termenilor în funcția polinomială - plan de încovoiere maxim.....	76
Tabel 3.7 Forța axială critică pentru un profil I cu diferite funcții de variație a momentului de inerție .....	79
Tabel 5.1 Forța axială critică pentru cadrul portal Karabalis.....	132
Tabel 5.2 Forța axială critică pentru cadrul fermă Saffari.....	136
Tabel 5.3 Factor de încărcare pentru cadrul portal considerând diferite .....	153
<i>Tabel 5.4 Factor de încărcare pentru cadrul cu imperfecțiuni inițiale, <math>\beta_H = 0</math>.....</i>	<i>154</i>
Tabel 5.5 Factor de încărcare pentru cadrul cu imperfecțiuni inițiale, $\beta_H = 0.5$ .....	155
Tabel D.0.1 Expresiile polinoamele Legendre pentru $n = 2 \dots 8$ .....	208
Tabel D.0.2 Valori abscise și ponderi pentru cuadratura Gauss –Legendre ( $n = 2 \dots 8$ ).....	209
Tabel D.0.3 Valori abscise și ponderi pentru cuadratura Gauss –Lobatto ( $n = 3 \dots 8$ ).....	210
Tabel E.0.4 Valorile coeficientului de rigiditate $s_{11}$ .....	212
Tabel E.0.5 Valorile coeficientului de rigiditate $s_{12}$ .....	213
Tabel E.0.6 Valorile coeficientului de rigiditate $s_{22}$ .....	214

## Abrevieri și notații principale

### Abrevieri

AISC	American Institute of Steel Construction
AP	Articulație plastică
CRC	Column Research Council
CSA	Canadian Standard Association
ECCS	European Convention for Constructional Steelwork
FEA	Finite element analysis
LRFD	Load and Resistance Factor Design
LSD	Limit state design
MEF	Metoda Elementelor Finite
MPa	MEGA Pascali
NTF	Număr termeni funcție polinomială
PI	Puncte de Integrare
TFP	Termeni Funcție Polinomială

### Notații principale

#### *Litere latine mari*

$A(x)$	Aria secțiunii transversale în secțiunea “x”
$E$	Modulul de elasticitate
$E_s$	Modul de elasticitate secant
$E_t$	Modul de elasticitate tangent
$E_t'$	Modul de elasticitate tangent redus
$E_{tr}$	Modulul de elasticitate tangent adimensional
$E_{trj}$	Modulul de elasticitate adimensional la pasul “j”
$G$	Modulul de elasticitate transversal
$I(x)$	Momentul de inerție în secțiunea “x”
$K_T$	Matricei de rigiditate tangentă globală
$L^k$	Lungimea barei actualizată în pasul de încărcare “k”
$M(x)$	Momentul încovoietor în secțiunea x
$M_0$	Moment încovoietor de referință
$M_p$	Momentul încovoietor plastic
$M_r$	Momentul încovoietor secțional adimensional
$M_u$	Momentul încovoietor ultim
$N$	Forța axială
$N_{Euler}$	Forța axială critic Euler
$N_p$	Forța axială capabilă

$N_r$	Forța axială secțională adimensională
$P_{E,2}$	Forța axială critică (Euler) a elementului de bară având momentul de inerție de la capătul 2
$R_k$	Rigiditatea conexiunii flexibile
$R_{ki}$	Rigiditatea inițială a conexiunii flexibile
$R_k^i$	Rigiditatea conexiunii flexibile pentru nodul “i”
$R_{kr}$	Rigiditatea conexiunii la reconsolidare
$T$	Matricea de transformare din sistemul de bază în sistemul local de referință
$T_c$	Matricea de transformare de la matrice de rigiditate elastică la elasto-plastică
$W_{el}$	Modulul de rezistență elastic
$W_{pl}$	Modulul de rezistență plastic
$Z_p$	Modulul plastic de rezistență pentru axa de inerție principală

### *Litere latine mici*

$c_1, c_2$	Funcții de stabilitate
$c_b, c_{b0}, b_1, b_2, b_{vs}, b_{vv}$	Funcții de curbură propuse de Oran (1973)
$f_q$	Forțele nodale echivalente din încărcările uniform distribuite
$f_Q$	Forțele nodale echivalente din încărcarea concentrată din cuprinsul barei
$f_r$	Matricea de flexibilitate
$f_{y0}$	Forțele nodale echivalente din imperfecțiunile geometrice inițiale
$g_i$	Factor de fixare
$k_a$	Rigiditatea axială
$k_D$	Matricea de rigiditate geometrică
$k_r$	Matricea de rigiditate tangentă elastică
$k_{r,ep}$	Matricea de rigiditate tangentă elasto-plastă
$k_{sc}$	Matricea de rigiditate a conexiunilor semi-rigide
$k_{sem}$	Matricea de rigiditate pentru un element cu conexiuni semirigide
$n$	Factor de formă
$plim$	Factor de încărcare ultim
$S_{ii}, S_{ij}, S_{jj}$	Funcțiile de stabilitate propuse de Liew, White, & Chen (1993b), pentru matricea de rigiditate elasto-plastică
$x_i^k, y_i^k$	Coordonatele nodului “i” la sfârșitul pasului “k”
$y(\xi), \alpha(\xi), \beta(\xi)$	Polinoamele Cebîșev
$y_0$	Deplasarea cauzată de imperfecțiunile geometrice inițiale
$y_e$	Deplasarea cauzată de forțele exterioare
$y_e^0$	Soluția generală a ecuației diferențiale de echilibru
$\bar{y}_e$	Soluție particulară a ecuației diferențiale de echilibru

### *Litere grecești*

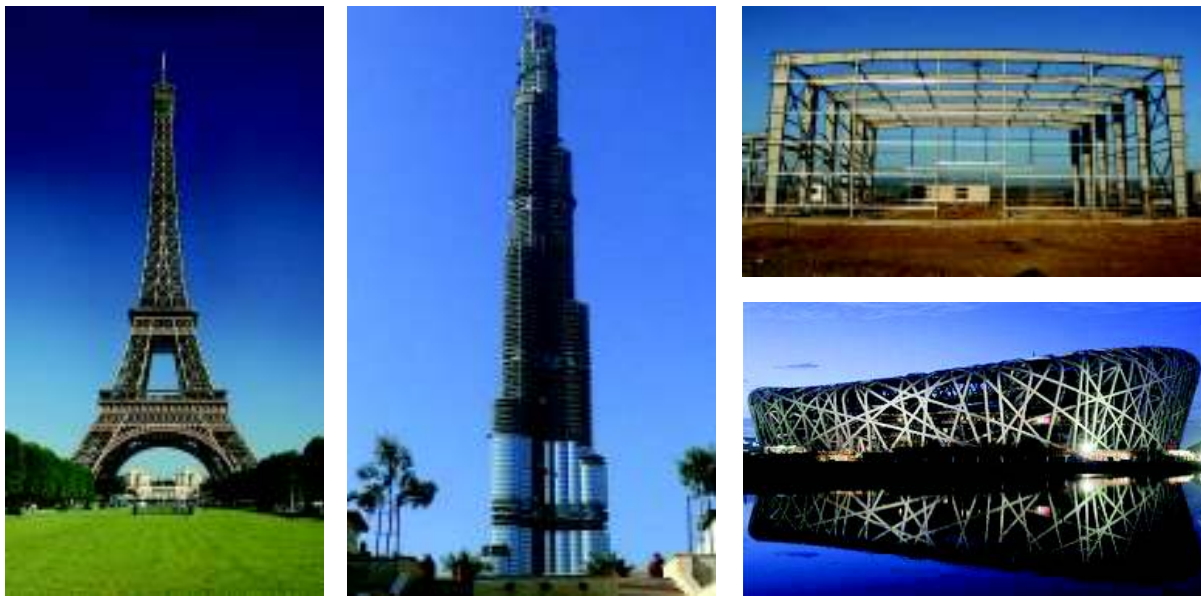
$\alpha$	Coeficientul de compresiune axială
$\Gamma$	Funcția de plastificare
$\Delta\hat{q}$	Vectorul forțelor nodale echivalente
$\delta_M$	Deplasări din încovoiere
$\delta_N$	Deplasări axiale
$\Delta q_{eq}$	Vectorul forțelor nodale echivalente pentru un element cu conexiuni rigide
$\Delta q_{rp}$	Vectorul forțelor nodale echivalente pentru un element plastificat
$\Delta q_{sem}$	Vectorul forțelor nodale echivalente pentru un element cu conexiuni flexibile
$\delta_t$	Scurtarea totală a elementului de bară
$\Delta\theta_i$	Rotirea incrementală la capătul “i”
$\theta$	Rotirea
$\theta_0$	Rotirea de referință
$\theta_r$	Rotirea relativă între grindă și stâlp
$\lambda_B$	Factorul de încărcare axială
$\xi$	Lungimea adimensională
$\sigma_r$	Tensiunea reziduală
$\sigma_{RC}$	Tensiunea reziduală la compresiune
$\sigma_{RT}$	Tensiunea reziduală la întindere
$\sigma_y$	Tensiunea de curgere
$\nu$	Coeficientul de compresiune axială * lungimea elementului
$\nu_m$	Coeficientului de compresiune mediu
$\Phi$	Curbura
$\Psi_0$	Înclinația inițială a stâlpilor



## Cap. 1 Introducere

---

În ultimele decenii, ca urmare a schimbărilor economice și sociale, s-a observat o dezvoltare exponențială a orașelor, datorită migrației populației. Având spațiu limitat, arhitecții au fost nevoiți să caute soluții noi oferind posibilitatea de a construi clădiri “pe verticală”. Odată cu evoluția stilului architectural modern, s-a pus mare accent pe crearea unui design simplu și estetic care permite utilizarea eficientă a spațiului funcțional. Astfel, materiale extrem de durabile cum este oțelul permite construirea unor structuri având forme geometrice neconvenționale. De asemenea, structurile metalice sunt tot mai accesibile datorită modului facil de asamblare, a perioadei scurte de finalizare și a costurilor rezonabile. Din aceste motive, proiectarea structurilor metalice a cunoscut o dezvoltare semnificativă în ultimii ani, fiind o soluție accesibilă datorită varietății destinației, de la hale industriale la clădiri moderne, Fig. 1.1.



*Fig. 1.1 Structuri din oțel: (a) Turnul Eiffel (Wikipedia), (b) Burj Khalifa (Wikipedia), (c) Hale industriale (Enadu General Beton), (d) Stadionul Național din Beijing (World Stadiums)*

### 1.1 Necesitatea temei de cercetare și încadrarea ei în domeniul științific

Metodele clasice de proiectare a structurilor oferă prescripții bazate pe verificarea individuală a capacității elementelor, însă sunt limitate în ceea ce privește evaluarea comportamentului structural la nivel global, ținând cont de interacțiunea între elemente. Acest aspect este important în cazul structurilor complexe, unde evaluarea greșită a capacității ultime de rezistență a întregului sistem structural, poate conduce la soluții dezavantajoase din punct de vedere economic sau structural. De asemenea, având în vedere faptul că metodele clasice de proiectare nu sunt capabile să urmărească curba de comportare încărcare-deplasare, mecanismul de cedare nu poate fi surprins în mod riguros iar, în cazul structurilor metalice cu elemente

zvelte, cedarea poate apărea ca urmare a pierderii stabilității structurii, și nu din epuizarea capacității portante.

Chiar dacă în ultimele decenii, odată cu dezvoltarea tehnologiei pe calculator, softurile de modelare bazate pe MEF au devenit foarte populare iar rezultatele obținute reflectă cu maximă precizie comportamentul real al structurilor, acestea sunt limitate în ceea ce privește analiza structurilor complexe, datorită necesității unei discretizări fine a elementelor componente, ceea ce implică un efort computațional ridicat. Din acest motiv, metodele de analiză bazate pe MEF sunt utilizate în cercetare, pentru calibrarea altor modele de analiză mai simplificate (ECCS, 1984), (White & Chen, 1990).

În stadiul actual este recunoscută necesitatea abordării unor metode avansate de analiză care permit studiul structurilor ca un ansamblu global, și nu a barelor ca elemente individuale. În acest scop, o preocupare continuă a cercetătorilor din domeniu este elaborarea unor noi metode de analiză pentru facilitarea evaluării răspunsului structurilor în practica curentă. În literatura de specialitate sunt menționate numeroase modele analitice avansate, pentru analiza inelastică de ordinul al II-lea a structurilor în cadre din oțel, bazate pe conceptul de articulație plastică sau cele care consideră plastificarea distribuită. O metodă de analiză este considerată “avansată” dacă poate descrie în mod satisfăcător rezistența, rigiditatea și stabilitatea globală a structurii, astfel încât să nu fie necesară verificarea individuală a elementelor componente ale structurii (Chen W. , 1993), (Li & Li, 2007), (Maleck, White, & Chen, 1995). Pentru evaluarea cât mai corectă a comportamentului real al structurii, o astfel de metodă trebuie să fie capabilă să surprindă efectele neliniarității geometrice locale și globale, de material (considerarea interacțiunii eforturilor în plastificarea secțiunilor), a imperfecțiunilor geometrice inițiale, a tensiunilor reziduale, efectului “bowing”, precum și a conexiunilor flexibile.

În urma analizei cercetărilor existente din literatura de specialitate, privind metodele de analiză avansate capabile să cupleze principalele surse de neliniaritate și de imperfecțiuni, rezultă următoarele observații care evidențiază anumite limitări (neajunsuri) ale metodelor existente, ceea ce conduce la necesitatea îmbunătățirii acestora pentru analiza inelastică de ordinul al II-lea a structurilor în cadre din oțel realizate din bare prismatice sau neprismatice:

- Chiar dacă unele metode de analiză din literatura de specialitate sunt capabile să identifice mecanismul de cedare plastic, în cazul structurilor metalice zvelte, supuse la încărcări axiale și laterale, cedarea structurii poate apărea ca urmare a fenomenului de instabilitate globală, datorită apariției momentelor încovoietoare de ordinul al II-lea cauzate de acțiunea forței axiale de compresiune pe structura deformată. În aceste situații se recomandă exprimarea ecuațiilor de echilibru pe configurația deformată iar la nivel local (de element) cuplarea neliniarității fizice și geometrice este, în general, greu de realizat atunci când se dorește modelarea barelor printr-un singur element.
- În cazul elementelor solicitate la încărcări uniform distribuite pe bară, secțiunile susceptibile de plastificare sunt atât la capetele barei cât și în lungul ei. Pentru a surprinde plastificarea secțiunilor în lungul elementului sunt propuse diferite abordări, însă majoritatea implică nevoia de a diviza bara în mai multe segmente/elemente (Chen & Chan, 1995), (Wong M. B., 1996), (Kim S. , Lee, Choi, & Kim, 2004), ceea ce

presupune un efort computațional mai mare datorită datelor ce trebuiesc memorate, ca urmare a reconfigurării geometriei structurii (modificarea topologică).

- Metoda clasică bazată pe conceptul de articulație plastică presupune plastificarea concentrată în anumite secțiuni (restul elementului având o comportare elastică) și că plastificarea secțiunii transversale are loc instantaneu și punctual și astfel poate conduce la o supraestimare a rigidității elementelor. Din acest motiv, se recomandă utilizarea unui model de calcul care este capabil să surprindă degradarea graduală a rigidității secțiunii transversale a barelor și, de asemenea, să cuprindă, cu un anumit grad de precizie, plastificarea distribuită în volumul elementului.
- Indiferent de calitatea procesului de fabricație, profilele metalice dezvoltă anumite tipuri de imperfecțiuni, geometrice și/sau mecanice, care induc efecte secundare în comportamentul structurilor și pot produce colapsul prematur. Cercetările experimentale începând cu anii 1935 (Wilson & Brown, 1935), (Koiter, 1945) și până în prezent confirmă importanța includerii efectelor imperfecțiunilor geometrice în modelul de analiză. Efectul imperfecțiunilor inițiale poate fi luat în considerare, în mod simplificat, prin includerea modului de elasticitate tangent  $E_t$  în matricea de rigiditate, însă această metodă este cunoscută că supraestimează capacitatea ultimă de rezistență a structurii (Maleck A. , 2001). Prin urmare, se constată necesitatea abordării unor tehnici care să includă în mod mai riguros (explicit) efectul imperfecțiunilor inițiale.
- Odată cu evoluția stilului arhitectural modern, structurile metalice permit adoptarea unor forme geometrice neconvenționale. Astfel, necesitatea studiului comportării elementelor cu secțiune variabilă a crescut exponențial în ultimii ani. În literatura de specialitate sunt menționate diferite abordări, însă unele dintre aceste nu includ efectul forțelor axiale (Cleghorn WL, 1992), (Frieman Z, 1992), (To C. , 1981) sau efectul imperfecțiunilor geometrice inițiale (Li & Li, 2002), (Al-Sadder, 2004) în exprimarea relațiilor de echilibru la nivel de element (formarea matricei de rigiditate). De asemenea, majoritatea acestor metode nu țin cont de încărcările distribuite aplicate pe bară, chiar dacă se cunoaște importanța lor în proiectarea curentă (Li & Li, 2002), (Al-Sadder, 2004).

Deși se cunoaște importanța și utilitatea acestor metode avansate în aplicațiile practice pentru analiza avansată a structurilor cu elemente neprismatice, majoritatea nu tratează cu un grad de acuratețe ridicat unele aspecte, cum ar fi integrarea explicită a imperfecțiunilor geometrice inițiale sau mecanice, a efectului deformațiilor din forța tăietoare, a conexiunilor semi-rigide, includerea forțelor distribuite pe bară, precum surprinderea formării și funcționării articulației plastice în lungul elementului utilizând un singur element/bară.

În acest context, se consideră necesară și oportună realizarea unor cercetări suplimentare pentru analiza neliniară avansată a structurilor în cadre alcătuite din bare cu secțiune variabilă și conexiuni semirigide. În lucrare este prezentat un model care stabilește relațiile forță-deplasare la nivel de element pentru barele cu secțiune variabilă, ținând cont de efectele combinate ale forței axiale, deformațiilor de lunecare din forța tăietoare, precum și al imperfecțiunilor geometrice inițiale. În acest scop se încearcă rezolvarea ecuației diferențiale de echilibru de ordinul al II-lea

cu coeficienți variabili prin dezvoltare în serii de puteri, având ca necunoscută principală momentul încovoietor. Apoi, utilizând relația Maxwell-Mohr se poate stabili relația incrementală deplasare-forță prin inversarea căreia se evidențiază matricea de rigiditate și vectorul forțelor nodale echivalente în prezența efectelor mai sus amintite.

## 1.2 Obiectivele propuse

În baza analizei făcute anterior privind stadiul actual al cercetărilor în domeniu, autorul tezei își propune următoarele obiective:

- **Obiectivul principal al tezei are ca scop dezvoltarea unui model de analiză avansată** capabil să surprindă cu un grad de acuratețe ridicat și efort computațional și de modelare scăzut **comportarea neliniară a structurilor în cadre alcătuite din bare cu secțiune variabilă și conexiuni semirigide.** În acest context se încearcă dezvoltarea unui element neprismatic de tip bară capabil să surprindă efectele combinate ale forței axiale în lungul elementului, al forței tăietoare, al imperfecțiunilor geometrice inițiale, precum și formarea articulațiilor plastice în cuprinsul elementului. În acest scop se încearcă rezolvarea ecuației diferențiale de echilibru de ordinul al II-lea cu coeficienți variabili prin dezvoltare în serii de puteri, având ca necunoscută momentul încovoietor. Apoi, utilizând metoda Maxwell-Mohr se poate stabili relația totală, respectiv incrementală deplasare-forță, prin evaluarea coeficienților de flexibilitate, iar prin inversare se pot evidenția matricea de rigiditate și vectorul forțelor nodale echivalente în prezența efectelor mai sus amintite.
- Subsidiar obiectivului principal menționat mai sus se propune și se calibrează **un procedu practic pentru determinarea matricei de rigiditate și a vectorului forțelor nodale echivalente a barelor cu secțiune variabilă.** Caracterul practic al procedurii constă în integrarea expresiei momentului încovoietor pentru bara prismatică, pentru evaluarea coeficienților de flexibilitate cu metoda Maxwell-Mohr, considerând, însă, în mod aproximativ variația momentului de inerție în lungul elementului. În acest sens, prin studii extensive de calibrare se propune un coeficient de compresiune mediu care este evaluat ținând cont de raportul secțiunilor de la capetele elementului considerat cu secțiune variabilă în lungul lui. Prin inversarea relațiilor incrementale deplasare-forță se evidențiază matricea de rigiditate și vectorul forțelor nodale echivalente. Acest procedeu este eficient în proiectarea curentă, se demonstrează că poate fi aplicat în majoritatea cazurilor practice, erorile introduse încadrându-se, în general, sub 5%.
- Pentru validarea modelului teoretic elaborat **s-a dezvoltat o aplicație software pentru analiza neliniară avansată** care să permită abordarea structurilor în cadre din oțel alcătuite din **bare cu secțiune variabilă și conexiuni semirigide.** Metoda abordată presupune modelarea structurii utilizând un singur element pe bară, ceea ce reduce numărul gradelor de libertate utilizate în analiză și, implicit, timpul de calcul. Modelul adoptat pentru evaluarea comportării elasto-plastice este cel al plastificării concentrate având la bază conceptul de articulație plastică punctuală cu formare instantanee (Chiorean

C. G., 2009). În această accepțiune, formarea și funcționarea articulațiilor plastice este permisă doar în anumite secțiuni caracteristice ale barei, articulațiile plastice fiind de dimensiune zero, restul elementului având o comportare elastică. De asemenea, încărcările distribuite pe bară pot fi incluse direct în analiză fără a fi necesară divizarea barei în mai multe elemente așa cum se întâmplă în majoritatea metodelor de calcul cunoscute. În acest context, se încearcă extinderea modelului propus de Chiorean C. G. (2009) ce exprimă relația forță-deplasare la nivel de element în condițiile formării articulațiilor plastice la capetele elementului și în cuprinsul acestuia, pentru cazul barelor cu secțiune variabilă coroborat cu considerarea efectelor de ordinul al II-lea în exprimarea momentelor încovoietoare și a imperfecțiunilor geometrice în lungul elementului. Totodată, pentru simularea formării zonelor plastice în lungul elementului se va adapta formularea propusă de Zubydan (2010), pentru evaluarea modulului de elasticitate tangent sau secant, în vederea surprinderii degradării graduale a rigidității elementelor, considerând trei secțiuni susceptibile la plastificarea, la capetele elementului precum și în lungul acestuia.

- Pentru a evidenția performanțele modelului de calcul propus și a aplicației software elaborate în acest scop au fost conduse o serie de studii numerice extinse pe o serie de tipuri de structuri relevante, propuse în literatura de specialitate sau propuse în această lucrare. Acest studiu are drept scop pe de o parte **validarea modelului de calcul**, dar în egală măsură poate constitui, prin detaliile de analiză și de comportare oferite, o bază de informație pentru studii viitoare ale altor cercetători în acest domeniu.

### 1.3 Metodologia cercetării științifice

Pentru evaluarea cât mai corectă a comportamentului structurii, înțelegerea fenomenelor ce produc răspunsul neliniar este esențială. Din acest motiv, s-a considerat necesară aprofundarea metodelor de analiză statică neliniară a structurilor în cadre din oțel care abordează diferite tehnici pentru considerarea barelor cu secțiune variabilă, a efectelor neliniarității fizice, geometrice (locală și globală), imperfecțiunilor inițiale (geometrice și mecanice), deformațiilor de lunecare transversală, precum și al conexiunilor flexibile. În acest scop, autorul tezei a consultat literatura de specialitate.

Pentru confirmarea și validarea formulărilor teoretice expuse în teză, autorul a dezvoltat o aplicație software, EPASS, în limbajul de programare Matlab 7.11. Calibrarea programului s-a făcut prin compararea rezultatelor cu cele din literatura de specialitate, avute la dispoziție, precum și prin studii numerice, efectuate de autor, cu programe de calcul care vizează calculul neliniar al structurilor Mastan2 (McGuire, Gallagher, & Ziemian, 2000) și cu un program de element finit Abaqus (Hibbitt, 2011).

## 1.4 Structura tezei de doctorat

Pe parcursul tezei de doctorat autorul își propune să treacă în revistă metodele de analiză avansată a structurilor în cadre, menționate în literatura de specialitate, și îndeplinirea obiectivelor menționate mai sus.

Teza de doctorat cuprinde șase capitole și cinci anexe, o descriere succintă a conținutului fiind prezentată în cele ce urmează:

### ***Capitolul 1. Introducere***

Acest capitol debutează cu prezentarea importanței structurilor din oțel, care a devenit o soluție tot mai accesibilă datorită modului facil de asamblare, a perioadei scurte de finalizare și a costurilor rezonabile. În continuare, se face încadrarea temei de cercetare în contextul actual și se prezintă obiectivele propuse. Tot în acest capitol se prezintă metodologia de lucru care stă la baza cercetării.

### ***Capitolul 2. Metode de analiză elasto-plastică de ordinul al II-lea a structurilor în cadre – stadiu actual***

În prima parte a capitolului 2 sunt prezentate comparativ metodele de analiză a structurilor în cadre, care sunt clasificate în două categorii: cele bazate pe conceptul de articulație plastică, respectiv cele bazate pe conceptul de zone plastice. De asemenea, sunt detaliate principalele surse de neliniaritate, precum și diferite tehnici menționate în literatura de specialitate pentru includerea lor în modelul de analiză. La sfârșitul capitolului sunt prezentate, în mod succint, metodele de determinare a soluției în calculul elasto-plastic de ordinul al II-lea, cea simplă incrementală, respectiv cele incremental iterative.

### ***Capitolul 3. Calculul geometric neliniar al barelor cu secțiune variabilă***

La începutul capitolului 3 se face o trecere în revistă a metodelor numerice pentru analiza elementelor cu secțiune variabilă menționate în literatura de specialitate. Autorul tezei s-a concentrat pe metodele existente bazate pe dezvoltare în serii de puteri iar limitările evidențiate justifică motivația autorului de a propune noi abordări.

În continuare sunt prezentate două metode pentru analiza barelor cu secțiune variabilă. Primul model este unul practic și presupune exprimarea aproximativă a momentului încovoietor în lungul barei, prin integrarea ecuației diferențiale de echilibru a barei considerată cu un modul de rigiditate la încovoiere echivalent (constant) și aplicarea relației Maxwell-Mohr pentru determinarea relațiilor deplasare-forță. În acest fel, în expresia momentului încovoietor este inclus un coeficient de compresiune mediu (echivalent) care este determinat ținând cont de raportul momentelor de inerție ale secțiunilor de la capetele elementului. Prin inversarea relațiilor incrementale deplasare-forță se evidențiază matricea de rigiditate și vectorul forțelor nodale echivalente. Acest procedeu este limitat de gradul de variație a secțiunilor transversale ale barelor, iar în urma studiilor numerice efectuate s-a constatat că pentru obținerea unor rezultate cu erori sub 5%, raportul înălțimilor secțiunilor transversale de capăt să nu fie mai mic de 0.6. Al doilea model propus în această lucrare, este considerat exact în formularea teoretică și stabilește relațiile forță-deplasare la nivel de element pentru barele cu secțiune variabilă, ținând cont de efectele forței axiale, al imperfecțiunilor geometrice inițiale, precum și de forțele uniforme

distribuite în lungul elementului. Originalitatea și eficiența procedurii constă în rezolvarea ecuației diferențiale de ordinul al II-lea cu coeficienți variabili, având ca necunoscută momentul încovoietor, prin dezvoltare în serii de puteri. Având cunoscută expresia momentului încovoietor în secțiunea curentă, utilizând relația Maxwell-Mohr, se poate stabili relația incrementală deplasare-forță prin inversarea căreia se evidențiază matricea de rigiditate și vectorul forțelor nodale echivalente în prezența efectelor mai sus amintite.

La sfârșitul capitolului, pentru verificarea eficienței și acurateții modelului de calcul, precum și a aplicației software dezvoltate, sunt efectuate o serie de teste numerice privind convergența metodelor de integrare, respectiv alegerea numărului adecvat de termeni în seria de puteri utilizată în exprimarea momentului încovoietor. De asemenea, se demonstrează faptul că rezultatele numerice obținute sunt relevante pentru performanțele modelului de calcul propus evidențiind eficacitatea metodei de calcul propuse.

#### ***Capitolul 4. Modelul de calcul propus pentru analiza avansată a structurilor în cadre. Aplicația EPASS***

În capitolul 4 este prezentat modelul de calcul complet integrând pe lângă efectele neliniarității geometrice și cele ale neliniarității fizice, în baza căruia a fost dezvoltată o aplicație software (EPASS) în mediul de programare Matlab 7.11. Sunt detaliate tehnicile pentru includerea în modelul de analiză a efectelor neliniarității geometrice locale și globale, imperfecțiunilor inițiale geometrice și mecanice, efectelor din forța tăietoare, precum și comportarea neliniară a conexiunilor flexibile de prindere a barelor în noduri. Modelul abordat presupune modelarea structurii utilizând un singur element/bară ceea ce reduce numărul gradelor de libertate utilizate în analiză și, implicit, timpul de calcul. Modelarea comportării elasto-plastice se face în baza conceptului de articulație plastică dezvoltând modelul propus în Chiorean (2009), cu respectarea criteriului de plastificare după formarea unei articulații plastice în cazul barelor cu secțiune variabilă și sub incidența efectelor locale menționate mai sus. Secțiunile se consideră a avea o comportare perfect plastică, după formarea unei articulații plastice; nu se ia în considerare descărcarea și nici reconsolidarea materialului. Încărcări uniforme distribuite pe bară pot fi incluse direct în analiză fără a fi necesară divizarea barei în mai multe elemente, zonele potențial plastice fiind considerate la capetele elementului precum și în lungul lui. Pentru simularea dezvoltării graduale a zonelor plastice, în formarea matricei de rigiditate este inclus modulul de elasticitate tangent  $E_t$ , conform formulării propuse de Zubydan (2010). Apoi este prezentat algoritmul de calcul, rezolvarea ecuațiilor de echilibru static făcându-se cu metoda simplă incrementală cu controlul soluției în forțele exterioare. Ulterior, pentru a verifica performanțele modelului de calcul propus și a aplicației software elaborate în acest scop, au fost prezentate câteva exemple numerice analizate de către alți autori iar rezultatele obținute evidențiază elocvent eficacitatea metodei de calcul propuse.

#### ***Capitolul 5. Exemple numerice pentru validarea și calibrarea programului de analiză neliniară pentru structurile în cadre.***

Scopul capitolului 5 este de a oferi suficiente rezultate care să confirme eficiența modelului de calcul propus și a aplicației software dezvoltate. Astfel, s-au efectuat analize pe structuri considerate standard, iar rezultatele au fost comparate cu cele obținute cu un program similar Mastan2 (McGuire, Gallagher, & Ziemian, 2000), un program de element finit Abaqus

(Hibbitt, 2011), și alte rezultate preluate din literatura de specialitate. Pentru calibrarea programului, s-au considerat atât elemente izolate cât și cadre plane sensibile în prezența diferitelor efecte neliniare luate în considerare. Toate analizele efectuate sunt statice neliniare, în domeniul elastic sau plastic, efectele pierderii stabilității locale, atât flambajul local, cât și flambajul din torsiune, au fost neglijate în analiză. Rezultatele numerice prezentate sunt relevante și confirmă performanța modelului de calcul și îl clasifică drept o metodă de analiză statică avansată pentru structurile în cadre plane din oțel.

### ***Capitolul 6. Concluzii, contribuții personale și direcții viitoare de cercetare***

Capitolul 6 prezintă concluziile generale, precum și contribuțiile originale ale cercetării întreprinse. Abordarea propusă în această lucrare, pentru analiza barelor și cadrelor cu secțiuni variabilă, dorește să elimine unele dintre neajunsurile metodelor existente, menționate în literatura de specialitate. Studiile numerice efectuate pentru evaluarea răspunsului neliniar al cadrelor plane din oțel, își propun să extindă nivelul cunoștințelor existente la ora actuală și să constituie, totodată, o bază de informații utilizabilă de către alți cercetători în demersul lor de calibrare a diferitelor aplicații care vizează comportarea neliniară a structurilor în cadre. Ulterior, sunt prezentate direcțiile viitoare de cercetare propuse.

La sfârșitul lucrării este prezentată bibliografia consultată de autor, precum și cele cinci anexe care conțin: Anexa A: funcțiile de stabilitate propuse de Oran (1973) și Chan & Gu (2000) pentru includerea efectului neliniarității geometrice locale în matricea de rigiditate; Anexa B: expresiile matricelor de rigiditate pentru o bară cu secțiuni plastificate, ținând cont de efectul forței axiale în lungul barei, deduse cu ajutorul programului Matlab 7.11; Anexa C: expresiile propuse de Zubyan (2010) pentru evaluarea coeficienților care intră în expresia matricei de rigiditate pentru considerarea plastificării graduale; Anexa D: descrierea metodele numerice de integrare Simpson 3/8, Gauss-Legendre, respectiv Gauss-Lobatto care se pot alege pentru evaluarea coeficienților de flexibilitate și Anexa E: coeficienții matricei de rigiditate pentru un element cu secțiune circulară variabilă obținută cu modelul propus și cei obținuți de Al-Sadder (2004).



## **Cap. 2 Metode de analiză elasto-plastică de ordinul al II-lea a structurilor în cadre – stadiu actual**

---

### **2.1 Conceptul de analiză avansată**

Metodele actuale de proiectare a structurilor, bazate pe verificarea capacității elementelor, sunt “limitate în ceea ce privește abilitatea lor de a reda comportamentul real al structurii și de a evalua capacitatea maximă de rezistență a întregului sistem structural redundant” (Liew, White, & Chen, 1993a). Din acest motiv, o preocupare (provocare) continuă a cercetătorilor din domeniu este de a facilita evaluarea rapidă, dar exactă, a răspunsului structurilor reale de mari dimensiuni în practica curentă de analiză și proiectare. În acest scop, în ultimele două decenii, s-a acordat o atenție deosebită analizei structurilor ca un ansamblu global, și nu a barelor ca elemente individuale. O metodă de analiză este considerată “avansată” dacă poate “descrie în mod satisfăcător rezistența, rigiditatea și stabilitatea globală a structurii, astfel încât verificarea individuală a fiecărui element component al structurii să nu mai fie necesară” (Chen W. , 1993) (Maleck, White, & Chen, 1995), (Li & Li, 2007), (Chiorean C. G., 2009). Pentru evaluarea cât mai aproape de realitate a răspunsului structurii, este necesară considerarea în analiză a efectelor neliniarității geometrice locale și globale, de material (considerarea interacțiunii eforturilor în plastificarea secțiunilor), a imperfecțiunilor geometrice inițiale, a tensiunilor reziduale, precum și a conexiunilor flexibile. Avantajul principal constă în eficacitatea procesului de analiză în proiectarea curentă, având în vedere că nu sunt necesare verificări suplimentare individuale ale barelor componente. De asemenea, mecanismul de cedare este surprins (fie prin pierderea stabilității locale sau globale sau epuizarea capacității portante) și detectarea pozițiilor și ordinii de formare a articulațiilor plastice (zone plastice) poate influența proiectarea elementelor structurale.

În literatura de specialitate sunt propuse numeroase modele analitice, pentru analiza inelastică de ordinul al II-lea a structurilor în cadre plane din oțel, și care pot fi clasificate, în funcție de complexitate, în două categorii: modelul articulațiilor plastice (plastificare concentrată), respectiv modelul zonelor plastice (plastificare distribuită), Fig. 2.1.

### **2.2 Metode de analiză bazate pe conceptul de articulație plastică**

Metodele bazate pe conceptul de articulație plastică presupun modelarea comportării elasto-plastice la nivel de secțiune prin plastificarea concentrată, în jurul combinațiilor de eforturi maxime. Modelul clasic presupune o schimbarea bruscă a rigidității în secțiunile transversale în care s-a depășit limita elastică, ceea ce nu reflectă, în totalitate, comportamentul real al elementului. Din acest motiv, în literatura de specialitate, au fost propuse diferite tehnici pentru rafinarea metodei prin luarea în considerare a efectului plastificării în lungul elementului prin modulul de elasticitate tangent  $E_t$  sau secant  $E_s$ , precum și pe înălțimea secțiunii transversale prin considerarea a două suprafețe de interacțiune, cele corespunzătoare inițierii curgerii respectiv plastificării totale și aplicarea unor relații liniare sau neliniare pentru considerarea degradării

rigidității elementelor (Powel & Chen, 1986), (Deierlein, Zhao, & McGuire, 1991), (Al-Mashary & Chen, 1991), (King, White, & Chen, 1991), (Leu & Tsou, 1998), (Kim, Kim, & Chen, 2000), (Kim & Choi, 2005), (Kim & Lee, 2011).

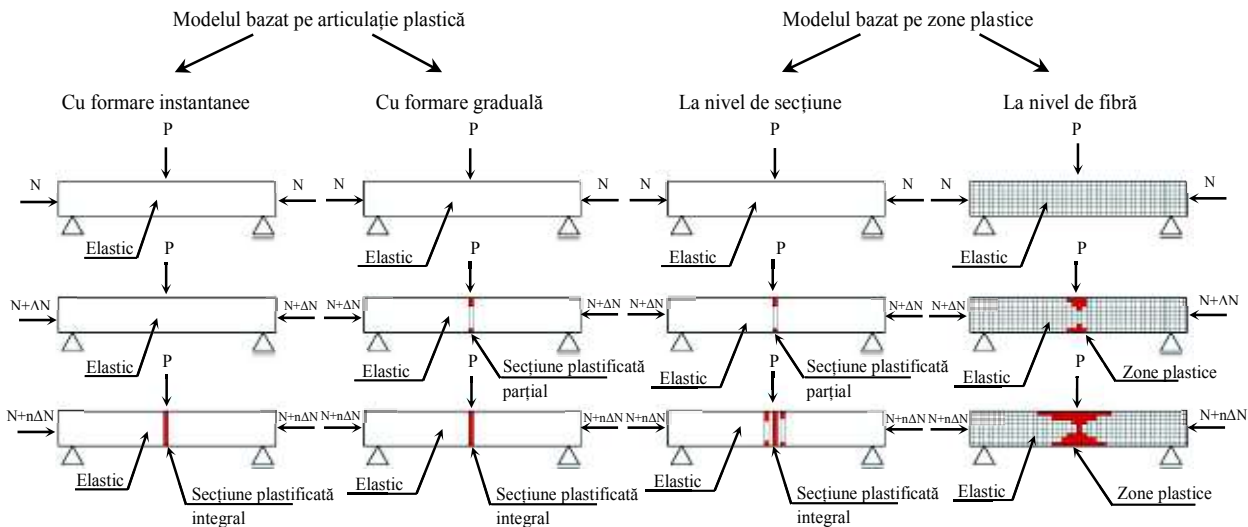


Fig. 2.1 Metode de analiză elasto-plastică a structurilor în cadre

Chiar dacă metoda bazată pe articulații plastice punctuale are tendința de a supraestima rezistența și stabilitatea elementelor (White & Chen, 1993), numeroare studii au aratat că rezultatele sunt satisfăcătoare (reprezentative) în comparație cu metoda considerată mai avansată, cea bazată pe conceptul de zone plastice, dar având un efort computațional mult mai mic.

### 2.2.1 Modelul articulațiilor plastice cu formare instantanee

În analiza cu articulații plastice concentrate (Heyman, 1957), (Porter & Powel, 1971) plastificarea secțiunii transversale are loc punctual și instantaneu, secțiunile de bară dintre articulațiile plastice rămân cu comportare integral elastică. Elementele structurii au o comportare perfect elastică, până la atingerea eforturilor ce produc plastificarea integrală a unei secțiuni (apariția articulației plastice) de la capetele elementului, secțiunile transversale ale elementelor au o comportare perfect plastică (nu se consideră reconsolidarea materialului) după apariția articulației plastice.

Metodele de analiză care au la bază conceptul de articulație plastică pot fi împărțite în două categorii:

- Analiza elasto-plastică de ordinul I
- Analiza elasto-plastică de ordinul al II-lea

#### *Analiza elasto-plastică de ordinul I*

Metoda presupune evaluarea răspunsului structurii în raport cu configurația inițială. Structura are o comportare liniar elastică până la plastificarea primei secțiuni, apoi, pe măsură ce

structura este încărcată incremental, odată cu apariția articulațiilor plastice, rigiditatea structurii se degradează. Cedarea structurii este caracterizată de identificarea unui mecanism plastic, când un număr suficient de articulații plastice sunt formate iar structura nu mai este capabilă să redistribuie eforturile (Chen, Goto, & Liew, 1996). Fenomenul de pierdere a stabilității nu poate fi surprins, datorită neglijării efectului neliniarității geometrice locale și globale ( $P-\delta, P-\Delta$ ). Secțiunile transversale ale barelor se consideră a avea o comportare perfect elastică până la atingerea momentului încovoietor plastic ce produce formarea articulației plastice punctuale și instantanee, restul elementului având o comportare elastică. După plastificarea integrală, momentul încovoietor “îngheață”, rigiditatea secțiunii se consideră zero și este permisă rotirea “infinită”. Acest model de analiză introduce o simplificare majoră în analiza structurilor datorită schimbării bruște a rigidității pe un segment de dimensiune 0, ceea ce nu redă comportamentul real.

### ***Analiza elasto-plastică de ordinul al II-lea***

În cazul structurilor înalte cu elemente zvelte, supuse la încărcări axiale și laterale, apariția colapsului structurii poate avea loc înainte de epuizarea capacității ultime de rezistență, datorită fenomenului de pierdere a stabilității (SSRC, 1988). Pentru a evalua cu mai multă precizie comportamentul real al structurii, ecuațiile de echilibru se scriu pe configurația deformată. Astfel, surprinderea fenomenelor de instabilitate globală, datorită apariției momentelor încovoietoare de ordinul al II-lea cauzate de acțiunea forței axiale de compresiune pe structura deformată, este posibilă (Goto & Chen, 1986). Efectul neliniarității geometrice locale este luat în considerare prin includerea funcțiilor de stabilitate în matricile de rigiditate ale elementelor care vor fi reactualizate în interiorul fiecărui pas de încărcare în funcție de coeficientul de compresiune (Chen & Lui, 1991).

Formarea articulațiilor plastice este guvernată de ecuațiile de interacțiune dintre forța axială și momentele încovoietoare corespunzătoare celor două axe principale de inerție ale secțiunii. Descărcarea și reconsolidarea materialului sunt neglijate în analiză. Astfel, după plastificarea unei secțiuni, comportarea articulației plastice respectă legea potențialului plastic sau legea de normalitate. Efectele forțelor tăietoare, respectiv ale momentelor de torsiune sunt neglijate în ecuațiile de interacțiune plastică (Duan & Chen, 1990), (ECCS, 1984), (Orbison, 1982).

Complexitatea surprinderii plastificării secțiunilor în metoda articulațiilor plastice constă în localizarea secțiunilor plastificate care pot fi la capetele elementului sau în lungul lui. O abordare propusă de Chen & Chan (1995) presupune depistarea formării articulațiilor plastice la capetele elementului sau/și la mijlocul lui, însă există combinații de încărcări care produc plastificarea în cuprinsul elementului, nu neapărat la mijloc. O tehnică îmbunătățită este strategia “Moving node” (Wong M. B., 1996), (Kim S. , Lee, Choi, & Kim, 2004) care poate localiza secțiunea în care s-a depășit limita elastică. Totuși, aceste metode implică nevoia de a împărți bara în mai multe elemente pentru a putea surprinde apariția articulației plastice ceea ce presupune un efort computațional mai mare datorită datelor ce trebuie memorate, ca urmare a reconfigurării geometriei structurii.

În 2009, Chiorean C.G. (2009) propune o metodă care presupune modelarea barelor structurii utilizând un singur element/ bară ceea ce reduce numărul gradelor de libertate utilizate

în metodă și timpul de calcul. Degradarea graduală a rigidității secțiunilor elementelor este luată în calcul prin utilizarea unor relații neliniare inelastice forță – deformație și apoi utilizând metoda flexibilității sunt dezvoltate matricea de rigiditate tangentă și vectorul forțelor nodale echivalente. O procedură este elaborată cu scopul de a satisface criteriul de plastificare în secțiunile complet plastificate, după formarea unei articulații plastice, funcționarea acesteia este guvernată de condiția de interacțiune plastică definită de curba de plastificare adoptată în calcul.

Mai recent, Liu și colab. (Liu, Liu, & Chan, 2014), propun un element finit liniar care este capabil să surprindă formarea articulației plastice în lungul elementului, fără a fi necesară divizarea barei. Comportarea articulației plastice este modelată introducând un spring în zonele potențial plastice, a cărui rigiditate scade gradual, pe măsură ce secțiunea se apropie de limita elastică. Matricea de rigiditate tangentă a elementului este dedusă prin derivarea de ordinul al II-lea a energiei potențiale de deformație. Efectul imperfecțiunilor geometrice inițiale este, de asemenea, inclus în modelul de analiză. Dezavantajul principal al metodei constă în introducerea unor grade de libertate suplimentare și necesitatea condensării matricei de rigiditate, ceea ce implică un efort computațional mai mare.

Cercetările realizate de Ziemian (1990) au arătat că metoda clasică bazată pe conceptul de articulație plastică poate fi clasificată ca o metodă avansată de analiză deoarece este capabilă să evalueze capacitatea ultimă de rezistență și stabilitate a sistemului structural și a elementelor componente cu suficientă acuratețe, comparativ cu metodele bazate pe dezvoltarea zonelor plastice. Totuși, pentru structurile sensibile la efectele dezvoltării zonelor plastice, studiile arată că această metodă supraestimează rigiditatea elementelor structurii și, ulterior, factorul ultim de încărcare (Liew & Chen, 1991), (Liew, White, & Chen, 1991), (White & Chen, 1990), printre alții. Prin urmare, s-a constatat necesitatea rafinării modelului iar în literatura de specialitate sunt prezentate câteva metode care vor fi descrise în subcapitolele ce urmează.

### **2.2.2 Modelul articulațiilor plastice cu formare graduală**

Unul din neajunsurile principale ale metodei clasice bazate pe conceptul de articulație plastică este faptul că plastificarea secțiunii transversale are loc instantaneu și punctual, ceea ce, evident, nu reflectă comportamentul real. Pentru a îmbunătăți acest model, numeroase tehnici au fost propuse pentru luarea în considerare a plastificării graduale pe înălțimea secțiunilor transversale și în volumul elementelor.

În ultimele două decenii, s-a acordat o atenție deosebită modului de surprindere a degradării graduale a rigidității în secțiunile în care s-a depășit limita elastică (Liew ș al., 1992), (White, Liew, & Chen, 1992), (King & Chen, 1994), (S.E. Kim ș al., 2000), (Al-Mashary & Chen, 1991), (King, White, & Chen, 1991), (Kim, 1996), (Kim & Chen, 1996), (Liew & Chen, 1991), (Liew, White, & Chen, 1993a), (Liew, White, & Chen, 1993b) și alții. În literatura de specialitate sunt propuse diferite tehnici pentru includerea plastificării graduale, prin considerarea a două suprafețe de interacțiune plastică N-M, cea corespunzătoare inițierii curgerii respectiv plastificării integrale a secțiunilor și utilizarea unor relații liniare (White s. al., 1992), parabolice (Liew ș al., 1992) sau neliniare deduse pe baza relațiilor M-N- $\Phi$  (King & Chen, 1994).

### 2.2.3 Modelul articulațiilor plastice bazat pe încărcări laterale fictive

O tehnică de îmbunătățire a metodei clasice bazate pe formarea articulațiilor plastice ar fi includerea în modelul de calcul a unor imperfecțiuni “artificiale” la nivel global. Metoda de analiza presupune aplicarea unor forțe laterale fictive cu scopul de a ține cont de efectele tensiunilor reziduale, imperfecțiunilor geometrice inițiale locale, precum și dezvoltarea zonelor plastice în lungul elementului.

Această abordare este propusă în (EN 1993-1-1) ca metodă de analiză avansată a structurilor în cadre. Cu anumite modificări, modelul de calcul a fost acceptat de European Convention for Construction Steelworks (ECCS, 1984), Standardele Canadiene (CSA, Limit States Design of Steel Structures, 1989), precum și Australiene (SA, 1998). Toma și Chen (1992) propun ca intensitate a forțelor laterale 0.5% din valoarea încărcărilor gravitaționale, pentru a evita supraestimarea capacității de rezistență a structurii. Avantajul principal al metodei este faptul că nu presupune modificarea modelului clasic bazat pe articulații plastice. Totuși, cercetările lui Liew (1992) arată că această metodă subestimează capacitatea ultimă de rezistență a unor structuri cu 20% și supraestimează capacitatea de rezistență cu 10% a unor elemente izolate supuse la încovoiere cu efort axial.

### 2.3 Metode bazate pe conceptul de zone plastice

În cazul structurilor metalice, dezvoltarea zonelor plastice pe înălțimea secțiunii transversale, precum și în lungul elementului, supus la încovoiere cu efort axial, este influențată și de efectele tensiunilor reziduale, precum și al imperfecțiunilor geometrice inițiale, care pot fi incluse în analiză, în mod simplificat, prin intermediul modului de elasticitate tangent  $E_t$  (Liew J. Y., 1992), (Chen & Kim, 1997). Acest model simplificat încearcă să grefeze pe modelele bazate pe conceptul de articulație plastică efectul formării graduale și extinderea zonelor plastice atât la nivel de secțiune, cât și la nivel de element (Al-Mashary & Chen, 1991), (1995), (King, White, & Chen, 1992), (Liew J. Y., 1992), (Ziemian, McGuire, & Deierlein, 1992a), (Ziemian, McGuire, & Deierlein, 1992b), (Kim & Lee, 2002), (Orbison, 1982), (Liew & Tang, 1998), (Kim, Kim, & Choi, 2001), (Kim & Choi, 2005)) și, astfel, metoda își păstrează simplitatea analizei, fără a supraestima rigiditatea structurii. Utilizarea modelului de elasticitate tangent  $E_t$  este eficientă în cazul elementelor supuse la încărcări axiale mari  $P > 0.5 P_y$ , însă acest model nu este suficient de precis în cazul elementelor supuse la momente încovoietoare semnificative cu forțe axiale mici (Chen & Kim, 1997).

Modele mai avansate care permit considerarea plastificării graduale atât pe înălțimea secțiunii transversale cât și în lungul elementului sunt dezvoltate în două direcții principale, și anume: metoda elementelor finite, bazată pe interpolarea deplasărilor, respectiv metoda flexibilităților, bazată pe interpolarea forțelor. Analiza bazată pe metoda elementelor finite (FEA) presupune împărțirea barei în mai multe elemente și discretizarea secțiunii transversale în fibre. Astfel, efectele imperfecțiunilor geometrice inițiale, mecanice, precum și comportarea neliniară a materialului pot fi incluse în mod explicit în modelul de analiză iar starea de tensiune și deformație poate fi monitorizată în fiecare “element finit” în orice pas al analizei. Chiar dacă această metodă este foarte precisă și este considerată a fi “soluția exactă”, implică un efort

compuțational mare din moment ce este nevoie de o discretizare fină a secțiunii transversale și în lungul elementului. A doua metodă menționată presupune tratarea barelor ca elemente liniare unidimensionale iar comportarea elasto-plastică este modelată fie la nivel de fibră, ca și în metoda elementelor finite, fie direct la nivel de secțiune prin utilizarea relațiilor neliniare, analitice sau cvasianalitice  $M-N-\Phi$  (Wright & Gaylord, 1968), (Lui & Chen, 1987). Dezavantajul acestei abordări rezidă în faptul că efectul local al neliniarității geometrice este complicat de surprins în formularea directă, totuși avantajul principal constă în faptul că în absența efectelor locale ale neliniarității geometrice permite modelarea plastificării distribuite în lungul barelor structurii printr-un singur element.

### 2.3.1 Metoda elementelor finite

Originile *metodei elementului finit* datează de la începutul anilor '50 când a fost abordată, pentru prima dată, pentru identificarea unor soluții aproximative la calculul aeronavelor Boeing (Turner, Clough, Martin, & Topp, 1956). Primul care folosește termenul de element finit este Clough (1960) când, în lucrarea sa, descrie un procedeu pentru tratarea problemelor discrete bazat pe divizarea geometriei continue într-un număr finit de segmente, având comportarea definită de un număr finit de parametri, și obținerea unei soluții aproximative pentru problema inițială. Între anii '60 - '70 sunt create bazele matematice ale elementului finit, prin apariția unor lucrări de specialitate de referință (Fraeijs de Veubeke, 1965), (Zienkiewicz & Cheung, 1967), (Strang & Fix, 1973), (Zienkiewicz, 1977), (Ciarlet, 1978). Odată cu dezvoltarea tehnologiei pe calculator, formulările matematice au fost utilizate pentru dezvoltarea unor softuri comerciale cum sunt NASTRAN (1968), ANSYS (1970), ADINA (1986), ABAQUS (1978).

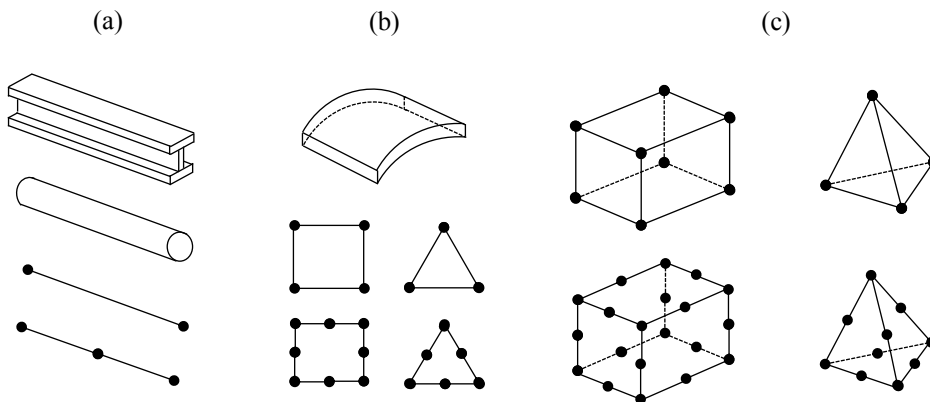


Fig. 2.2 Tipuri de elemente finite: (a) unidimensionale ("beam"), (b) bidimensionale ("shell"), (c) solide ("brick")

Metoda presupune înlocuirea geometriei modelului cu o rețea de elemente finite, operație numită discretizare, și, apoi, alegerea unui model matematic care să reflecte comportarea fenomenului fizic. Dificultatea procedurii constă în alegerea tipului elementului finit astfel încât ecuațiile de echilibru și compatibilitate la contactul dintre elemente să fie satisfăcute. În literatura de specialitate sunt menționate trei categorii de elemente finite, și anume: elemente unidimensionale ("beam"), bidimensionale ("shell") și tridimensionale (solide) care pot fi

clasificate, la rândul lor, în funcție de ordinul de interpolare (numărul de noduri), în elemente liniare, parabolice sau cubice. În Fig. 2.2 se pot vizualiza câteva tipuri de elemente finite.

Principalul avantaj al *metodei elementului finit* este că permite studiul fenomenelor fizice foarte complexe, însă este important de subliniat că nu poate oferi mai multe informații decât cele care sunt furnizate de modelul matematic ales pentru problema inițială (Bathe K.-J. , 1996). Chiar dacă MEF este una dintre cele mai populare metode utilizate pentru evaluarea cât mai fidelă a comportamentului real al structurilor, în cazul analizelor neliniare a cadrelor presupune un efort computațional ridicat datorită necesității unei discretizări rafinate, din acest motiv este utilizată, în mare parte, în scopuri educaționale sau în cercetare.

### 2.3.2 Modelul articulațiilor plastice rafinate

În cazul structurilor în cadre, barele pot fi modelate ca elemente liniare unidimensionale. În literatura de specialitate sunt menționate diferite abordări care presupun divizarea elementelor componente ale structurii într-un anumit număr de elemente și exprimarea condițiilor de compatibilitate a deformatelor și de echilibru static bazându-se pe relațiile analitice neliniare M-N- $\Phi$  la capete (Wright & Gaylord, 1968), (Lui & Chen, 1987), (Attalla, Deierlein, & McGuire, 1994).

Un model, mai eficient din punct de vedere computațional, este abordat în literatură, (Chiorean & Barsan, 2005), (Chiorean C. G., 2009) care presupune utilizarea unui singur element pe bară și generarea unor puncte de integrare în lungul lui, în care este monitorizată comportarea elasto-plastică utilizând relații neliniare forță-deformație calibrate numeric. Astfel, efectul plastificării graduale în lungul elementului este luat în considerare prin variația rigidității  $EI(x)$ , în funcție de momentul încovoietor  $M(x)$ , care este evaluat la fiecare pas incremental. Apoi, integrând pe lungimea elementului, se exprimă coeficienții de flexibilitate pentru întreaga bară și, prin inversare, se determină matricea de rigiditate. Alternativ, pentru rafinarea și creșterea exactității evaluării caracteristicilor de rigiditate secționale în domeniul elasto-plastic, Chiorean (2001) propune un proces iterativ de echilibrare între forțele exterioare și interioare, în diferite secțiuni transversale de monitorizare în lungul barelor, și care presupune modelarea inelasticității la nivel de fibră, în punctele de integrare, prin utilizarea relațiilor constitutive neliniare  $\sigma$ - $\epsilon$ .

O abordare mai recentă a fost propusă de Zubydan, pentru considerarea plastificării graduale a elementelor solificate la compresiune sau încovoiere uniaxială cu compresiune în planul de încovoiere maxim (2010) sau minim (2011) și, mai recent, în cazul structurilor spațiale (2013). Metoda presupune “corectarea” eforturilor secționale, considerând o variație liniară în interiorul unui pas de încărcare, și evaluarea modulului de elasticitate tangent  $E_t$  sau secant  $E_s$  în funcție de starea de solitare, utilizând relații empirice validate prin calibrări numerice.

## 2.4 Surse de neliniaritate

Având în vedere că, în realitate, nicio structură nu se comportă liniar, peste un anumit nivel de solitare, sub acțiunea forțelor exterioare, includerea în analiză a fenomenelor care produc răspunsul neliniar al structurii este esențială pentru evaluarea corectă a capacității ultime de rezistență. Efectele care influențează răspunsul structurii provin din două surse principale, și

anume: neliniaritatea geometrică (ca urmare a modificării configurației geometrice a structurii), respectiv neliniaritatea de material (ca urmare a relațiilor constitutive neliniare tensiune-deformație). Aceste aspecte a preocupat, în mod intens, cercetătorii din domeniu, având în vedere dezvoltarea spectaculoasă a structurilor din oțel și necesitatea obținerii unui răspuns al acestora cât mai corect. Astfel, de-alungul anilor, diferite abordări matematice au fost propuse, care vor fi prezentate în cele ce urmează.

### **2.4.1 Neliniaritatea de material**

În cazul structurilor cu comportare în domeniul elastic, relația tensiune-deformație este una liniară și este caracterizată prin modulul de elasticitate  $E$ . În realitate, însă, ca urmare a creșterii nivelului de solicitare, această ipoteză nu mai este valabilă și, prin urmare, abordarea unor probleme neliniare ale analizei structurilor nu mai poate fi evitată. Neliniaritatea fizică apare ca urmare a producerii deformațiilor plastice și se consideră în analiză prin modificarea parametrilor curbei caracteristice a materialului. Neliniaritatea de material se manifestă la nivel de fibră (prin intermediul relației  $\varepsilon$ - $\sigma$ ), la nivel de secțiune (prin intermediul relației  $M$ - $\Phi$ ), la nivel de element (prin plastificarea locală a secțiunilor și a dezvoltării zonelor plastice în lungul barei) și la nivel de structură.

#### **2.4.1.1 Criteriul de plastificare**

Surprinderea efectului neliniarității de material asupra răspunsului global al structurii este un proces deosebit de complex. În literatura de specialitate sunt propuse diferite metode de analiză care surprind acest fenomen, ele fiind clasificate, în funcție de precizia analizei, în două categorii: modelul articulațiilor plastice (plastificarea unei secțiuni), respectiv modelul zonelor plastice (plastificare distribuită).

Modelul bazat pe conceptul de articulație plastică presupune plastificarea materialului doar în secțiunile de bară maxim solicitate (la capetele elementului sau în lungul lui). Formarea articulației plastice este guvernată de un criteriu de plastificare și presupune depășirea deformației ultime admise într-un anumit punct al secțiunii transversale la un anumit nivel de solicitare exterioară ( $N$ ,  $M$ ). Chiar dacă, în cazul secțiunilor metalice, este posibilă determinarea unor relații exacte pentru definirea suprafețelor de interacțiune plastică (Chen & Atsuta, 1976), majoritatea metodelor de analiză care au la bază conceptul de articulație plastică se bazează pe relații de interacțiune simplificate, între forța axială și momentul încovoietor; efectele forței tăietoare și al momentului de torsiune fiind neglijate. Drept consecință, condiția de plastificare poate fi exprimată cu următoarea relație:

$$\Gamma(N, M) = 0 \quad (2.1)$$



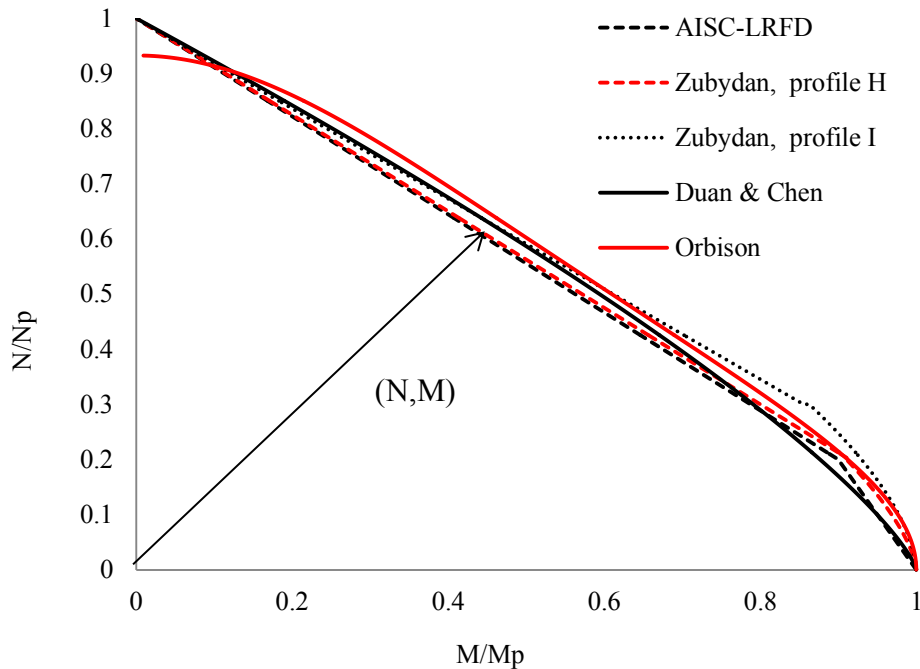


Fig. 2.3 Criterii de plastificare pentru profile metalice, pentru structuri plane

Astfel, dacă avem o stare de solicitare definită de combinația de eforturi ( $N$ ,  $M$ ), aceasta poate fi vizualizată ca un vector care pleacă din originea axelor iar vârful săgeții caracterizează starea secțiunii. Dacă vârful vectorului se află în interiorul acestei curbe atunci secțiunea se comportă perfect elastic, în baza ipotezei articulațiilor plastice punctuale și cu formare instantanee; când vârful vectorului se află pe această curbă condiția (2.1) este îndeplinită și presupune plastificarea secțiunii (Chiorean C. G., 2006). Odată formată articulația plastică, aceasta începe să funcționeze după legea de normalitate (Massonet, s.al., 1972) impunând o corelație între eforturi astfel încât să se mențină poziția vârfului săgeții pe curbă. O stare de eforturi caracterizată de un vector al cărui extremități depășește curba de interacțiune plastică nu este posibilă. În literatura de specialitate sunt propuse diferite relații analitice pentru definirea suprafețelor de plastificare (Fig. 2.3).

#### 2.4.1.2 Plastificare graduală

Pentru a surprinde efectul plastificării distribuite, Zubydan (2010) propune un model de calcul care presupune determinarea matricei de rigiditate tangentă sau secantă a unui element supus la compresiune axială sau învoiere uniaxială cu compresiune, utilizând relații empirice. Metoda propusă poate lua sau nu în considerare efectul tensiunilor reziduale conform ECCS, Fig. 2.4.

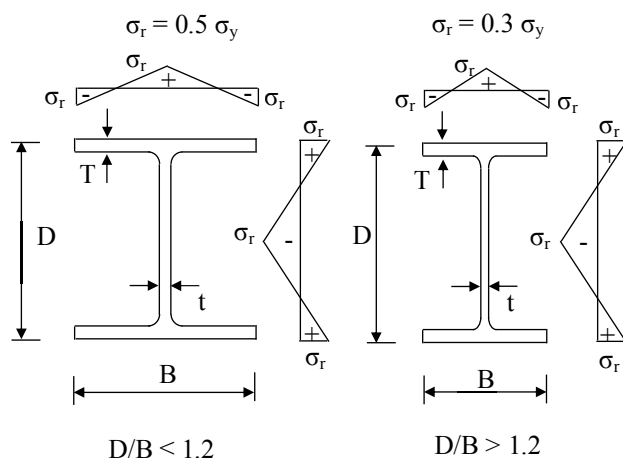


Fig. 2.4 Distribuția tensiunilor reziduale conform ECCS (Zubydan, 2010)

Pentru a determina starea de solicitare într-o secțiune transversală din oțel, Zubydan propune două curbe de interacțiune plastică, pentru profile I, respectiv H și care sunt exprimate de următoarele relații:

- Pentru profile H

$$N_r + \frac{7}{8}M_r = 1 \quad \text{pentru } N_r \geq 0.2$$

$$N_r^{1.5} + M_r = 1 \quad \text{pentru } N_r < 0.2$$

- Pentru profile I

$$N_r + \frac{9}{11}M_r = 1 \quad \text{pentru } N_r \geq 0.3$$

$$N_r^{1.65} + M_r = 1 \quad \text{pentru } N_r < 0.3$$

(2.2)

Unde  $N_r = \frac{N}{N_p}$  și  $M_r = \frac{M}{M_p}$ ,  $N$ , respectiv  $M$  sunt eforturile secționale iar  $N_p$  și  $M_p$  sunt forța axială de compresiune plastică (calculată în absența momentului încovoietor) și momentul de încovoiere plastic (în absența forței axiale) și care pot fi vizualizate, comparativ cu alte curbe de plastificare din literatură, în Fig. 2.3.

În continuare, în (Zubydan, 2010), sunt propuse relații empirice care exprimă modulul de elasticitate tangent într-o formă adimensională, Fig. 2.5 (a), pentru secțiuni transversale supuse la compresiune axială pură:

$$E_{tr} = 1 \quad \text{pentru } N_r \leq N_{r0}$$

$$E_{tr} = \left[ 1 - \left( \frac{N_r - N_{r0}}{1 - N_{r0}} \right) \right]^{1/2} \quad \text{pentru } N_r > N_{r0} \quad (2.3)$$

Unde  $N_r = \frac{N}{N_p}$ ,  $N_{r0} = 1 - \frac{\sigma_r}{\sigma_y}$ ,  $\sigma_y$  este tensiunea de curgere și  $\sigma_r$  este tensiunea reziduală considerată, în funcție de tipul profilului, și care se poate vizualiza în Fig. 2.4.

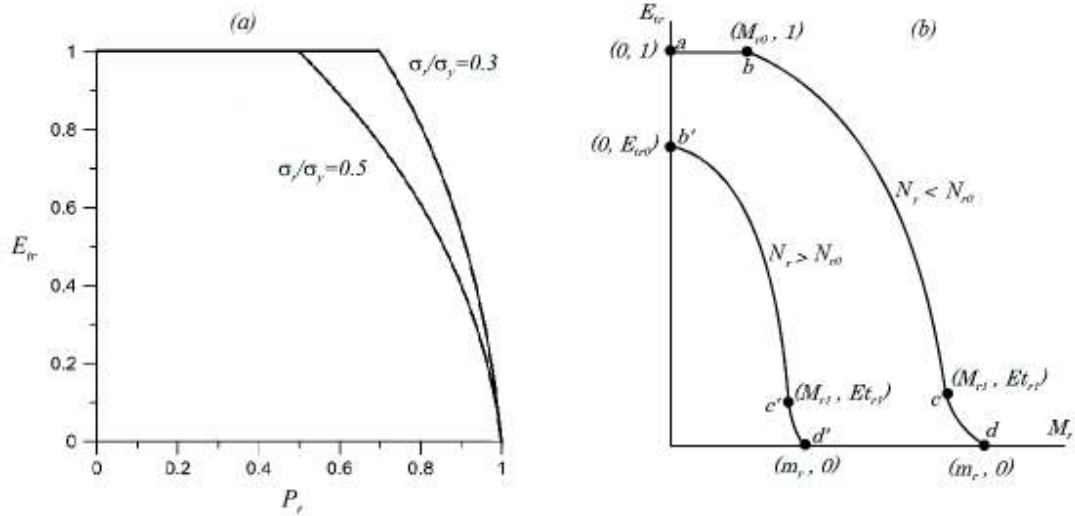


Fig. 2.5 Degradarea modului de elasticitate tangent  $E_t$ , în funcție de solicitări (Zubydan, 2010)

Pentru secțiunile solicitate la încovoiere cu compresiune axială, A.H. Zubydan propune relații empirice, Fig. 2.5 (b), pentru determinarea modului de elasticitate tangent adimensional, în funcție de mărimea forței axiale:

Pentru  $N_r \leq N_{r0}$

$E_{tr} = 1$  pentru  $M_r \leq M_{r0}$

$$E_{tr} = (1 - E_{tr1}) \left[ 1 - \left( \frac{M_r - M_{r0}}{M_{r1} - M_{r0}} \right)^{r_1} \right]^{1/r_2} + E_{tr1} \text{ pentru } M_{r0} < M_r \leq M_{r1} \quad (2.4)$$

$$E_{tr} = E_{tr1} \left[ 1 - \left( \frac{M_r - M_{r1}}{m_r - M_{r1}} \right)^{1/r_3} \right] \text{ pentru } M_{r1} < M_r \leq m_r$$

Pentru  $N_r > N_{r0}$

$$E_{tr} = (E_{tr0} - E_{tr1}) \left[ 1 - \left( \frac{M_r}{M_{r1}} \right)^{r_1} \right]^{1/r_2} + E_{tr1} \text{ pentru } M_{r0} < M_r \leq M_{r1} \quad (2.5)$$

$$E_{tr} = E_{tr1} \left[ 1 - \left( \frac{M_r - M_{r1}}{m_r - M_{r1}} \right)^{1/r_3} \right] \text{ pentru } M_{r1} < M_r \leq m_r$$

Unde  $N_r = \frac{N}{N_p}$ ,  $N_{r0} = 1 - \frac{\sigma_r}{\sigma_y}$ ,  $M_r = \frac{M}{M_p}$ ,  $M_{r0} = \frac{(N_{r0} - N)W_{el}}{W_{pl}}$ ,  $m_r$  este raportul  $\frac{M}{M_p}$  determinat din rezolvarea ecuației de interacțiune plastică,  $W_{el}$  și  $W_{pl}$  sunt modulul elastic, respectiv plastic de rezistență. Constantele  $r_1, r_2, r_3$  sunt funcții de tipul secțiunii transversale și de forța axială de compresiune. Coeficienții  $E_{tr1}, M_{r1}, r_1, r_2, r_3$  sunt propuși de (Zubydan, 2010) iar expresiile lor sunt detaliate în Anexa C.

Astfel, într-un pas curent, eforturile secționale se pot exprima:

$$\begin{aligned} M'_{j+1} &= M_j + d\varphi E_{trj} EI \\ N'_{j+1} &= N_j + d\varepsilon E_{trj} EA \end{aligned} \quad (2.6)$$

Unde coeficientul 'j+1' se referă la pasul curent iar 'j' la pasul anterior; E este modulul de elasticitate inițial, A, I sunt aria, respectiv momentul de inerție al secțiunii transversale;  $E_{trj}$  este modulul de elasticitate adimensional la pasul 'j' care poate fi calculat conform Eq. (2.5).

## 2.4.2 Neliniaritatea geometrică

Structurile dezvoltă un comportament geometric neliniar, ca urmare a acțiunii forțelor exterioare. Considerarea în calcul a deplasărilor și rotirilor de mărimi finite este foarte importantă deoarece modificarea configurației geometrice a structurii afectează rigiditatea globală iar mecanismul de cedare este dezvoltat ca urmare a pierderii stabilității structurii, și nu din epuizarea capacității portante. Prin urmare, pentru determinarea curbei reale de comportare a structurii, încărcările exterioare nu pot fi aplicate într-un singur pas, iar răspunsul neliniar trebuie determinat printr-un proces incremental. După cum a mai fost menționat, neliniaritatea geometrică se manifestă atât local (P- $\delta$ ), la nivel de element, cât și global (P- $\Delta$ ), la nivelul întregii structuri, Fig. 2.6. Neliniaritatea geometrică locală se manifestă la nivel de element, ca urmare a acțiunii forțelor axiale pe forma deformată a barei; iar neliniaritatea geometrică globală apare la nivel de structură și influențează rigiditatea laterală a structurii, ca urmare a modificării configurației geometrice a nodurilor structurii.

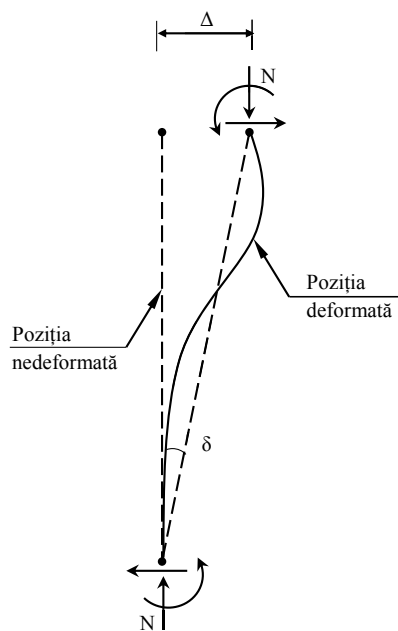


Fig. 2.6 Efectul P- $\Delta$  și P- $\delta$

### 2.4.2.1 Efectul forțelor axiale asupra rigidității la încovoiere a barelor

Neliniaritatea geometrică locală se manifestă la nivel de element și are ca efect o flexibilizare a barelor comprimate (Chiorean C. G., 2006). Efectul P- $\delta$  devine semnificativ în cazul structurilor cu deplasări mari sau elemente de bară zvelte puternic comprimate. Powell (2006) propune o metodă simplificată pentru considerarea acestui efect și anume subdivizarea barei în mai multe elemente, transformând, astfel, efectul P- $\delta$  în P- $\Delta$ . Însă, această tehnică presupune un efort computațional ridicat, cu cât numărul segmentelor/bară este mai mare. O altă

tehnică abordată de diferiți cercetători, în rezolvare ecuațiilor de echilibru, este cea propusă de Livesley & Chandler (1956) definind așa numitele funcții de stabilitate (Ecuția 2.7) care intră în expresia coeficienților matricii de rigiditate a elementului, și care sunt actualizate la fiecare pas de încărcare în funcție de nivelul forței axiale din bară.

$$c_1 = \begin{cases} \frac{v \sin(v) - v^2 \cos(v)}{2 - 2 \cos(v) - v \sin(v)} & \text{pentru } N < 0 \\ \frac{v^2 \cosh(v) - v \sinh(v)}{2 - 2 \cos(v) + v \sin(v)} & \text{pentru } N > 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

$$c_2 = \begin{cases} \frac{v^2 - v \sin(v)}{2 - 2 \cos(v) - v \sin(v)} & \text{pentru } N < 0 \\ \frac{v \sinh(v) - v^2}{2 - 2 \cos(v) + v \sin(v)} & \text{pentru } N > 0 \end{cases}$$

unde  $v^2 = L^2 \frac{N}{EI}$  iar N este considerat pozitiv pentru compresiune.

Soluțiile numerice obținute cu ecuațiile (2.7) sunt nedeterminate când forța axială este egală cu 0. Pentru a rezolva această problemă Lui și Chen (1986) au propus un set de expresii pentru a aproxima funcțiile de stabilitate cand coeficientul de compresiune se afla între  $-2.0 \leq v \leq 2.0$ .

$$c_1 = 4 + \frac{2\pi^2 q}{15} - \frac{(0.01 q + 0.543) q^2}{4 + q} - \frac{(0.004 q + 0.285) q^2}{8.183 + q}$$

$$c_2 = 2 - \frac{\pi^2 q}{30} + \frac{(0.01 q + 0.543) q^2}{4 + q} - \frac{(0.004 q + 0.285) q^2}{8.183 + q} \quad (2.8)$$

$$\text{unde } q = \frac{N}{N_{Euler}} = \frac{N}{\frac{\pi^2 EI}{L^2}} = \frac{v^2}{\pi^2}.$$

Ecuțiile (2.8) pot fi aplicate pentru elemente aflate în tensiune ( N pozitiv) sau compresiune ( N negativ). Alte forme de exprimare a funcțiilor de stabilitate pot fi găsite în (Barsan G. , 1978).

#### 2.4.2.2 Efectul global al neliniarității geometrice

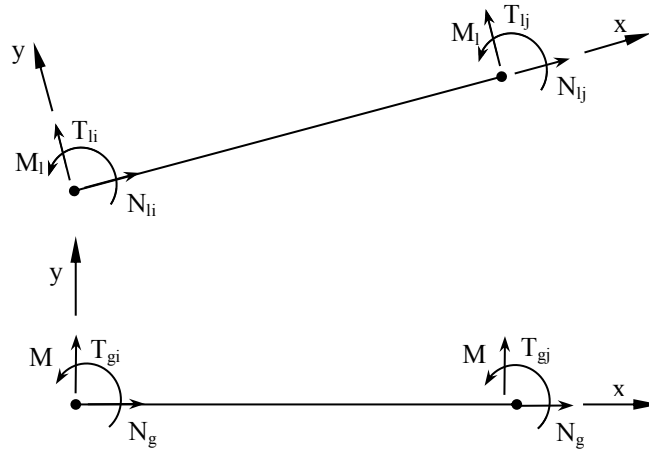
Modificarea configurației geometrice a structurii induce tensiuni suplimentare în elemente și poate afecta stabilitatea globală. Având în vedere că poziția nodurilor structurii se schimbă la fiecare pas incremental, evaluarea corectă a matricilor de rigiditate a elementelor, precum și a forțelor neechilibrate sunt esențiale pentru determinarea răspunsului real al structurii. Monitorizarea poziției structurii deformată poate deveni un proces dificil datorită datelor care trebuiesc memorate, însă, odată cu dezvoltarea tehnologiei pe calculator, includerea efectelor neliniarității geometrice globale într-un program de calcul nu mai reprezintă o problemă. Una din tehnicile cele mai cunoscute pentru considerarea efectului P-Δ este formularea Lagrangiană, totală sau actualizată. În cazul formulării Lagrangiene totale, deplasările elementelor se calculează în raport cu configurația nedeformată a structurii, care rămâne fixă pe toată durata analizei. Această metodă este ușor de utilizat, însă se poate aplica în cazul

deplasărilor și rotațiilor mici, nefiind capabilă să separe deplasările naturale ale elementului de cele de corp rigid (Wong & Tin-Loi, 1990). Formularea Lagrangienă actualizată consideră ca sistem de referință, pentru calcularea forțelor interioare și a deplasărilor incrementale, ultima configurație de echilibru geometrică a structurii. Prin urmare, la rezolvarea ecuațiilor de echilibru forțele exterioare, care acționează pe element, se rotesc urmărind rotațiile de corp rigid în timp ce valoarea lor rămâne neschimbată. (Yang, s.al., 2003).

Includerea în analiză a efectului neliniarității geometrice globale se poate face prin două metode astfel: translatarea matricei de rigiditate exprimată în deformațiile barei, în funcție de deplasările nodale printr-o transformare neliniară sau prin reactualizarea la fiecare etapă de calcul a matricei de rotație și exprimarea explicită a condițiilor de echilibru (Chiorean C. G., 2006).

### *Reactualizarea configurației geometrice a structurii*

Transformarea matricei de rigiditate din sistemul local în sistemul global de coordonate se face prin intermediul matricelor de transformare, (Ecuația 2.9), care conține cosinuzii directori ai axelor reperului local în raport cu axele sistemului global de referință. Reactualizarea configurației de echilibru, în timpul procesului de calcul, presupune recalcularea cosinuzilor directori, respectiv a lungimilor barelor. Astfel, matricea de rotație va fi actualizată la fiecare pas de încărcare iar ecuațiile de echilibru vor fi exprimate pe forma deformată a structurii.



*Fig. 2.7 Efectul global al neliniarității geometrice*

$$R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

### Matricea de rigiditate geometrică

În calculul elastic geometric nelinier, teoria deplasărilor mici nu mai poate fi aplicată. În funcție de nivelul de intensitate al forțelor exterioare, ca urmare a deformării elementelor, structura dezvoltă deplasări și rotiri mari; prin urmare tratarea efectului neliniarității geometrice globale este de maximă importanță. Pentru a se putea determina răspunsul real al structurii, trebuie impuse condițiile de echilibru între încărcările exterioare care acționează pe structură și forțele interne. Astfel, evaluarea corectă a deplasărilor incrementale și, implicit, a forțelor interne din nodurile elementelor finite, corespunzătoare noii stări de deformație a structurii, este esențială. Dacă răspunsul structurii este monitorizat utilizând o metodă incremental-iterativă, în interiorul unui pas de încărcare se efectuează un număr necesar de iterații până la satisfacerea unui criteriu de convergență, respectiv la disiparea integrală a forțelor neechilibrate. Însă, dacă se optează pentru o metodă simplu incrementală, în interiorul unui pas de încărcare, forțele neechilibrate pe structură nu sunt integral disipate iar valoarea cumulată a acestora nu mai poate fi neglijată deoarece va estima greșit capacitatea ultimă de rezistență a structurii. În acest caz, în literatura de specialitate, se recomandă utilizarea matricei de rigiditate geometrică care introduce eforturi suplimentare (forțe axiale Ecuația 2.10 sau forțe axiale și tăietoare Ecuația 2.11), ca urmare a deplasării laterale a structurii.

$$k_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{P}{L} & 0 & 0 & \frac{P}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{P}{L} & 0 & 0 & \frac{P}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{P}{L} & 0 & 0 & -\frac{P}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$k_D = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{M_i + M_j}{L^2} & 0 & 0 & \frac{M_i + M_j}{L^2} & 0 \\ \frac{M_i + M_j}{L^2} & \frac{P}{L} & 0 & \frac{M_i + M_j}{L^2} & \frac{P}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{P}{L} & 0 & 0 & \frac{P}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M_i + M_j}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{M_i + M_j}{L^2} & 0 \\ \frac{M_i + M_j}{L^2} & \frac{P}{L} & 0 & -\frac{M_i + M_j}{L^2} & \frac{P}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

#### 2.4.3 Efectul imperfecțiunilor geometrice inițiale

Indiferent de calitatea controlului la fabricație și montaj, structurile metalice dezvoltă anumite tipuri de imperfecțiuni care induc efecte secundare în comportamentul structurilor. Primul cercetător care a studiat acest subiect a fost Koiter (1945) care a realizat că, tocmai prezența acestor mici imperfecțiuni geometrice inițiale cauzează diferențele mari între rezultatele teoretice și experimentale. În consecință, imperfecțiunile geometrice inițiale afectează stabilitatea structurii și pot produce colapsul prematur (Galambos T. V., 1988), (Bažant & Cedolin, 2010).

În literatura de specialitate sunt menționate numeroase metode care tratează efectul imperfecțiunilor geometrice inițiale (McNamee & Lu, 1972) , (Adman & Afra, 2007), (Kim & Chen, 1996), (Gu & Chan, 2005), (Buonopane, 2008), (Liew, White, & Chen, 1994) și alții; acestea fiind clasificate în două categorii: imperfecțiuni geometrice la nivelul elementelor structurale și imperfecțiuni generate de operațiunile de montaj, adică imperfecțiunile geometrice globale.

Imperfecțiunile geometrice locale apar la nivel de element și se manifestă prin abaterea de la rectiliniaritate, în urma procesului de fabricație. Pentru elementele puternic comprimate, în special, procesul de deformare și, ulterior, plastificare, în starea încărcată cu forțe exterioare va fi mai accelerat, având în vedere că elementul este încovoiat în starea inițială. În consecință, neglijarea lor în modelul de analiză poate duce la o scădere semnificativă a rigidității elementului și, implicit, a capacității ultime de rezistență.

Datorită toleranțelor de execuție sau a metodelor de asamblare a elementelor, poziționarea perfect verticală a stâlpilor pe șantier nu va fi niciodată posibilă. Aceste imperfecțiuni induc un moment încovoietor suplimentar în elementele verticale, efect cunoscut sub numele de  $P-\Delta$ , și care afectează stabilitatea structurii, în special cele puternic comprimate și solicitate la forțe laterale. Bridge (1998) recomandă considerarea în analiză a două tipuri de imperfecțiuni geometrice globale și anume: neverticalitatea uniformă a elementelor la nivel de structură, respectiv neverticalitatea stâlpilor la un nivel considerat “critic”, Fig. 2.9.

Combinarea celor două efecte, cel local și global, este un aspect abordat de Alvarenga & Silveira în două lucrări (2009a), (2009b) și care menționează importanța ordinii includerii în analiză a celor două efecte, Fig. 2.8. Alvarenga & Silveira recomandă considerarea efectului imperfecțiunilor geometrice inițiale locale în primă fază, având în vedere că aceste apar în timpul procesului de fabricație; iar apoi includerea efectului global care apare în timpul procesului de asamblare. În caz contrar amplitudinea maximă nu este la mijlocul elementului deoarece se rotește cu unghiul  $\Delta_0/L$ .

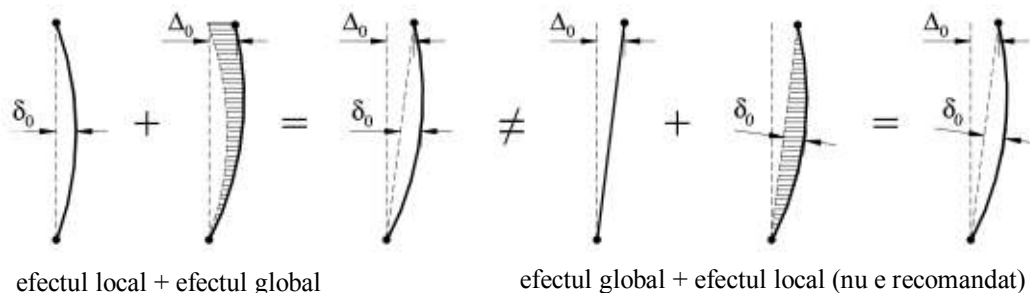


Fig. 2.8 Combinarea efectului imperfecțiunilor locale și globale (Alvarenga & Silveira, 2009b)

Pentru considerarea efectului imperfecțiunilor geometrice inițiale în analiză, în literatura de specialitate sunt abordate diferite metode, dintre care cele mai utilizate sunt: modelarea explicită, modelarea deterministică, considerarea unui sistem virtual de forțe laterale sau includerea modului de elasticitate tangent  $E_t$  în matricea de rigiditate a elementului.



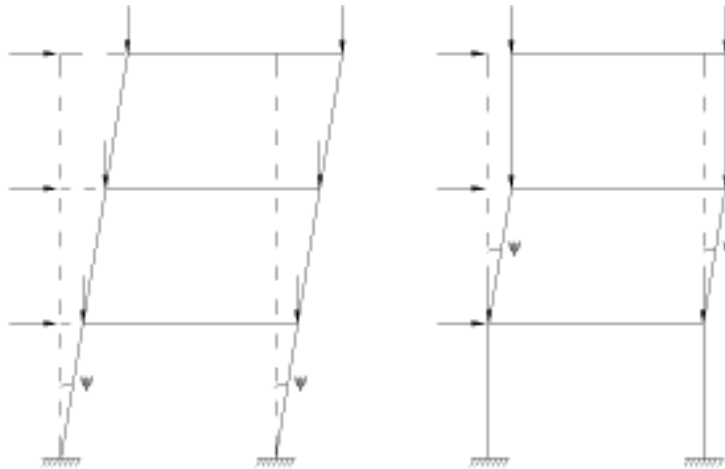


Fig. 2.9 Imperfecțiuni geometrice la nivel de structură

Maleck (2001) efectuează studii parametrice, utilizând cele trei metode, pentru evaluarea efectului neverticalității stâlpilor asupra comportamentului structurii și concluzionează faptul că modelarea imperfecțiunilor geometrice globale utilizând modulul de elasticitate tangent supraestimează capacitatea ultimă de rezistență a structurii.

#### 2.4.3.1 *Includerea explicită a imperfecțiunilor geometrice inițiale*

Metoda elementelor finite este una dintre cele mai frecvente metode utilizate pentru modelarea cât mai fidelă a structurilor. Geometria barei este înlocuită cu o rețea de elemente finite care reflectă cât mai exact forma reală. Modelarea imperfecțiunilor geometrice inițiale presupune actualizarea poziției nodurilor elementelor finite, conform configurației “imperfecțe” ale barelor. Această metodă este practică dacă se cunoaște forma deformată a elementelor. În caz contrar, este necesară efectuarea unor studii probabilistice pentru determinarea celei mai defavorabile configurații. Crearea unei subrutine care să genereze diferite distribuții și valori ale imperfecțiunilor inițiale ar facilita surprinderea situației cea mai defavorabilă, însă majoritatea programelor comerciale de analiză structurală nu oferă accesul la cod.

#### 2.4.3.2 *Modelarea deterministă a imperfecțiunilor geometrice inițiale*

Imperfecțiunile geometrice inițiale au o formă aleatoare în realitate (McNamee & Lu, 1972). De aceea, includerea în analiză a formei și sensului imperfecțiunilor geometrice trebuie să conducă la efectele cele mai defavorabile pentru structură. Altfel, considerând direcția greșită ar avea un efect favorabil asupra rigidității elementelor la încovoiere, vezi Fig. 2.10.

Normativele de proiectare (ECCS, SA, CSA) recomandă considerarea imperfecțiunilor geometrice locale, ca formă cea mai defavorabilă, cea parabolică având o amplitudine maximă la mijlocul elementului, însă nu se găsesc prescripții privind includerea acestora într-un model de analiză. În literatura de specialitate se găsesc diferite tehnici pentru considerarea formei sinusoidale în ecuațiile de echilibru (Kim & Chen, 1996), (Gu & Chan, 2005), (Buonopane, 2008).

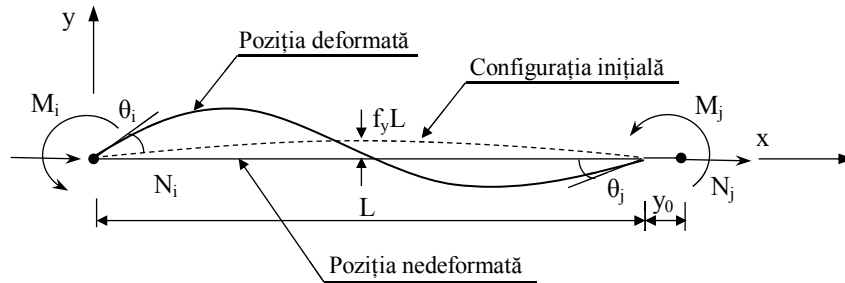


Fig. 2.10 Element de bară având imperfecțiuni geometrice inițiale

Principalul dezavantaj al acestei metode constă în dificultatea stabilirii sensului imperfecțiunilor geometrice inițiale, în special pentru structuri spațiale de tip “dom” sau pentru structuri neregulate. Astfel, pentru o structură complexă, aplicarea imperfecțiunilor geometrice pe o direcție poate să conducă la deplasări simetrice sau anti-simetrice ale colțurilor opuse, astfel ele ar trebui luate în considerare separat. Pentru fiecare analiză se poate considera o singură direcție de aplicare, iar determinarea direcției care produce configurația cea mai defavorabilă ar putea fi dificil de stabilit.

#### 2.4.3.3 Conceptul cu forțe laterale fictive

- *la nivel de element*

Modelul de analiză care include efectul imperfecțiunilor geometrice inițiale locale, prin considerarea unor forțe orizontale care acționează pe element, a fost propus de Liew și al. (1994), și a fost preluat, ulterior, de diferiți cercetători (Kim & Chen, 1996), (Chan, Huang, & Fang, 2005) la dezvoltarea metodelor de analiză statică neliniară a structurilor în cadre din oțel. Metoda presupune aplicarea unor forțe orizontale suplimentare, uniform distribuite pe element sau o forță concentrată în câmp, Fig. 2.11. Intensitatea forțelor reprezintă un anumit procent din valoarea forțelor axiale care acționează pe structură și se alege conform prescripțiilor codurilor de proiectare.

Avantajul acestei metode este faptul că permite utilizarea barelor drepte în modelul de analiză. Totuși, dezavantajul principal al acestei metode constă în dificultatea alegerii intensității forțelor laterale, care reprezintă un procent din forța axială din stâlpi, având în vedere că valoarea lor este necunoscută inițial și care, deseori, pentru structuri complexe supuse la vânt este greu de evaluat (Chen & Kim, 1997).

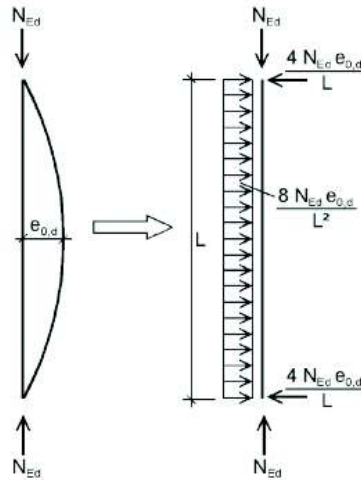


Fig. 2.11 Imperfecțiuni locale modelate ca un sistem de forțe orizontale

- *la nivel de structură*

Conceptul cu forțe orizontale echivalente a apărut în prescripțiile codurilor de proiectare americane și canadiene (ECCS, 1984), (ECCS, 1991), (CSA, 1989, 1994), și, ulterior, a fost preluat de diferiți cercetători (Liew J. Y., 1992), (Chan, Huang, & Fang, 2005) și are scopul de a simula efectul imperfecțiunilor geometrice inițiale privind neverticalitatea elementelor structurii la montaj, Fig. 2.12. Metoda presupune aplicarea unor forțe laterale echivalente la fiecare nivel al structurii. Intensitatea forțelor reprezintă un anumit procent din mărimea forțelor gravitaționale care acționează pe structură și se alege conform prescripțiilor codurilor de proiectare.

Un dezavantaj al metodei ar fi dificultatea alegerii direcției forțelor care poate fi un proces dificil sau chiar imposibil (pentru structuri complexe), având în vedere faptul că acestea trebuie să reprezinte cazul cel mai defavorabil, la nivel global, iar pentru o analiză o singură distribuție a forțelor poate fi inclusă.

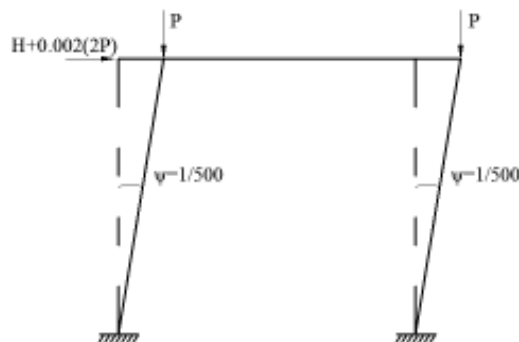


Fig. 2.12 Metoda cu forțe laterale fictive pentru imperfecțiuni geometrice globale

#### 2.4.3.4 Considerarea modului de elasticitate tangent $E_t$

O metodă clasică și pragmatică pentru includerea imperfecțiunilor geometrice inițiale este considerarea modului de elasticitate tangent  $E_t$  în expresia matricei de rigiditate. Pornind de la

prescripțiile codului american AISC-LRFD pentru calcularea forței axiale critice, Liew și al. (1993b) au propus următoarele relații pentru determinarea modului de elasticitate tangent, care țin cont și de efectul tensiunilor reziduale:

$$E_t = E, \quad N \leq 0.39N_p$$

$$E_t = -2.7243 \frac{N}{N_p} \ln \left[ \frac{N}{N_p} \right], \quad N > 0.39N_p \quad (2.12)$$

unde  $N_p$  este efortul axial plastic ( $N_p = A\sigma_c$ ),  $\sigma_c$  reprezintă tensiunea corespunzătoare curgerii materialului,  $E$  este modulul de elasticitate iar  $N$  este efortul axial în element în pasul curent de încărcare.

Pentru a include și efectul imperfecțiunilor geometrice inițiale, Chen&Kim (1997), modifică expresiile modului de elasticitate tangent date de Column Research Council (CRC) prin considerarea unui factor de reducere  $\xi_i$ :

$$E'_t = E\xi_i, \quad N \leq 0.5N_p$$

$$E'_t = 4E\xi_i \frac{N}{N_p} \left( 1 - \frac{N}{N_p} \right), \quad N > 0.5N_p \quad (2.13)$$

unde  $E'_t$  este modulul de elasticitate tangent redus,  $N_p$  este efortul axial plastic ( $N_p = A\sigma_c$ ),  $\sigma_c$  reprezintă tensiunea corespunzătoare curgerii materialului,  $E_t$  este modulul de elasticitate tangent iar  $N$  este efortul axial în element în pasul curent de încărcare.

Pentru un factor de reducere  $\xi_i=0.85$ , influența imperfecțiunilor geometrice inițiale se poate urmări în Fig. 2.13.

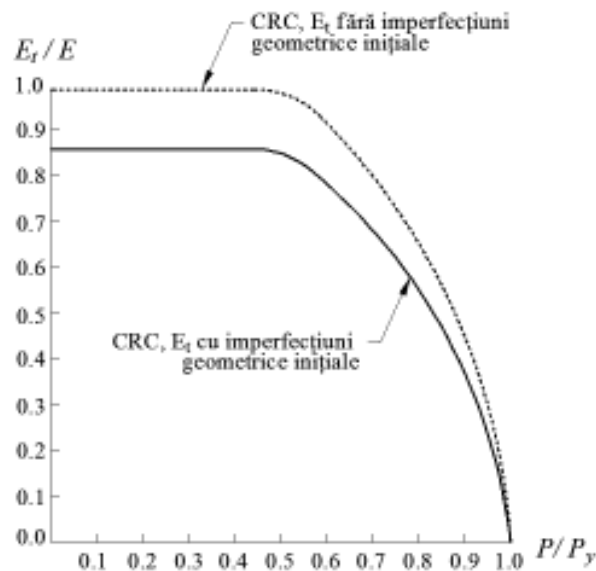


Fig. 2.13 Modul de elasticitate tangent cu și fără considerarea efectului imperfecțiunilor geometrice inițiale – metoda CRC (Chen & Kim, 1997)

Principalul avantaj al acestei metode constă în simplitatea includerii în modelul de analiză, nefiind necesară determinarea direcțiilor imperfecțiunilor geometrice inițiale pentru fiecare element, ceea ce pentru structuri spațiale poate fi un proces deosebit de dificil (Chen & Kim, 1997).

#### 2.4.4 Efectul încovoierii barei asupra rigidității axiale (scurtarea barei)

Considerăm elementul de bară din Fig. 2.10 cu imperfecțiuni geometrice locale, solicitat la încovoiere cu compresiune axială. Scurtarea totală a barei este  $y_e$  și este definită ca suma deplasărilor axiale datorate efortului axial,  $\delta_N$ , și a deplasărilor din încovoiere,  $\delta_M$ :

$$y_e = \delta_N + \delta_M \quad (2.14)$$

Unde:  $\delta_N = \frac{NL}{EA}$

$$\delta_M = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{dy_0}{dx} \right)^2 dx$$

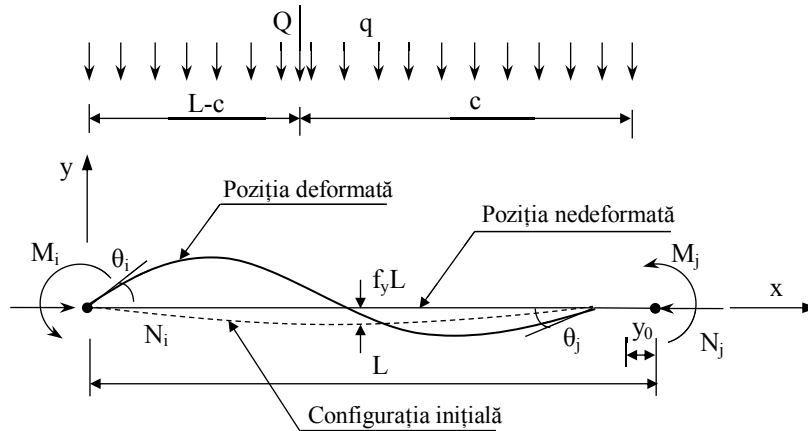


Fig. 2.14 Elementul de bară încărcat

Înlocuind expresiile  $\delta_N$  și  $\delta_M$ , obținem:

$$N = \frac{EA}{L} y_e = EA \left( \frac{\delta_N}{L} + c_b - c_{b0} \right) \quad (2.15)$$

Pentru a rezolva ecuațiile de echilibru cu o metodă incrementală, (Oran, 1973) și (Chan & Gu, 2000) determină matricea de rigiditate tangentă, utilizând derivata de ordinul al II-lea a energiei potențiale totale, astfel:

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial F_i}{\partial u_j} + \frac{\partial F_i}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial u_j} \quad (2.16)$$

Făcând operațiile, matricea de rigiditate tangentă rezultă:

$$k_r = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{\pi^2}{L^2 H} & \frac{G_1}{LH} & \frac{G_2}{LH} \\ & c_1 + \frac{G_1^2}{\pi^2 H} & c_2 + \frac{G_1 G_2}{\pi^2 H} \\ sim. & & c_1 + \frac{G_2^2}{\pi^2 H} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Unde:

$$c_b = b_1(\theta_1 + \theta_2)^2 + b_2(\theta_1 - \theta_2)^2$$

$$c_{b0} = b_{vs} f_y (\theta_1 - \theta_2) + b_{vv} f_y^2$$

$$G_1 = c'_1 \theta_i + c'_2 \theta_j + c'_0 f_y$$

$$G_2 = c'_2 \theta_i + c'_1 \theta_j - c'_0 f_y$$

$$H = \frac{\pi^2}{\lambda^2} + b'_1(\theta_i + \theta_j)^2 + b'_2(\theta_i - \theta_j)^2 + b'_{vs} f_y (\theta_i - \theta_j) + b'_{vv} f_y^2$$

$b_1, b_2, b_{vs}, b_{vv}$  sunt funcții de curbură iar  $c'_1, c'_2, c'_0$  sunt derivatele funcțiilor  $c_1, c_2, c_0$  ale căror expresii sunt propuse de (Oran, 1973) și (Chan & Gu, 2000) și sunt date în Anexa A.

#### 2.4.5 Efectul imperfecțiunilor mecanice (tensiuni reziduale)

În timpul procesului de fabricație al profilelor metalice, în secțiunea transversală apar tensiuni suplimentare, ca urmare a dezvoltării unor deformații plastice suferite la procesul de laminare, sudare sau deformare la rece. Aceste tensiuni, numite tensiuni reziduale, apar pe element înainte de a fi încărcat cu forțe exterioare și sunt autoechilibrate pe secțiunea transversală. Szalai and Papp (2005) afirmă că, folosind același proces de fabricație, cel mai important factor care influențează mărimea și distribuția tensiunilor reziduale este forma profilului metalic. Astfel, pentru un profil I, procesul de răcire are loc mai accelerat pentru porțiunile mai expuse la aer (tălpi) și mai lent în zona conșeurilor. Studiile începute de M. Wilson, R.L. Brown (1935) și continuate până în prezent au arătat că mărimea și distribuția tensiunilor reziduale în secțiunea transversală influențează comportarea profilelor metalice, în special cele puternic comprimate. Procesul de plastificare al secțiunii transversale în starea încărcată cu forțe exterioare va fi mai accelerat, avînd în vedere că în element există deja unele eforturi reziduale de compresiune. În consecință, neglijaarea lor în modelul de analiză poate duce la o scădere semnificativă a rigidității elementului și, implicit, a capacității ultime de rezistență.

Pentru a determina mărimea și distribuția tensiunilor reziduale în secțiunea transversală, au fost efectuate numeroase cercetări experimentale în ultimii 60 (Huber & Beedle, 1954), (Beedle & Tall, 1962), (Young, 1975), (Chen & Sohal, 1995), pe baza cărora au fost propuse diferite modele de distribuție pe înălțimea secțiunii transversale (Galambos & Ketter, 1959), (Young, 1975), (ECCS, 1984) și (Bild & Trahair, 1989), Fig. 2.15.

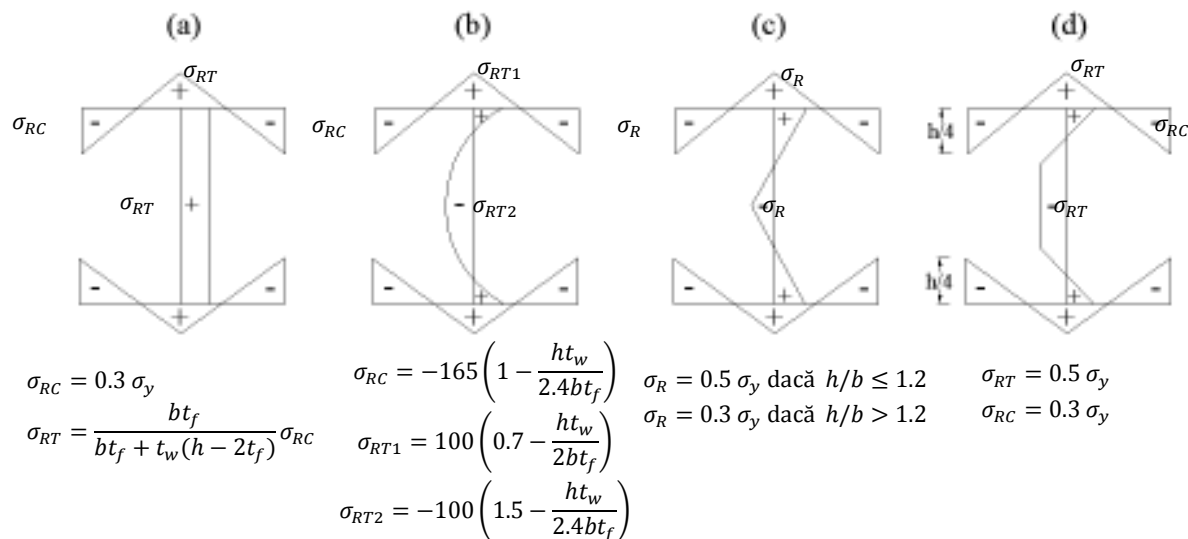


Fig. 2.15 Model de distribuție pe înălțimea secțiunii transversale. (a) Galambos&Ketter (1959), (b) Young, (1975), (c) ECCS (1976), (d) Bild&Trahair (1989)

Tehnicile experimentale pentru determinarea distribuției tensiunilor reziduale sunt costisitoare, necesită mult timp, iar unele sunt și distructive. Odată cu dezvoltarea tehnologiei pe calculator, numeroase modele numerice au fost propuse pentru simularea efectului tensiunilor reziduale asupra comportamentului elementelor din oțel, una din cele mai populare și precise metode fiind bazate pe MEF. În literatura de specialitate sunt menționate diferite cercetări numerice bazate pe modelarea în element finit (Gardner & Cruise, 2009), (Ban, Gang, Shi, & Wang, 2013), (Shayan, 2013). Chiar dacă rezultatele obținute sunt în bună corelație cu cele experimentale, utilizarea unei metode bazate pe MEF presupune o analiză laborioasă deoarece necesită o discretizare rafinată, datorită fenomenului complex care trebuie surprins, ceea ce implică un efort computațional ridicat.

În cazul structurilor metalice în cadre, o metodă simplificată pentru considerarea efectului tensiunilor reziduale asupra capacității portante a elementelor este prin introducerea modulului de elasticitate tangent în matricea de rigiditate (Tall, Huber, & Beedle, 1960), ((AISC), 1994), (Chen & Lui, 1991), (Kim, Han, Won, & Kang, 2014). Acest model ne dă o soluție conservativă și stă la baza majorității metodelor de analiză statică neliniară de ordinul al II-lea bazate pe conceptul de articulație plastică (Chen & Lui, 1992), (Liew, White, & Chen, 1993), (Chen & Liew, 1994), (Kim & Chen, 1996). Pentru evaluarea modulului de elasticitate tangent  $E_t$ , în literatura de specialitate întâlnim diferite relații matematice care țin cont de starea de solicitare în secțiunea transversală și de caracteristicile de material ale elementului, două dintre cele mai des utilizate sunt propuse de codul american AISC-LRFD (1993b) și de Column Research Council (CRC) (Chen & Lui, 1991), Fig. 2.16. Diferența principală dintre cele două metode este faptul că prima formulare (LRFD) include în analiză și efectul imperfecțiunilor geometrice inițiale, iar a doua (CRC) ia în considerare doar tensiunile reziduale.

Mai recent, Kim și al. (2014), propun noi expresii pentru determinarea modulului de elasticitate tangent pentru profile I din oțel, laminate la cald, solificate la compresiune axială, considerând diferite distribuții ale tensiunilor reziduale pe înălțimea secțiunii transversale (Galambos & Ketter, 1959), (ECCS, 1984), (Szalai & Papp, 2005), Fig. 2.15.

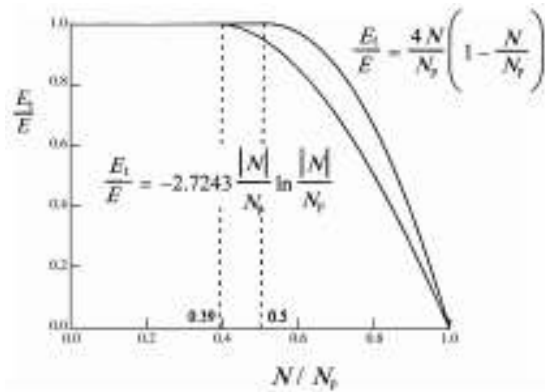


Fig. 2.16 Modul de elasticitate tangent, conform AISC-LRFD și CRC

## 2.5 Integrarea efectelor neliniare ale conexiunilor semi-rigide

În cazul structurilor în cadre din metal, îmbinarea între grindă și stâlp este considerată perfect articulată sau rigidă în majoritatea codurilor de proiectare. Astfel, dacă pentru o conexiune rigidă unghiul între elementele componente ale îmbinării rămâne neschimbat, în urma deformării, pentru o conexiune articulată se permite rotire între elementele componente (nu există transfer de moment încovoietor), Fig. 2.17. Însă, în realitate, nodurile sunt semi-rigide, avînd o comportare între cele două modele idealizate, și permite rotire cu transfer de moment încovoietor. Simplificarea modului de comportare al conexiunilor în proiectarea curentă s-a făcut datorită complexității fenomenului și accesului restrâns la o metodă convenabilă de includere în analiză. Totuși, cercetările experimentale (Popov & Stephen, 1970), (Nader & Astaneh, 1991), (Azizinamini & Radziminski, 1989) au dovedit că conexiunile flexibile influențează semnificativ distribuția eforturilor și deformarea elementelor iar efectele lor trebuie luate în considerare. Din acest motiv, numeroși cercetători au fost preocupați de acest aspect, efectuând cercetări numerice în două direcții principale, și anume: modelarea conexiunilor flexibile utilizând softuri bazate pe MEF (Sherbourne & Bahaari, 1994), (Choi & Chung, 1996), (Bursi & Jaspart, 1997), (Ahmed, Kishi, Matsuoka, & Komuro, 2001), (Citipitioglu, Haj-Ali, & White, 2002) și alții, respectiv dezvoltarea unor modele matematice simplificate (Richard & Abbott, 1975), (Colson & Louveau, 1983), (Lui & Chen, 1986), (Kishi & Chen, 1987a), (Al-Bermani & Kitipornchai, 1992), (Aristizabal-Ochoa, 1997), (Chen W. F., 2000), (Chen & Kishi, 2011) și alții, care să surprindă cât mai real comportamentul conexiunilor flexibile.

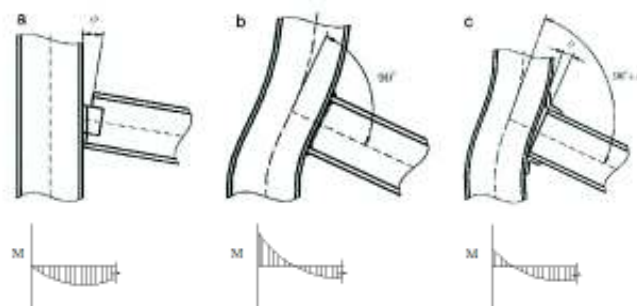


Fig. 2.17 Tipuri de conexiuni: (a) noduri articulate, (b) noduri rigide, (c) noduri semi-rigide (Diaz, Martí, Victoria, & Querin, 2011)



## 2.5.1 Metode analitice pentru modelarea conexiunilor flexibile

### *Curba de comportare M- $\Phi$*

În ultimele trei decenii, numeroase studii experimentale au fost efectuate pentru determinarea curbelor M- $\Phi$  care descriu comportarea nodurilor (Johnston & Green, 1940), (Kukreti & Murray, 1987), (Lipson, 1970), (Thompson, McKee, & Visintainer, 1970), (Azizinamini, Bradburn, & Radzimirski, 1985) și alții. Totuși, tehnicile experimentale sunt costisitoare, necesită mult timp și sunt distructive. Din acest motiv, o preocupare a cercetătorilor în domeniu a fost determinarea unor expresii matematice pentru trasarea curbelor M-  $\Theta_r$  care să reflecte comportamentul real, pe baza rezultatelor experimentale (Richard & Abbott, 1975), (Colson & Louveau, 1983), Ang&Morris (1984), (Lui & Chen, 1986), (Al-Bermani & Kitipornchai, 1992). În literatura de specialitate sunt menționate diferite modele matematice pentru modelarea conexiunilor flexibile, dintre care amintim: modelul liniar (Kawashima & Fujimoto, 1984), biliniar (Sivakumaran, 1988), triliniar (Stelmack, Marley, & Gerstle, 1986), (Gerstle, 1988), polinomial (Frye & Morris, 1975), modelul Bounding line, modelul Power (Colson & Louveau, 1983), (Kishi & Chen, 1987a), (King & Chen, 1993), modelul Ramberg-Osgood (Ramberg & Osgood, 1943), modelul Richard-Abbott (Richard & Abbott, 1975) sau modelul exponențial Chen-Lui (Lui & Chen, 1986), (Lui & Chen, 1988).

În Fig. 2.18 sunt prezentate câteva dintre metodele cele mai utilizate: modelul Power (Colson & Louveau, 1983), (Kishi & Chen, 1987a), Ramberg & Osgood (Ramberg & Osgood, 1943), Richard & Abbott (Richard & Abbott, 1975) unde:  $R_{ki}$  este rigiditatea inițială,  $R_k$  rigiditatea conexiunii,  $M_u$  momentul încovoietor capabil al conexiunii,  $n$  factorul de formă,  $M_0$  moment încovoietor de referință,  $\theta_r$  rotirea relativă,  $\theta_0$  rotirea de referință,  $R_{kr}$  rigiditatea conexiunii la reconsolidare,  $(KM)_0$  și  $\theta_0$  sunt constante care definesc familia de curbe,  $K$  este un factor adimensional care depinde de tipul și geometria conexiunii semi-rigide. Se poate observa influența factorului de formă asupra curbei de comportare M- $\Phi$ , astfel pentru o valoare mai mare obținem o conexiune mai rigidă. Avantajul acestor metode constă în eficiența procedurii și simplitatea includerii într-un program de calcul, având în vedere numărul mic de parametri necesar pentru evaluarea rigidității conexiunii (trei sau patru). De asemenea, aceste procedee returnează o valoare pozitivă a rigidității conexiunii, ceea ce previne apariția unor rigidități negative nedorite.

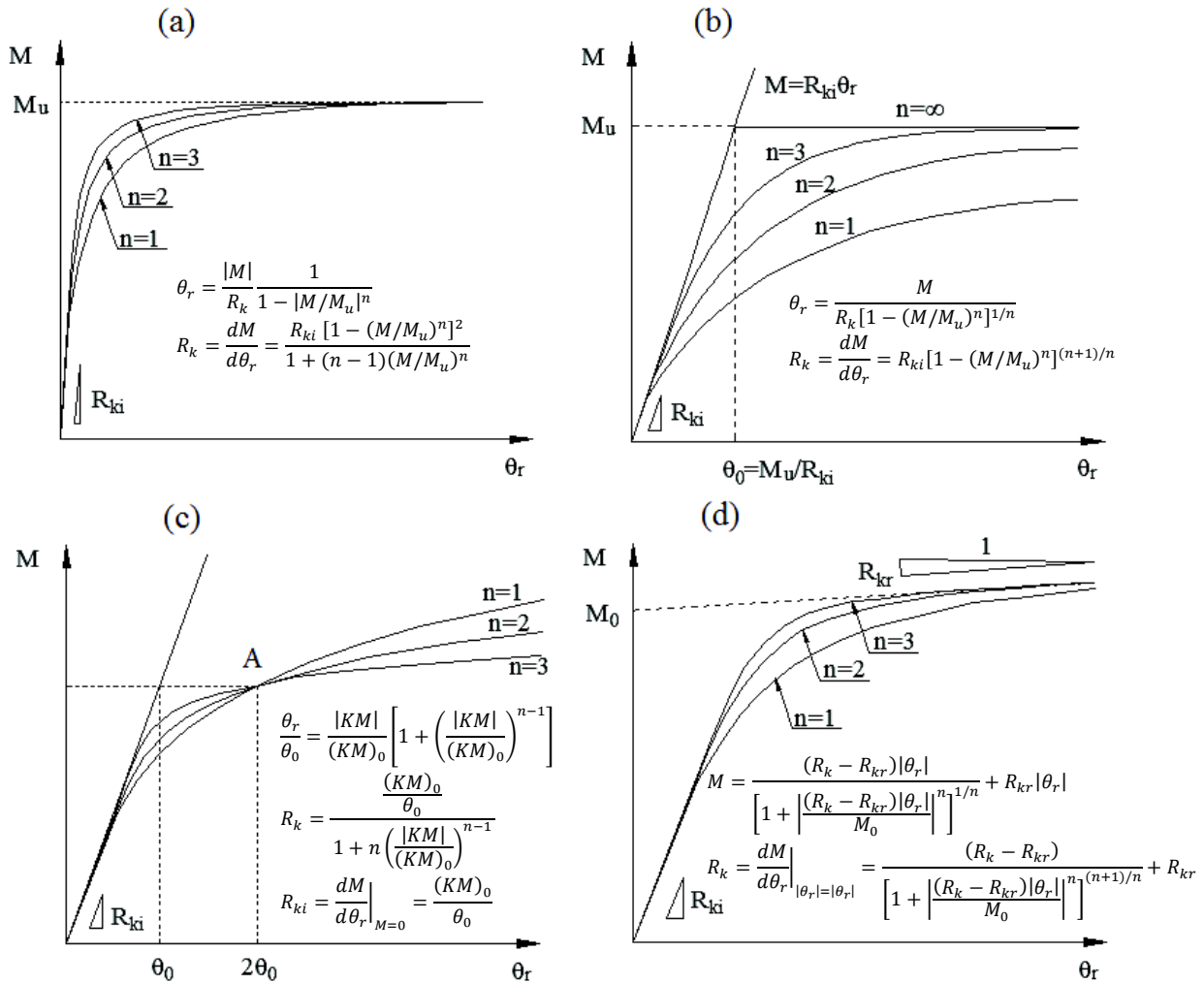


Fig. 2.18 Modele matematice ale conexiunilor semirigide. (a) (Colson & Louveau, 1983), (b) (Kishi & Chen, 1987a), (c) (Ramberg & Osgood, 1943), (d) (Richard & Abbott, 1975)

### Integrarea efectului conexiunilor flexibile în expresia matricei de rigiditate

Modelarea conexiunilor flexibile se face prin introducerea unui resort de rotație de dimensiune 0, între grindă și stâlp, Fig. 2.19. Efectele forței axiale și al forței tăietoare sunt neglijate în analiză, fiind foarte mici comparativ cu cel cauzat de momentul încovoietor. În literatura de specialitate sunt menționate numeroase abordări pentru includerea efectelor conexiunilor flexibile în matricea de rigiditate tangentă și vectorul forțelor nodale echivalente (Monforton & Wu, 1963), (Chen & Lui, 1992), (Liew, White, & Chen, 1993a), (Liew, White, & Chen, 1993b), (Kim & Choi, 2001), (Barsan & Chiorean, 1999), (Chiorean C. G., 2009) și alții. În continuare vor fi descrise două modele des utilizate.

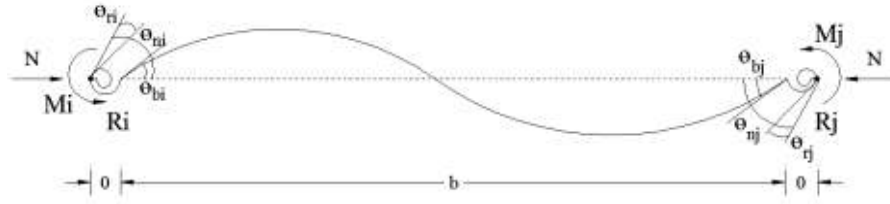


Fig. 2.19 Element de bară cu conexiuni flexibile

*Modelul Chen & Lui (1992)*

Se consideră elementul de bară cu conexiuni semi-rigide din Fig. 2.19, supus la încovoiere cu efort axial. Prezența resorturilor de rotație introduc rotiri relative la capetele barei,  $\theta_{ri}$ ,  $\theta_{rj}$  care pot fi exprimate, în funcție de rigiditățile tangente ale conexiunilor, astfel:

$$\theta_{ri} = \frac{M_i}{R_{kti}}; \quad \theta_{rj} = \frac{M_j}{R_{ktj}} \quad (2.18)$$

Relația incrementală moment-rotire pentru un element de bară cu conexiuni flexibile se poate exprima astfel:

$$\begin{aligned} M_i &= \frac{EI}{L} S_{ii} \left( \theta_{ni} - \frac{M_i}{R_{kti}} \right) + S_{ij} \left( \theta_{nj} - \frac{M_j}{R_{ktj}} \right) \\ M_j &= \frac{EI}{L} S_{ij} \left( \theta_{ni} - \frac{M_i}{R_{kti}} \right) + S_{jj} \left( \theta_{nj} - \frac{M_j}{R_{ktj}} \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Unde  $S_{ii}, S_{ij}, S_{jj}$  se calculează în funcție de modelul de formare al articulației plastice. Astfel, dacă avem o comportare elasto-perfect plastică:

$$\begin{aligned} S_{ii} &= S_{jj} = c_1 \\ S_{ij} &= c_2 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Unde  $c_1$ , respectiv  $c_2$  sunt funcțiile de stabilitate dezvoltate în Anexa A.

Dacă se consideră plastificarea graduală pe înălțimea secțiunii, se folosesc funcțiile propuse de (Liew, White, & Chen, 1993b):

$$\begin{aligned} S_{ii} &= \left[ c_1 - \frac{c_2^2}{c_1} (1 - \phi_j) \right] \phi_i \\ S_{jj} &= \left[ c_1 - \frac{c_2^2}{c_1} (1 - \phi_i) \right] \phi_j \\ S_{ij} &= \phi_i \phi_j c_2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Astfel, ecuațiile (2.19) se pot scrie:

$$\begin{aligned} M_i &= \frac{E_t I}{L} S_{ii}^* \theta_{ni} + S_{ij}^* \theta_{nj} \\ M_j &= \frac{E_t I}{L} S_{ij}^* \theta_{ni} + S_{jj}^* \theta_{nj} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Unde  $S_{ii}^*, S_{ij}^*, S_{jj}^*$  au următoarele expresii:

$$\begin{aligned}
S_{ii}^* &= \left( S_{ii} + \frac{E_t I S_{ii} S_{jj}}{L R_{ktj}} - \frac{E_t I S_{ij}^2}{L R_{ktj}} \right) / R^* \\
S_{jj}^* &= \left( S_{jj} + \frac{E_t I S_{ii} S_{jj}}{L R_{kti}} - \frac{E_t I S_{ij}^2}{L R_{kti}} \right) / R^* \\
S_{ij}^* &= S_{ij} / R^*
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Unde

$$R^* = \left( 1 + \frac{E_t I S_{ii}}{L R_{kti}} \right) \left( 1 + \frac{E_t I S_{jj}}{L R_{ktj}} \right) - \left( \frac{E_t I}{L} \right)^2 \frac{S_{ij}^2}{R_{kti} R_{ktj}}$$

Conform relațiilor prezentate, se poate exprima ecuația incrementală de echilibru pentru un element de bară cu conexiuni semi-rigide ținând cont de efectul plastificării graduale, astfel:

$$\begin{bmatrix} N \\ M_i \\ M_j \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} A/I & 0 & 0 \\ 0 & S_{ii}^* & S_{ij}^* \\ 0 & S_{ij}^* & S_{jj}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \theta_{ni} \\ \theta_{nj} \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

*Modelul Chiorean (2009)*

Modelul abordat în teză, pentru includerea efectelor conexiunilor semirigide este cel propus de Chiorean (2009). În continuare va fi prezentat, succint, procedeul pentru determinarea matricei de rigiditate tangentă și a vectorului forțelor nodale echivalente, urmând ca în Subcap. 4.2.9 să fie prezentat în detaliu.

Dacă considerăm elementul de bară cu conexiuni flexibile, solicitat la încovoiere cu efort axial, conform Fig. 2.19, relația incrementală forță-deplasare poate fi scrisă:

$$\Delta S_{(2x1)} = k_{sem(2x2)} \Delta u_{n(2x1)} + \Delta q_{sem(2x1)} \tag{2.25}$$

Unde  $k_{sem}$  și  $\Delta q_{sem}$  sunt matricea de rigiditate tangentă și vectorul forțelor nodale echivalente pentru un element cu conexiuni flexibile și care pot fi exprimate:

$$k_{sem(2x2)} = \left[ k_{r(2x2)} - k_{r(2x2)} (k_{r(2x2)} + k_{sc(2x2)})^{-1} k_{r(2x2)} \right] \tag{2.26}$$

$$\Delta q_{sem(2x1)} = \Delta q_{eq(2x1)} - k_{r(2x2)} (k_{r(2x2)} + k_{sc(2x2)})^{-1} \Delta q_{eq(2x1)} \tag{2.27}$$

Unde  $k_r$  și  $\Delta q_{eq}$  reprezintă matricea de rigiditate tangentă și vectorul forțelor nodale echivalente pentru un element cu conexiuni rigide;  $k_{sc}$  reprezintă matricea de rigiditate a conexiunilor semi-rigide care poate fi exprimată  $k_{sc} = \text{diag}(R_{ky}^i, R_{ky}^j)$  unde  $R_{ky}^i, R_{ky}^j$  sunt rigiditățile conexiunilor pentru axa principală de inerție pentru nodurile “i” și “j”. Matricea de rigiditate  $k_{sem(2x2)}$  nu include GDL corespunzător forței axiale, el fiind adăugat, ulterior, pentru a rezulta o matrice de rigiditate de 3x3 pentru un element în plan.

## 2.5.2 Modelarea conexiunilor flexibile utilizând MEF

Ca urmare a dezvoltării tehnologiei pe calculator din ultimii ani, softurile de modelare bazate pe MEF au devenit foarte populare. Discretizarea rafinată a structurilor permite studiul, cu maximă acuratețe, a efectelor conexiunilor semi-rigide.

Încercări timpurii de a studia comportamentul nodurilor metalice utilizând MEF sunt menționate la începutul anilor 1970. Bose și al. (1972) dezvoltă un model 2D care ține cont de efectul plastificării, reconsolidarea materialului și flambaj. Apoi în anul 1976, Krishnamurthy & Graddy (1976) a studiat nodurile cu șuruburi și placă de capăt utilizând modele 2D și 3D cu elemente finite. Având în vedere efortul computațional ridicat pentru analiza unor modele 3D, Krishnamurthy & Graddy încearcă să coreleze cele două modele astfel încât comportamentul nodurilor 3D să poată fi prezis din analizele 2D. În ultimele trei decenii, sunt efectuate numeroase cercetări numerice bazate pe modele 3D, pentru a surprinde cât mai corect comportamentul real al conexiunilor flexibile (Sherbourne & Bahaari, 1994), (Choi & Chung, 1996), (Bursi & Jaspert, 1997), (Ahmed, Kishi, Matsuoka, & Komuro, 2001), (Citipitioglu, Haj-Ali, & White, 2002) și alții. Comportamentul nodurilor cu corniere pe tălpile grinzii a fost studiat de Ahmed și colab. în 2001 (Ahmed, Kishi, Matsuoka, & Komuro, 2001) printr-o analiză 3D care modelează contactul cu frecare Coulomb între elementele îmbinării. Forța de pretensionare este introdusă în pasul inițial al analizei. Pentru calibrarea modelului, rezultatele obținute au fost comparate cu rezultatele obținute cu modelul Kishi-Chen (1990) și cele experimentale din literatura de specialitate (Azizinamini & Radziminski, 1989), toate trei fiind în foarte bună corelație. Un alt model 3D a fost dezvoltat de Citipitioglu și al. (2002) pentru a studia nodurile cu corniere pe tălpile și inima grinzii, luând în considerare efectele de frecare și alunecare între elementele aflate în contact. De asemenea, este propusă o metodă pentru modelarea șuruburilor pretensionate. Rezultatele obținute au fost comparate cu cele experimentale (Azizinamini & Radziminski, 1989), iar în unele situații se constată diferențe de până la 25% asupra curbei de capacitate  $M-\Phi$ , provenite din modelarea forțelor de pretensionare. Efectul comportării conexiunilor flexibile cu placă de capăt a fost studiat intensiv de Sherbourne & Bahaari (Sherbourne & Bahaari, 1994), (Bahaari & Sherbourne, 1994), (Bahaari & Sherbourne, 1997b), (Sherbourne & Bahaari, 1997a) utilizând programul de element finit Ansys (ANSYS, 2004).

Chiar dacă analizele bazate pe MEF s-au dovedit a fi capabile de a reda comportamentul conexiunilor semi-rigide cu maximă acuratețe, presupun un efort computațional ridicat datorită necesității unei discretizări fine a elementelor componente. Din acest motiv, extinderea modelului de calcul la nivel de structură este limitată.

## 2.6 Metode de determinare a soluției în calculul nelinier al structurilor

În practica curentă, structurile se proiectează în domeniul liniar-elastic. În realitate, însă, structurile manifestă un comportament nelinier, ca urmare a solicitării forțelor exterioare. În ultimii ani, proiectarea structurilor pe “verticală” a cunoscut o dezvoltare semnificativă, astfel evaluarea greșită a capacității ultime de rezistență a întregului sistem structural poate conduce la soluții dezavantajoase din punct de vedere economic sau structural. Prin urmare, pentru determinarea modului de cedare al structurii, prin evidențierea curbei de capacitate complete

incluzând combinația de încărcări care produc colapsul structurii, încărcările exterioare nu pot fi aplicate într-un singur pas, iar răspunsul neliniar trebuie determinat printr-un proces incremental sau incremental-iterativ.

În funcție de parametrul ales ca variabilă de control a soluției sistemului neliniar, metodele de rezolvare a sistemului de ecuații de echilibru pot fi clasificate astfel, Fig. 2.20:

- *Metode cu control în forțe* – presupune aplicarea unor incremente de încărcare și rezolvarea ecuațiilor de echilibru având ca necunoscută deplasarea. Această tehnică poate conduce la instabilități numerice în apropierea unor încărcări ce produc colapsul local sau global al structurii, datorită singularității matricei de rigiditate. Dezavantajul metodei este incapacitatea de a surprinde comportarea postcritică a structurii, și nici efectele de “Snap-Back” sau “Snap-Through”.
- *Metode cu control în deplasări* – presupune aplicarea unor deplasări incrementale și determinarea forțelor exterioare ce produc starea deformată. Metoda poate surprinde răspunsul structurii după atingerea încărcării limite, precum și efectul de “Snap-Through” produs de cedarea locală a unor elemente.
- *Metode cu control în lungimea de arc (forțe și deplasări)* – este un procedeu mai complex de determinare a soluției (Riks, 1979), (Crisfield, 1981) care presupune rezolvarea ecuațiilor de echilibru prin încărcarea structurii cu o combinație de forțe și deplasări. Metoda poate surprinde cu maximă precizie efectele de “Snap-Back” sau “Snap-Through”.

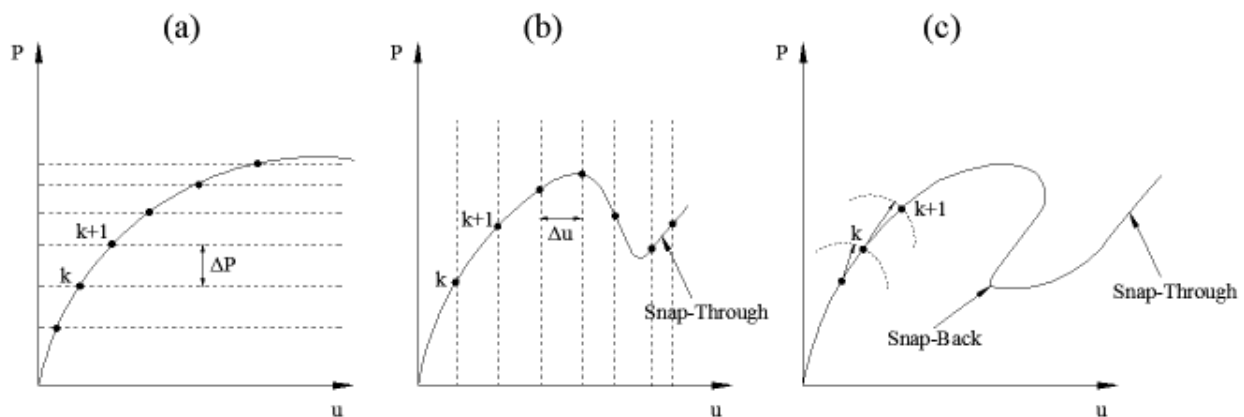


Fig. 2.20 Metode incrementale cu diferiți parametri de control

În funcție de modul de rezolvare a ecuațiilor de echilibru în interiorul unui pas de încărcare, metodele de analiză neliniară se pot împărți în modele simplu incrementale, respectiv incremental iterative și vor fi prezentate, în mod succint, în cele ce urmează.

### 2.6.1 Metode incrementale

Metodele incrementale presupun alegerea unor pași de încărcare pentru forțe sau deplasări, pe parcursul cărora răspunsul structurii se consideră liniar, până se ajunge la nivelul de

încărcare dorit (metoda pașilor controlați de încărcări) sau la limita de deformabilitate stabilită (metoda pașilor controlați de deplasări) (Chiorean C. G., 2006).

Una dintre cele mai utilizate metode este metoda simplu incrementală, denumită și metoda Euler, Fig. 2.21, și care presupune rezolvarea următoarei ecuații, pentru un pas de încărcare:

$$\{\Delta P_i\} = [K_i] \{\Delta u_i\} \quad (2.28)$$

Apoi, răspunsul structurii, la sfârșitul unui pas de încărcare, poate fi evaluat astfel:

$$\begin{aligned} \{P_i\} &= \{P_{i-1}\} + \{\Delta P_i\} \\ \{u_i\} &= \{u_{i-1}\} + \{\Delta u_i\} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Unde  $\{u_{i-1}\}$ ,  $\{P_{i-1}\}$  și  $\{u_i\}$ ,  $\{P_i\}$  sunt vectorii deplasărilor nodurilor barelor și al forțelor interioare pentru pașii de încărcare “i-1”, respectiv “i”;  $[K_i]$  este matricea de rigiditate evaluată la pasul “i”.

În calculul simplu incremental, forțele neechilibrate nu sunt disipate integral în interiorul unui pas de încărcare. Prin urmare, o metodă pentru reducerea abaterii de la curba reală constă în alegerea unor incremente de încărcare mai mici.

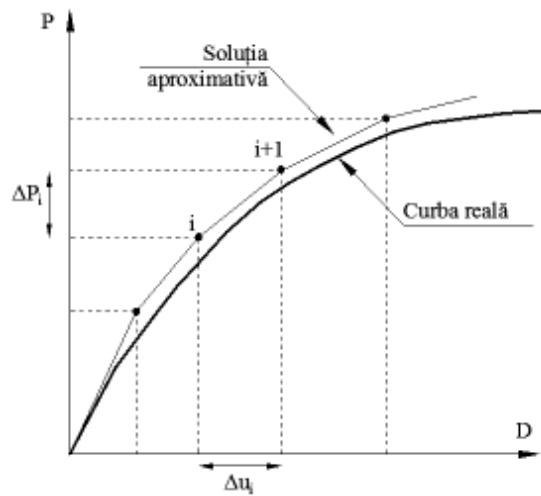


Fig. 2.21 Metoda simplu-incrementală

## 2.6.2 Metode incremental – iterative

Metode mai eficiente pentru evaluarea răspunsului neliniar al structurilor sunt cele incremental iterative. Deosebirea față de cele simplu incrementale constă în efectuarea unor iterații, în interiorul fiecărui pas de încărcare, până la satisfacerea unui criteriu de convergență, respectiv la disiparea integrală a forțelor neechilibrate. Astfel, vectorul deplasărilor nodurilor barelor, la sfârșitul unui pas de încărcare, poate fi evaluat (McGuire, Gallagher, & Ziemian, 2000):

$$\{u_i\} = \{u_{i-1}\} + \sum_{j=1}^{mi} \{\Delta u_i^j\} \quad (2.30)$$

Unde  $mi$  este numărul de iterații impus.

Vectorul deplasărilor incrementale la sfârșitul fiecărei iterații, în interiorul unui pas de încărcare, poate fi evaluat rezolvând sistemul de ecuații liniare:

$$[K_i^{j-1}] \{\Delta u_i^j\} = \{\Delta P_i^j\} + \{R_i^{j-1}\} \quad (2.31)$$

Unde  $[K_i^{j-1}]$  este matricea de rigiditate evaluată la iterația “j-1”,  $\{\Delta u_i^j\}$  este vectorul deplasărilor incrementale la iterația “j”, iar  $\{R_i^{j-1}\}$  este vectorul forțelor neechilibrate care reprezintă diferența dintre forțele exterioare aplicate pe structură și cele interioare și poate fi evaluat astfel:

$$\{R_i^{j-1}\} = \{P_i^{j-1}\} + \{F_i^{j-1}\} \quad (2.32)$$



## Cap. 3      **Calculul geometric neliniar al barelor cu secțiune variabilă**

---

### **3.1    Introducere**

Datorită rezistenței, a modului facil de asamblare și a perioadei scurte de finalizare, halele și structurile metalice în general, au cunoscut o dezvoltare exponențială în ultimii ani, în special în țările industriale dezvoltate din Europa și Statele Unite. Având în vedere progresele semnificative făcute în industria siderurgică, prin utilizarea unor oțeluri de înaltă rezistență, reducerea secțiunilor elementelor a devenit posibilă. Totuși, numeroase studii arată că elementele zvelte cu secțiune constantă sunt susceptibile de a-și pierde stabilitatea laterală. Pentru a evita flambajul barelor s-a dovedit că utilizarea unor elemente cu secțiune variabilă poate îmbunătăți stabilitatea structurii și, în același timp, se reduce greutatea totală a structurii datorită eficientizării consumului de material (Baptista AM, 1998), (Fraser, 1983), (Galambos T. V., 1988).

Chiar dacă prezintă aceste avantaje, utilizarea elementelor cu secțiune variabilă este foarte dificilă, având în vedere lipsa informațiilor în majoritatea codurilor de proiectare (Boissonnade N., 2005).

### **3.2    Modele numerice pentru analiza elementelor cu secțiune variabilă – stadiu actual**

În ultimele decenii, comportamentul structural al elementelor cu secțiune variabilă a devenit subiect de interes pentru multi cercetători (Pantel, 1976), (Brown, 1981), (Ermopoulos J., 1986), (Ermopoulos J., 1988), (Ermopoulos JC, 1985), (Yang & Yau, 1987), (Krudoski BL, 1981), (Bradford & Cuk, 1988), (Trahai, 1993), (Polyzois & Qing, 1993), (Polyzois & Raftoyiannis, 1998), (Tong GS, 2003), (Andrade & Camotim, 2005), (Dinis, 2007), și alții.

Una din primele tehnici de analiză propuse este divizarea barelor neprismatice în elemente cu secțiune constantă (prismatice) (Timoshenko & Young, 1965), (Wang C., 1967), însă această abordare este cunoscută ca fiind inefficientă (Li & Li, 2002). Pentru analiza stabilității elementelor neprismatice solicitate axial, soluții exacte sunt propuse în (Bleich, 1952) și (Timoshenko & Gere, 1961) prin rezolvarea ecuațiilor diferențiale de stabilitate, însă aceste soluții analitice sunt aplicabile doar pentru anumite funcții de variație a momentului de inerție.

Evaluarea numerică a coeficienților de rigiditate pentru bare drepte cu secțiune variabilă, ținând cont de efectele de ordinul al II-lea, a fost abordată în (Pantel, 1976) utilizând teoria ecuațiilor integrale de tip Volterra. Tot în (Pantel, 1976), s-a determinat, în mod analitic, încărcările axiale critice de pierdere a stabilității pentru bare drepte cu secțiune variabilă și răsucire naturală nulă având diferite condiții de rezemare.

O altă abordare menționată este tratarea barelor cu secțiune variabilă ca bare prismatice și introducerea unor coeficienți de corecție (Tochacek, 1995), (Baptista AM, 1998), (Sapalas & Kvedaras, 2000).

Pentru determinarea matricei de rigiditate și a forței axiale critice a elementului cu secțiune variabilă, în literatura de specialitate sunt propuse numeroase modele numerice:

modificarea matricei de rigiditate pentru a ține cont de variația secțiunii transversale în lungul elementului (El-Mezaini, Balkaya, & Citipitioglu, 1991), (Balkaya, 2001); metoda elementelor finite (Yang & Yau, 1987), (Bradford & Cuk, 1988), (Ronagh, Bradford, & Attard, 2000), (Polyzois & Qing, 1993), (Polyzois & Raftoyiannis, 1998), (Kim & Kim, 2000), (Boissonnade N., 2005), (Yau, 2006), (Shooshtari & Khajavi, 2010); metode variaționale iterative (He, 2000), (He, 2000), (J.H.He, 2007); metoda elementelor de frontieră (Al-Gahtani, 1996); abordări bazate pe funcțiile Bessel (Banerjee, 1986), (Gere & Carter, 1962); metoda diferențelor finite (Girijavallabhan, 1969), (Iremonger, 1980), (Brown, 1981), (AL-Shareef, 2013); tehnici prin integrare directă (Just, 1977), (Kitipornchai & Trahair, 1972), (Kitipornchai & Trahair, 1975), (Karabalis & Beskos, 1983), (Bazeos & Karabalis, 2006), (Biondi & Caddemi, 2007); dezvoltare în serii de puteri (Dube GP, 1996), (Eisenberger, 1995), (Li & Li, 2002), (Li J. L., 2003), (Al-Sadder, 2004), (Hadidi, Azar, & Marand, 2014), (Asgarian, Soltani, & Mohri, 2013); inversarea matricei de flexibilitate (Frieman Z, 1992), (Eisenberger M., 1985), (Eisenberg, 1991); abordarea Lagrangiană actualizată (Rajasekaran, 1994); metoda elementelor finite (Bathe K., 1982). Însă, aceste metode prezintă unele limitări privind includerea efectului forței axiale și/sau efectul deformațiilor de lunecare, a imperfecțiunilor inițiale geometrice, incapacitatea de a evidenția funcțiile de stabilitate, odată ce matricea de rigiditate a fost determinată prin inversarea matricei de flexibilitate, sau presupun un efort computațional mare.

Totuși, se cunoaște că stâlpii sunt elemente structurale supuse la forțe axiale de compresiune și momente încovoietoare. Cât timp forțele axiale nu ating valori importante, efectul lor asupra rigidității la încovoiere poate fi neglijat. Însă, când forțele axiale ajung deosebit de mari, pentru a nu se supraestima rigiditatea și stabilitatea elementelor structurale, efectul acestora trebuie introdus în expresia matricei de rigiditate și în stabilirea relațiilor forță-deplasare la nivel de element. În literatura de specialitate sunt propuse diferite tehnici (Banerjee, 1986), (Gere & Carter, 1962), (Dube GP, 1996) pentru a lua în considerare efectul forței axiale însă aceste abordări neglijează efectul forței tăietoare asupra deformațiilor barei, a imperfecțiunilor geometrice inițiale, a încărcărilor aplicate pe bară. De asemenea, majoritatea formulărilor amintite mai sus propus soluții doar pentru cazuri particulare ale variației geometrice în lungul elementului.

Efectul deformațiilor de lunecare este menționat, în mod special, la analiza vibrațiilor libere ale barelor și s-a demonstrat, pentru studiul modurilor superioare de vibrație, că modelul Timoshenko-Euler conduce, în general, la rezultate mai exacte (Shen, 1991), spre deosebire de modelul clasic Bernoulli-Euler. Apoi, efectul deformațiilor de lunecare a fost inclus în numeroase cercetări ale barelor cu secțiune variabilă la vibrații libere (Cleghorn WL, 1992), (Frieman Z, 1992), (To C., 1981), însă în aceste studii se ignoră efectul forțelor axiale asupra rigidității elementelor (efectul neliniarității geometrice). Pentru a include efectul deformațiilor de lunecare, Al-Sarraf (1986) pornește de la funcțiile de stabilitate propuse în (Kassimali, 1983), (Oran, 1973), (Oran & Kassimali, 1976) pentru bare cu secțiune constantă. Apoi, aceste funcții de stabilitate sunt adaptate pentru barele cu secțiune variabilă (AL-Damerchi, 1999), (Al-Farouk, Al-Sarraf, & Yossif, 2007). În 2005, Al-Fadul (Al-Fadul, 2005) propune un nou model bazat pe metoda diferențelor finite pentru evaluarea funcțiilor de stabilitate care includ efectul deformațiilor de lunecare pentru bare cu secțiune variabilă. Efectul deformațiilor de lunecare a fost studiat intensiv de Sapountzakis și al. utilizând metoda elementelor de frontieră (boundary element method) (Sapountzakis & Mokos, 2007), (Sapountzakis & Panagos, 2008),

(Sapountzakis & Kampitsis, 2011) sau de alți autori utilizând metoda elementelor finite (Li & Li, 2000) ( Lee & Guo-Qiang, 2004), (He, Liu, & Chun, 2013). Pornind de la principiul că deformațiile de lunecare s-a dovedit a avea o influență semnificativă asupra comportamentului elementelor prismatice cu profil I (Li & Shen, 1998), Li și Li (Li & Li, 2002) include acest efect, precum și al forței axiale, în exprimarea ecuației de echilibru a barelor cu secțiune variabilă. Pentru a determina matricea de rigiditate Li & Li rezolvă ecuația diferențială de ordinul al II-lea cu coeficienți variabili, având ca necunoscută deplasarea, prin dezvoltare în serii de puteri. Cu toate acestea efectul imperfecțiunilor geometrice inițiale și al încărcărilor aplicate în lungul elementului sunt neglijate în analizele menționate.

Elementul de bară cu secțiune variabilă studiat de numerosi cercetatori este un model idealizat. În realitate, indiferent de calitatea procesului de fabricație, profilele metalice dezvoltă anumite imperfecțiuni. Primul cercetător care a abordat acest subiect a fost Koiter (Koiter, 1945) care a realizat că, tocmai prezența acestor mici imperfecțiuni geometrice inițiale cauzează diferențele mari între rezultatele teoretice și experimentale. În consecință, imperfecțiunile geometrice inițiale afectează stabilitatea structurii și pot produce colapsul prematur (Galambos T. V., 1988), (Bažant & Cedolin, 2010). Pentru a obține rezultate cât mai apropiate de realitate, efectul acestor imperfecțiuni asupra comportamentului barelor cu secțiune variabilă a fost studiat de numeroși cercetători (Dowling, Harding, Bjorhovde, & Martinez-Romero, 2005), (Nagy & Cristutiu, 2010), (Muntean & Cristutiu, 2010), (Raftoyiannis & Ermopoulos, 2005). În 2005, Raftoyiannis (Raftoyiannis & Ermopoulos, 2005) studiază stabilitatea elementelor neprismatice cu imperfecțiuni geometrice inițiale solicitate la compresiune excentrică în domeniul elastic și determină pentru un caz particular de variație a secțiunii în lungul elementului o soluție analitică exactă a ecuației diferențiale de echilibru în calculul geometric neliniar. Majoritatea acestor tehnici sunt bazate pe MEF iar, după cunoștințele noastre, în literatura de specialitate, nu sunt formulate modele care să trateze cazul general al calculului geometric neliniar al barelor cu secțiune variabilă luând în considerare efectul combinat al deformațiilor de lunecare, al imperfecțiunilor geometrice inițiale, precum și cel al forțelor aplicate în cuprinsul barelor.

### **3.2.1 Rezolvarea ecuației diferențiale de echilibru cu coeficienți variabili - prin dezvoltare în serii de puteri având ca necunoscută deplasarea**

În decursul anilor mulți cercetători au propus diferite formulări numerice bazate pe rezolvarea ecuațiilor diferențiale de echilibru cu necunoscută în deplasare prin dezvoltarea în serii de puteri pentru a studia comportamentul structural al elementelor neprismatice. Unii dintre ei s-au axat pe studiul flambajului prin încovoiere sau torsiune (Asgarian B., 2011), (Soltani, Asgarian, & Mohri, 2014), (Al-Sadder, 2004), (Li & Li, 2002), (Zeinali, Jamali, & Musician, 2013) iar alții s-au concentrate pe analiza problemei de vibrații libere (Soltani, Asgarian, & Mohri, 2014), (Gupta, 1986), (Wekezer, 1989), (Dube GP, 1996).

Pentru a determina matricea de rigiditate a barei cu secțiune variabilă, Li și al. (Li & Li, 2002), (Li J. L., 2003), (Li & Li, 2007) rezolvă ecuația diferențială de ordinul al II-lea cu coeficienți variabili utilizând polinoamele Cebîșev. Ecuația de echilibru a elementului de bară Timoshenko-Euler ține cont de efectul forței axiale, al deformațiilor din forța tăietoare și de efectele de ordinul al II-lea. Această tehnică, deși este practică în analiza avansată, fiind mai puțin consumatoare de timp, nu ține cont de încărcările uniform distribuite pe bară și de efectul

**Pagină eliminată din conținutul electronic al acestei lucrări.**

$$\alpha(\xi) y'' - \beta(\xi) N L y' - N L^2 y = \beta(\xi) L^2 Q_1 - L^2(M_1 - Q_1 L \xi) \quad (3.2)$$

Utilizând polinoamele Cebîșev, funcțiile  $y(\xi)$ ,  $\alpha(\xi)$ ,  $\beta(\xi)$  pot fi approximate astfel:

$$\begin{aligned} y(\xi) &= \sum_{n=0}^M y_n \xi^n \\ \alpha(\xi) &= \sum_{n=0}^M \alpha_n \xi^n \\ \beta(\xi) &= \sum_{n=0}^M \beta_n \xi^n \end{aligned} \quad (3.3)$$

Înlocuind ecuațiile (3.3) în ecuația (3.2) ne rezultă următoarea ecuație de echilibru:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^M \left[ \sum_{i=0}^n \alpha_i (n+2-i)(n+1-i) y_{n+2-i} \right] \xi^n - N L \sum_{n=0}^M \left[ \sum_{i=0}^n \beta_i (n+1-i) y_{n+1-i} \right] \xi^n - \\ - N L^2 \sum_{n=0}^M y_n \xi^n = L^2 Q_1 \sum_{n=0}^M \beta_n \xi^n - L^2 M_1 + L^3 Q_1 \xi \end{aligned} \quad (3.4)$$

Respectând principiul conform căruia coeficienții termenilor cu aceeași putere trebuie să fie egali de ambele părți în ecuația (3.4) se deduce relația de recurență pentru  $n \geq 2$ :

$$\begin{aligned} y_{n+2} = \left[ N L \sum_{i=0}^n \beta_i (n+1-i) y_{n+1-i} + N L^2 y_n + L^2 Q_1 \beta_n \right. \\ \left. - \left[ \sum_{i=0}^n \alpha_i (n+2-i)(n+1-i) y_{n+2-i} \right] / \alpha_0 (n+2)(n+1) \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Având în vedere faptul că funcțiile  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  sunt cunoscute și seriile  $\alpha_n$  respectiv  $\beta_n$  pot fi determinate, din ecuația (3.5) rezultă ca orice termen din seria  $y_n$  ( $n \geq 4$ ) poate fi exprimat ca o combinație liniară de  $y_0, y_1, y_2, y_3$  și  $Q_1$ .

Impunând condițiile de rezemare avem:

$$\begin{aligned} \text{Pentru } \xi = 0 \text{ (x = 0)} \quad y(0) = y_0 = 0 \\ y'(0) = y_1 = \frac{L}{\gamma(0)} \left( \theta_1 - \frac{Q_1}{G A_w(0)} \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Pentru  $\xi = 1$  (x = L)

$$y(1) = \sum_{n=0}^M y_n = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + c_4 Q_1 = \delta_2 - \delta_1 \quad (3.7)$$

$$y'(1) = \sum_{n=0}^M n y_n = c_5 y_1 + c_6 y_2 + c_7 y_3 + c_8 Q_1 = \frac{L}{\gamma(1)} \left( \theta_2 - \frac{Q_1}{G A_w(1)} \right)$$

Unde  $c_1 - c_8$  sunt coeficienți constanți care se pot determina iar în funcție de numărul de termeni ales în exprimarea polinoamelor Cebîșev se poate atinge gradul de acuratețe dorit pentru matricea de rigiditate.

Dacă exprimăm relația de recurență (3.5) pentru  $n = 0$  și  $n = 1$  rezultă ecuațiile:

$$\text{Pentru } n = 0 \quad 2\alpha_0 y_2 - NL\beta_0 y_1 - NL^2 y_0 = L^2 Q_1 \beta_0 - L^2 M_1 \quad (3.8)$$

$$\text{Pentru } n = 1 \quad 6\alpha_0 y_3 + 2\alpha_1 y_2 - NL(2\beta_0 y_2 + \beta_1 y_1) - NL^2 y_1 = L^2 Q_1 \beta_1 + L^3 Q_1 \quad (3.9)$$

care împreună cu relațiile (3.6) și (3.7) formează un sistem de ecuații din care rezultă  $M_1$  și  $Q_1$ . Pentru a determina necunoscutele  $M_2$  și  $Q_2$  se scriu ecuațiile de echilibru pe bară:

$$Q_1 + Q_2 = 0 \quad (3.10)$$

$$M_2 + M_1 - Q_1 L - N(\delta_2 - \delta_1) = 0 \quad (3.11)$$

Având calculate toate necunoscutele, matricea de rigiditate poate fi determinată din relația:

$$[k]\{\delta\} = \{f\} \quad (3.12)$$

unde:

$$\{\delta\} = [\delta_1, \theta_1, \delta_2, \theta_2]^T$$

$$\{f\} = [Q_1, M_1, Q_2, M_2]^T$$

Iar matricea de rigiditate are următoarea expresie:

$$[k] = \begin{bmatrix} -\phi_1 & \phi_2 & \phi_1 & \phi_3 \\ -\phi_4 & \phi_5 & \phi_4 & \phi_6 \\ \phi_1 & -\phi_2 & -\phi_1 & -\phi_3 \\ -\phi_7 & \phi_8 & \phi_7 & \phi_9 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Unde expresiile  $\phi_1 - \phi_9$  sunt date în (Li & Li, 2002).

### 3.2.1.2 Modelul Al-Sadder (Al-Sadder, 2004)

Pentru a determina funcțiile de stabilitate pentru un element neprismatic solicitat la forță axială, Al-Sadder (2004) pornește de la ecuația diferențială de ordinul al IV-lea cu necunoscuta deplasarea transversală:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right) + N \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (3.14)$$

Ca și în modelul Li & Li (2002), prezentat mai sus, elementul se raportează la sistemul local de referință incluzând și deplasările de corp rigid. În acest model efectul deformațiilor de alunecare transversale este neglijat în stabilirea relațiilor de echilibru.

Dacă înlocuim  $\xi = \frac{x}{L}$  și trecem relația (3.14) la formă adimensională rezultă ecuația:

$$\frac{1}{L^4} \frac{d^2}{d\xi^2} \left( EI(\xi) \frac{d^2 y}{d\xi^2} \right) + \frac{N}{L^2} \frac{d^2 y}{d\xi^2} = 0 \quad (3.15)$$

Care mai poate fi scrisă astfel:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left( I(\xi) \frac{d^2 y}{d\xi^2} \right) + \frac{NL^2}{E} \frac{d^2 y}{d\xi^2} = 0 \quad (3.16)$$

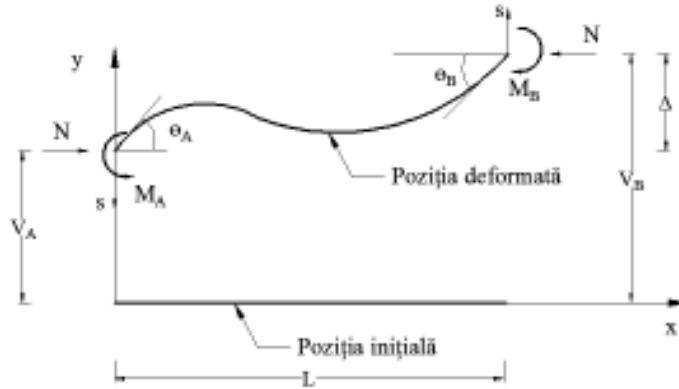


Fig. 3.2 Eforturile și deplasările în sistemul local pentru elementul de bară neprismatic. Modelul A1 – Sadler (2004)

Dacă exprimăm funcțiile  $I(\xi)$  și  $y(\xi)$  în serii de puteri de forma:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= \sum_{n=0}^M I_n^* \xi^n \\ y(\xi) &= \sum_{n=0}^M a_n \xi^n \end{aligned} \quad (3.17)$$

și le înlocuim în ecuația de echilibru (3.16) ne rezultă următoarea expresie:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[ \left\{ \sum_{n=0}^M I_n^* \xi^n \right\} \left\{ \sum_{n=0}^M (n+2)(n+1)a_{n+2} \xi^n \right\} \right] + \frac{NL^2}{E} \sum_{n=0}^M (n+2)(n+1)a_{n+2} \xi^n = 0 \quad (3.18)$$

După ce efectuăm înmulțirile celor două sume ne rezultă relația de recurență pentru  $n \geq 4$ :

$$a_{n+4} = \frac{-1}{I_0^* (n+4)(n+3)} \left[ \sum_{i=1}^{n+2} I_i^* (n+4-i)(n+3-i) a_{n+4-i} + \frac{NL^2}{E} a_{n+2} \right] \quad (3.19)$$

Se observă din relația (3.19) că orice termen ( $n \geq 4$ ) se poate scrie ca o combinație liniară de patru constante  $a_0, a_1, a_2, a_3$  care se pot determina impunând condițiile de rezemare:

Pentru  $\xi = 0$  ( $x = 0$ )

$$y(0) = V_A \quad (3.20)$$

$$\frac{dy}{dx} = \theta_A = \frac{1}{L} \frac{dy}{d\xi} \quad (3.21)$$

Pentru  $\xi = 1$  ( $x = L$ )

$$y(1) = V_B \quad (3.22)$$

$$\frac{dy}{dx} = \theta_B = \frac{1}{L} \frac{dy}{d\xi} \quad (3.23)$$

Astfel constantele  $a_0, a_1, a_2, a_3$  au forma:

$$a_0 = V_A \quad (3.24)$$

$$a_1 = L\theta_A \quad (3.25)$$

$$a_2 = -\frac{1}{K} \{y_4'(1)[V_B - V_A - L\theta_A] - y_4(1)[L\theta_B - L\theta_A]\} \quad (3.26)$$

$$a_3 = \frac{1}{K} \{y_4'(1)[V_B - V_A - L\theta_A] - y_4(1)[L\theta_B - L\theta_A]\} \quad (3.27)$$

Unde

$$K = y_4(1) y_3'(1) - y_3(1) y_4'(1)$$

Iar funcțiile  $y_1(\xi), y_2(\xi), y_3(\xi), y_4(\xi)$  sunt date în (Al-Sadder, 2004).

Având cunoscute constantele  $a_0, a_1, a_2, a_3$ , se poate determina funcția  $y(\xi)$  și apoi ecuația momentului încovoietor în secțiunea  $\xi$ :

$$M(x) = -EI(x) \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{EI(\xi)}{L^2} \frac{d^2y}{d\xi^2} = -\frac{EI(\xi)}{L^2} y_1''(\xi)a_0 + y_2''(\xi)a_1 + y_3''(\xi)a_2 + y_4''(\xi)a_3 \quad (3.28)$$

și impunând condițiile:

$$\begin{aligned} M_A &= -M(0) \\ M_B &= (-)(-)M(1) \end{aligned} \quad (3.29)$$

rezultă:

$$M_A = \frac{2EI_A}{KL} \left\{ [y_4'(1) - y_4(1)]\theta_A + y_4(1)\theta_B - y_4'(1) \frac{V_B - V_A}{L} \right\} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} M_B &= \frac{2EI_B}{KL} \left\{ [y_3''(1) y_4'(1) - y_4(1) y_3''(1) - y_4''(1) y_3'(1) + y_4''(1) y_3(1)]\theta_A \right. \\ &\quad \left. + [y_3''(1) y_4(1) - y_4''(1) y_3(1)]\theta_B - [y_3''(1) y_4'(1) - y_4''(1) y_3'(1)] \frac{V_B - V_A}{L} \right\} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Dacă scriem ecuațiile de echilibru pentru bara din Fig. 3.2, ținând cont de deplasările din forța tăietoare:



$$M_A = \frac{EI_B}{L} \left[ S_1 \theta_A + \overline{SC} \theta_B - (S_1 + \overline{SC}) \frac{V_B - V_A}{L} \right] \quad (3.32)$$

$$M_B = \frac{EI_B}{L} \left[ \overline{SC} \theta_A + S_2 \theta_B - (S_2 + \overline{SC}) \frac{V_B - V_A}{L} \right] \quad (3.33)$$

și le echivalăm cu relațiile (3.30), (3.31) ne rezultă expresiile pentru  $S_1, S_2, \overline{SC}$ :

$$S_1 = \frac{2I_A}{KI_B} [y_4'(1) - y_4(1)] \quad (3.34)$$

$$S_2 = \frac{1}{K} [y_3''(1)y_4(1) - y_4''(1)y_3(1)] \quad (3.35)$$

$$\overline{SC} = \frac{2I_A}{KI_B} y_4(1) = \frac{1}{K} [y_3''(1)y_4'(1) - y_4(1)y_3''(1) - y_4''(1)y_3'(1) + y_4'(1)y_3(1)] \quad (3.36)$$

unde  $S_1, S_2, \overline{SC}$  sunt funcțiile de stabilitate.

### 3.2.2 Modelarea elementelor cu secțiune variabilă utilizând MEF

Odată cu dezvoltarea tehnologiei pe calculator, metoda elementelor finite a devenit una dintre cele mai frecvente metode utilizate pentru modelarea cât mai fidelă a elementelor cu secțiune variabilă. Astfel, geometria barei este înlocuită cu o rețea de elemente finite care reflectă cât mai exact forma reală. Dificultatea procedurii constă în alegerea tipului (geometriei) elementului finit astfel încât ecuațiile de echilibru și compatibilitate la contactul dintre elemente să fie satisfăcute. Printre elementele finite utilizate pentru discretizarea barelor amintim elementele prismatice (Lee, Morrell, & Ketter, 1972) sau elementele trapezoidale (Gallagher, 1975), (Karabalis & Beskos, 1983), (Chan S. , 1990), (Bradford & Cuk, 1988).

Metoda elementelor finite a fost utilizată pentru determinarea matricei de rigiditate a elementului (Bathe K. , 1982), (Karabalis & Beskos, 1983) și în evaluarea răspunsului barelor cu secțiune variabilă la pierderea stabilității sau vibrații (Bradford & Cuk, 1988), (Ronagh, Bradford, & Attard, 2000). Bazându-se pe ipotezele lui Vlasov și Wagner, Wekezer (1985) folosește elemente de placă de tip membrană pentru studiul la flambaj al barelor cu pereți subțiri iar pentru considerarea deformațiilor mari adoptă formularea Lagrangiana totală. În 1987 Yang și Yau (1987) propun un element finit care ia în considerare și efectul torsiunii neuniforme iar modificarea configurației geometrice a nodurilor este surprinsă în baza formulării Lagrangiane actualizate. Bradford & Cuk (1988) studiază cedarea la flambaj prin încovoiere cu răsucire în domeniul elastic al barelor cu secțiune variabilă I utilizând MEF. Simplificarea care o introduce Bradford în formularea propusă este cuplarea torsiunii și încovoierii prin adoptarea axei arbitrare de răsucire la jumătatea înălțimii inimii. Ronagh și colab. (2000), (Ronagh, Bradford, & Attard, 2000) propun un model numeric bazat pe folosirea în formă variațională a energiei potențiale totale pentru analiza la echilibru în domeniul neliniar și stabilitate a barelor. Polyzois și al. consideră un element cu secțiune variabilă ca o bară prismatică având secțiunea transversală corespunzătoare capătului cu rigiditate mică și aplică niște coeficienți de corecție lungimii barei (Polyzois & Qing, 1993), (Polyzois & Raftoyiannis, 1998). Kim și al. (Kim & Kim, 2000) determină energia potențială și cinematică utilizând principiul lucrului mecanic virtual, introducând parametrii de deplasare definiți la o axa arbitrară și ținând cont de rotațiile finite

semitangentele de ordinul al II-lea. Apoi în 2006 Yau (Yau, 2006) propune un model de element finit pentru analiza la flambaj a barelor neprismatice supuse la torsiune. În formularea expresiilor matricilor de rigiditate elastică și geometrică Yau include efectele de ordinul II ale torsiunii neuniforme și a momentelor de distorsiune. Mai recent, Shoostari & Khajavi (2010) propun o formulare bazată pe două ipoteze, eliminarea deplasărilor de corp rigid și găsirea unor funcții de interpolare a deformațiilor în locul unor funcții de formă.

Metoda elementelor finite presupune împărțirea structurii în elemente finite cu formă geometrică simplă. Chiar dacă este considerată o “metodă exactă”, precizia de calcul implică o discretizare fină a elementelor structurale ceea ce conduce la un efort computațional ridicat.

### 3.3 Analiza barelor cu secțiune variabilă: modelul simplificat

În acest subcapitol se prezintă un model practic pentru analiza neliniară a barelor cu secțiune variabilă. Procedeu presupune exprimarea relației incrementale *forță-deplasare* la nivel de element pornind de la formula Maxwell-Mohr de calcul a deplasării generalizate la capetele elementului  $\Delta\delta_{i,\Delta N}$  din aplicarea unei forțe generalizate  $\Delta N$ . Simplificarea introdusă constă în evaluarea momentului încovoietor din calculul geometric neliniar în lungul elementului ca și pentru barele prismatice prin intermediul funcțiilor de stabilitate, dar în a căror exprimare se consideră un coeficient de compresiune mediu, determinat ținând cont de raportul secțiunilor de la capetele elementului. Prin inversarea relațiilor incrementale *deplasare-forță* se va obține relația incrementală *forță-deplasare* cu evidențierea matricei de rigiditate incrementală și a vectorului forțelor nodale echivalente. Forțele aplicate în lungul barei sunt transformate în forțe echivalente la nodurile de capăt ale barei, neintervenind în expresia matricei de rigiditate (Chiorean C. G., 2009), (Chiorean C. G., 2015). Acest procedeu este eficient și așa cum se va demonstra în continuare prin comparații cu metodele exacte acoperă un spectru larg din situațiile întâlnite în practica curentă, principala limitare fiind gradul de variație a secțiunilor transversale ale barelor.

Considerând bara din Fig. 3.3 raportată la sistemul de coordonate de bază și încărcată cu forțele de capăt pe direcțiile gradelor de libertate reținute ( $\Delta M_i, \Delta M_j$ ), luând în considerare doar deformațiile de încovoiere, rotațiile la cele două capete ale barei pot fi exprimate astfel:

$$\begin{aligned}\Delta\theta_i &= \int_0^L \frac{\partial\Delta M^I(x)}{\partial\Delta M_i} \cdot \frac{\Delta M^{II}(x)}{EI(x)} dx \\ \Delta\theta_j &= \int_0^L \frac{\partial\Delta M^I(x)}{\partial\Delta M_j} \cdot \frac{\Delta M^{II}(x)}{EI(x)} dx\end{aligned}\tag{3.37}$$

sau sub formă matricială:

$$\Delta\mathbf{u}_r = \begin{bmatrix} \Delta\theta_i \\ \Delta\theta_j \end{bmatrix} = \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{\partial\Delta M^I(x)}{\partial\Delta M_i} \\ \frac{\partial\Delta M^I(x)}{\partial\Delta M_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta M^{II}(x) \\ EI(x) \end{bmatrix} dx = \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{\partial\Delta M^I(x)}{\partial\Delta M_i} \\ \frac{\partial\Delta M^I(x)}{\partial\Delta M_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ EI(x) \end{bmatrix} [\Delta M^{II}(x)] dx\tag{3.38}$$

unde cu indice superior (*I*) și (*II*) s-a marcat momentul încovoietor obținut din calculul de ordinul *I*, respectiv din calculul de ordinul *II* (efectul forței axiale asupra momentelor încovoietoare). Se

menționează faptul că în prezenta formulare cuplajul eforturilor de încovoire cu cel axial este ignorat și de asemenea efectul deformațiilor de lunecare provenite din acțiunea forțelor tăietoare nu este luat în considerare. Detalii cu privire la modalitatea de includere a acestui efect în relația forță-deplasare și sistematizări de detaliu cu privire la această formulare sunt date în lucrările (Chiorean C. G., 2015), (Buru & Chiorean, 2015), (Chiorean & Marchiș, 2016).

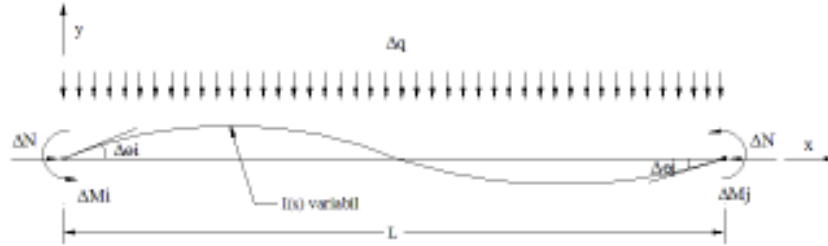


Fig. 3.3 Elementul de bară în sistemul de coordonate de bază. Modelul simplificat

În cazul particular al barei cu secțiune constantă ( $EI(x)=EI$ ), încărcate cu forță uniform distribuită, momentele încovoietoare din calculul de ordinul I și ordinul II pot fi exprimate în funcție de momentele încovoietoare de la capetele elementului ( $\Delta M_i, \Delta M_j$ ) astfel (Chiorean C. G., 2015):

$$\Delta M^I(x) = \Delta M_i \left( \frac{x}{L} - 1 \right) + \Delta M_j \frac{x}{L} + \frac{\Delta q L^2}{2} \frac{x}{L} \left( \frac{x}{L} - 1 \right) + \frac{f_y L \pi^2 N}{\pi^2} \sin \pi \frac{x}{L} \quad (3.39)$$

$$\Delta M^{II}(x) = \Delta M_i \frac{\sin v \left( \frac{x}{L} - 1 \right)}{\sin v} + \Delta M_j \frac{\sin v \frac{x}{L}}{\sin v} + \frac{\Delta q L^2}{v^2} \left[ \frac{\cos \left( v \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{L} \right) \right)}{\cos \frac{1}{2} v} - 1 \right] \quad (3.40)$$

Relația (3.38) între deplasările ( $\Delta \mathbf{u}_r$ ) și eforturile secționale nodale ( $\Delta \mathbf{s}_r = [\Delta M_i \quad \Delta M_j]^T$ ) mai poate fi exprimată prin intermediul matricei de flexibilitate ( $\mathbf{f}_r$ ) și a vectorului deplasărilor nodale provenite din încărcările uniform distribuite în lungul barei ( $\delta_r$ ), sub formă matriceală condensată astfel:

$$\Delta \mathbf{u}_r = \mathbf{f}_r \Delta \mathbf{s}_r + \delta_r \quad (3.41)$$

sau sub formă explicită ce va evidenția forma matricei de flexibilitate în calculul de ordinul al II-lea a barei cu secțiune variabilă, astfel:

$$\begin{bmatrix} \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \end{bmatrix} = \underbrace{\int_0^L \begin{bmatrix} \frac{x}{L} - 1 \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} \left[ \frac{1}{EI(\xi)} \right] \begin{bmatrix} \frac{\sin v \left( \frac{x}{L} - 1 \right)}{\sin v} & \frac{\sin v \frac{x}{L}}{\sin v} \end{bmatrix} dx}_{\mathbf{f}_r \text{ matricea de flexibilitate}} \begin{bmatrix} \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{bmatrix} + \delta_r \quad (3.42)$$

Făcând notația  $x=\xi/L$ , relația (3.42) se poate exprima sub formă matriceală condensată, astfel:

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta_i \\ \Delta\theta_j \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{b}^T \mathbf{f}_{st} \mathbf{B} dx \begin{bmatrix} \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{bmatrix} + \boldsymbol{\delta}_r \quad (3.43)$$

unde matricea de flexibilitate a elementului reprezentat în sistemul coordonatelor de bază este:

$$\mathbf{f}_r = \int_0^1 \mathbf{b}^T \mathbf{f}_{st} \mathbf{B} d\xi \quad (3.44)$$

unde

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= [1 - \xi \quad \xi] \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \frac{\sin \nu(\xi - 1)}{\sin \nu} & \frac{\sin \nu \xi}{\sin \nu} \end{bmatrix} \\ \mathbf{f}_{st} &= \begin{bmatrix} L \\ EI(\xi) \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\delta}_r &= \int_0^1 \mathbf{f}_{st} Q \mathbf{b}^T d\xi \\ Q &= \begin{bmatrix} \frac{\Delta q L^2}{\nu^2} \left( \frac{\cos \nu \left( \frac{1}{2} - \xi \right)}{\cos \frac{\nu}{2}} - 1 \right) + \frac{f_y L \pi^2 \Delta P}{\pi^2 - \nu^2} \sin \pi \xi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Relația incrementală *forță-deplasare* la nivel de element raportat la sistemul coordonatelor de bază poate fi stabilită prin inversarea relației (3.44).

Coeficientul de compresiune este  $\nu = L \sqrt{\frac{N}{EI(\xi)}}$ , fiind constant pe durata unui pas incremental.

Pentru calculul coeficientului de compresiune mediu  $\nu_m$  se propun două variante: prima implică calcularea coeficientului de compresiune în funcție de valoare maximă, respectiv minimă a momentului de inerție în lungul elementului, utilizând următoarea relație:  $\nu_m = \alpha \nu_{max} + (1 - \alpha) \nu_{min}$  unde  $\nu_{max} = L \sqrt{\frac{N}{EI_{min}}}$ ;  $\nu_{min} = L \sqrt{\frac{N}{EI_{max}}}$ . Pentru a obține rezultate cu precizie satisfăcătoare, în urma efectuării unor studii, se recomandă utilizarea unui coeficient  $\alpha$  cuprins între 0.3 și 0.5.

A doua metodă presupune determinarea momentului de inerție mediu și, apoi, evaluarea coeficientului de compresiune mediu astfel:  $\nu_m = L \sqrt{\frac{N}{EI_m}}$  unde

$$EI_m = \int_0^L EI(x) dx = EI_0 \int_0^L \frac{I(x)}{I_0} dx$$

$$\text{Sau scrisă sub formă adimensională: } EI_m = EI_0 L \int_0^1 \frac{I(\xi)}{I_0} d\xi.$$

Astfel, coeficientul de compresiune mediu mai poate fi exprimat:

$$\nu_m = L \sqrt{\frac{N}{EI_m}} = \sqrt{\frac{NL}{EI_0 \int_0^1 \frac{I(\xi)}{I_0} d\xi}}$$

unde  $I_m$  poate fi evaluat utilizând o metodă de integrare numerică.

### 3.4 Analiza barelor cu secțiune variabilă: modelul exact

Relația incrementală *forță-deplasare* la nivel de element se va determina pornind de la formula Maxwell-Mohr de calcul a deplasării generalizate la capetele elementului  $\Delta\delta_{i,\Delta N}$  din aplicarea unei forțe generalizate  $\Delta N$ , urmând apoi o sistematizare a rezultatelor în formă matriceală și evidențiind în acest fel în prima fază relația incrementală *deplasare-forță*, matricea de flexibilitate a elementului și vectorul deplasărilor rezultate din încărcările aplicate în lungul barei. În aplicarea relației Maxwell-Mohr, momentele încovoietoare din lungul barei, în calcul geometric neliniar, vor fi obținute prin integrarea ecuației diferențiale de echilibru a barei considerând ca și necunoscută principală momentul încovoietor. Prin inversarea relației *deplasare-forță* se va obține relația incrementală *forță-deplasare* cu evidențierea matricei de rigiditate incrementală și a vectorului forțelor nodale echivalente (Chiorean C. G., 2015).

Pentru exemplificarea acestui procedeu se consideră bara din Fig. 3.3, raportată la sistemul de coordonate de bază și încărcată cu forțele de capăt pe direcțiile gradelor de libertate reținute ( $\Delta M_i, \Delta M_j$ ) neluându-se în considerare gradul de libertate asociat deplasării axiale. În cazul aplicării unor forțe în lungul elementului aceste forțe sunt transformate în forțe echivalente la nodurile de capăt ale barei, neintervenind în expresia matricei de rigiditate (Chiorean C. G., 2009), (Chiorean C. G., 2015). Astfel, cu notațiile din Fig. 3.3, luând în considerare doar deformațiile de încovoiere, rotirile la cele două capete ale barei pot fi exprimate astfel:

$$\begin{aligned}\Delta\theta_i &= \int_0^L \frac{\partial\Delta M^I(x)}{\partial\Delta M_i} \cdot \frac{\Delta M^{II}(x)}{EI(x)} dx \\ \Delta\theta_j &= \int_0^L \frac{\partial\Delta M^I(x)}{\partial\Delta M_j} \cdot \frac{\Delta M^{II}(x)}{EI(x)} dx\end{aligned}\quad (3.46)$$

sau sub formă matriceală:

$$\Delta\mathbf{u}_r = \begin{bmatrix} \Delta\theta_i \\ \Delta\theta_j \end{bmatrix} = \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{\partial\Delta M^I(x)}{\partial\Delta M_i} \\ \frac{\partial\Delta M^I(x)}{\partial\Delta M_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta M^{II}(x) \\ EI(x) \end{bmatrix} dx = \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{\partial\Delta M^I(x)}{\partial\Delta M_i} \\ \frac{\partial\Delta M^I(x)}{\partial\Delta M_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ EI(x) \end{bmatrix} [\Delta M^{II}(x)] dx \quad (3.47)$$

unde cu indice superior (*I*) și (*II*) s-a marcat momentul încovoietor obținut din calculul de ordinul *I*, respectiv din calculul de ordinul *II* (efectul forței axiale asupra momentelor încovoietoare). Se menționează faptul că în prezenta formulare cuplajul eforturilor de încovoiere cu cel axial este ignorat și de asemenea efectul deformațiilor de lunecare provenite din acțiunea forțelor tăietoare nu este detaliat în dezvoltarea relațiilor de mai jos. Efectul deformațiilor de lunecare poate fi inclus în relațiile *forță-deplasare* urmând formularea dată în (Chiorean & Marchiș, 2016).

Relația (3.47) între deplasările ( $\Delta\mathbf{u}_r$ ) și eforturile secționale nodale ( $\Delta\mathbf{s}_r = [\Delta M_i \quad \Delta M_j]^T$ ) mai poate fi exprimată prin intermediul matricei de flexibilitate ( $\mathbf{f}_r$ ) și a vectorului deplasărilor nodale provenite din încărcările uniforme distribuite în lungul barei ( $\delta_r$ ), sub formă matriceală condensată astfel:

$$\Delta \mathbf{u}_r = \mathbf{f}_r \Delta \mathbf{s}_r + \delta_r \quad (3.48)$$

Prin inversarea relației de mai sus se obține relația incrementală forță-deplasare la nivel de element evidențiindu-se matricea de rigiditate și vectorul forțelor nodale echivalente.

Menționăm faptul că în cazul în care bara este cu *secțiune variabilă*, într-un calcul geometric neliniar, momentul încovoietor, într-o secțiune curentă “x” a barei, nu mai poate fi determinat cu exactitate, întrucât ecuația diferențială de echilibru devine una neliniară cu coeficienți variabili (modulul de rigiditate la încovoiere EI variază în lungul barei) și o soluție analitică a acestei ecuații este, în general, greu de obținut, în unele situații chiar imposibil, căutându-se o soluție numerică, dar care să păstreze caracterul general al formulării (Chiorean C. G., 2006), (Chiorean C. G., 2015). Prin urmare, în cele ce urmează se descrie succint un model propus de autorul lucrării pentru evaluarea numerică a momentului încovoietor în calculul geometric neliniar (considerarea efectului forței axiale de compresiune sau întindere în exprimarea condițiilor de echilibru la nivel de element) pentru cazul barelor cu secțiune variabilă. Considerând un element de bară Bernoulli–Euler cu secțiune variabilă supus la o încărcare uniform distribuită, Fig. 3.3, ecuația diferențială de echilibru, ținând cont de efectele combinate ale forței axiale de compresiune și a imperfecțiunilor geometrice inițiale, poate fi scrisă astfel, evidențiind ca și necunoscută principală momentul încovoietor:

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} + N \frac{M(x)}{EI(x)} - N \frac{d^2 y_0}{dx^2} = -q \quad (3.49a)$$

unde  $y_0$  este deplasarea cauzată de imperfecțiunile geometrice inițiale,  $M(x)$  și  $N(x)$  este momentul încovoietor, respectiv forța axială în secțiunea “x” a barei,  $EI(x)$  este rigiditatea barei în secțiunea “x” iar  $q$  este încărcare uniform distribuită pe bară. Rezolvarea ecuației diferențiale definită mai sus se bazează pe tehnica seriilor de puteri așa cum va fi detaliat în cele ce urmează. Trebuie menționat faptul că ecuația (3.49a) definește echilibrul elementului considerând bara încărcată cu forțele totale (momentul încovoietor M, forța axiala N, încărcarea uniform distribuită q). Ecuația diferențială incrementală se obține prin particularizarea ecuației de mai sus astfel (Chiorean & Marchiș, 2016):

$$\frac{d^2 \Delta M(x)}{dx^2} + N \frac{\Delta M(x)}{EI(x)} = -\Delta q \quad (3.49b)$$

*După cum se poate observa, forma incrementală de echilibru nu include expresiile imperfecțiunilor geometrice și prin urmare acest efect nu va fi inclus nici în expresia momentelor încovoietoare incrementale utilizate în deducerea relațiilor incrementale forță-deplasare așa cum a fost prezentat mai sus. Pentru includerea efectului imperfecțiunilor geometrice inițiale în analiza la nivel de element se aplică un procedeu predictor-corector detaliat în (Chiorean & Marchiș, 2016).*

### 3.4.1 Includerea efectelor din imperfecțiunile geometrice inițiale

Modelarea imperfecțiunilor geometrice inițiale se face adoptând o formă sinusoidală având o amplitudine inițială de  $f_y L$  la mijlocul deschiderii, Fig. 3.4. Prin urmare, deplasarea totală în lungul elementului are următoarea expresie:

$$y = y_M + y_0 \quad (3.50)$$

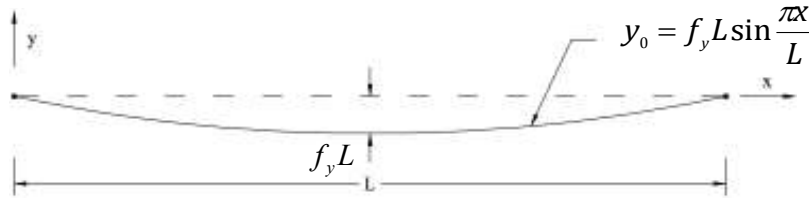


Fig. 3.4 Element de bară având imperfecțiuni geometrice inițiale

unde  $y_M$  și  $y_0$  sunt deplasările cauzate de forțele exterioare (momente încovoietoare și forță axială), respectiv de imperfecțiunile geometrice inițiale. Folosind dezvoltarea în *serii de puteri Taylor*, deplasarea suplimentară provenită din imperfecțiunile geometrice inițiale poate fi introdusă în ecuația diferențială de echilibru sub următoarea formă:

$$y_0 = f_y L \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left( \frac{\pi x}{L} \right)^n \quad (3.51)$$

unde

$$\beta_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{1}{n!} & \text{pentru } n \text{ impar} \\ 0 & \text{pentru } n \text{ par} \end{cases}$$

### 3.4.2 Determinarea matricei de rigiditate și a vectorului forțelor nodale echivalente

În cele ce urmează se detaliază metoda propusă pentru rezolvarea ecuației diferențiale (3.49a), cazul ecuației diferențiale incrementale (3.49b) urmează același procedeu cu deosebirea că termenii asociați imperfecțiunilor geometrice inițiale nu vor fi incluși în rezolvare.

Introducând notația  $\xi = x/L$ , relația (3.49) se trece la o formă adimensională, astfel:

$$EI(\xi) \frac{d^2 M(\xi)}{d\xi^2} + NL^2 M(\xi) + NEI(\xi) (f_y L \pi^2 \sin(\pi \xi)) = -q L^2 EI(\xi) \quad (3.52)$$

Rezolvarea ecuației diferențiale de ordinul al II-lea se face prin exprimarea principalelor necunoscute în serii de puteri cu introducerea următoarelor notații:

$$\alpha(\xi) = EI(\xi) = \sum_{n=0}^{NTF} \alpha_n \xi^n$$

$$M(\xi) = \sum_{n=0}^{NTF} m_n \xi^n \quad (3.53)$$

$$\sin(\pi\xi) = \sum_{n=0}^{NTF} \beta_n (\pi\xi)^n$$

unde  $\alpha_n, m_n$  sunt constante iar NTF este numărul de termeni în funcția polinomială. Înlocuind ecuațiile (3.53) în ecuația (3.52) și efectuând înmulțirea seriilor obținem:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{NTF} \xi^n \cdot \left( \sum_{i=0}^n \alpha_i (n+2-i)(n+1-i) \cdot m_{n+2-i} \right) + NL^2 \sum_{n=0}^{NTF} m_n \xi^n + \\ + NfyL\pi^2 \sum_{n=0}^{NTF} \xi^n \left( \sum_{i=0}^n \alpha_i \beta_{n-i} (\pi)^{n-i} \right) = -qL^2 \sum_{n=0}^{NTF} \alpha_n \xi^n \end{aligned} \quad (3.54)$$

Ținând cont de principiul că coeficienții factorilor  $\xi$  cu aceeași putere trebuie să fie egali în ambele părți ale ecuației (3.54) avem:

$$\left\{ \begin{aligned} (2\alpha_0 m_2) + NL^2 m_0 + NfyL\pi^2 \alpha_0 \beta_0 (\pi)^0 &= -qL^2 \alpha_0 \quad \text{pentru } n=0 & (3.55a) \\ (n+2)(n+1)\alpha_0 m_{n+2} + \sum_{i=1}^n \alpha_i (n+2-i)(n+1-i) m_{n+2-i} + NL^2 m_n + \\ + NfyL\pi^2 \sum_{i=0}^n \alpha_i \beta_{n-i} (\pi)^{n-i} &= -qL^2 \alpha_n \quad \text{pentru } n \geq 1 & (3.55b) \end{aligned} \right.$$

Din ecuația (3.55b) putem deduce formula de recurență pentru  $m$ , astfel:

$$m_{n+2} = \frac{-qL^2 \alpha_n - \sum_{i=1}^n \alpha_i (n+2-i)(n+1-i) m_{n+2-i} - NL^2 m_n - NfyL\pi^2 \sum_{i=0}^n \alpha_i \beta_{n-i} (\pi)^{n-i}}{(n+2)(n+1)\alpha_0} \quad (3.56)$$

Utilizând ecuația (3.62), soluția generală a momentului încovoietor  $M(\xi)$  poate fi exprimată în funcție de 3 constante ( $m_0, m_1, m_2$ ) și patru funcții ( $M_1^*(\xi), M_2^*(\xi), M_3^*(\xi), q_m(\xi)$ ), după cum urmează:

$$M(\xi) = m_0 M_1^*(\xi) + m_1 M_2^*(\xi) + m_2 M_3^*(\xi) + q_m(\xi) \quad (3.57)$$

Știm că :

$$M(\xi) = \sum_{n=0}^{NTF} m_n \xi^n = m_0 \xi^0 + m_1 \xi^1 + m_2 \xi^2 + m_3 \xi^3 + m_4 \xi^4 + m_5 \xi^5 + \dots + m_{NTF} \xi^{NTF} \quad (3.58a)$$

$$\begin{aligned} M(\xi) = m_0 \xi^0 + m_1 \xi^1 + m_2 \xi^2 + \xi^3 \left[ \frac{-qL^2 \alpha_1 - 2\alpha_1 m_2 - NL^2 m_1 - Nfy\pi^2 (\alpha_0 \beta_1 \pi^1 + \alpha_1 \beta_0 \pi^0)}{3 \cdot 2 \cdot \alpha_0} \right] + \\ + \xi^4 \left[ \frac{-qL^2 \alpha_2 - 3 \cdot 2\alpha_1 m_3 - 2\alpha_2 m_2 - NL^2 m_2 - Nfy\pi^2 (\alpha_0 \beta_2 \pi^2 + \alpha_1 \beta_1 \pi^1 + \alpha_2 \beta_0 \pi^0)}{4 \cdot 3 \cdot \alpha_0} \right] + \\ + \xi^5 \left[ \frac{-qL^2 \alpha_3 - 4 \cdot 3\alpha_1 m_4 - 3 \cdot 2\alpha_2 m_3 - 2\alpha_3 m_2 - NL^2 m_3 - Nfy\pi^2 (\alpha_0 \beta_3 \pi^3 + \alpha_1 \beta_2 \pi^2 + \alpha_2 \beta_1 \pi^1 + \alpha_3 \beta_0 \pi^0)}{5 \cdot 4 \cdot \alpha_0} \right] + \\ + \xi^6 \left[ \frac{-qL^2 \alpha_4 - 5 \cdot 4\alpha_1 m_5 - 4 \cdot 3\alpha_2 m_4 - 3 \cdot 2\alpha_3 m_3 - 2\alpha_4 m_2}{6 \cdot 5 \cdot \alpha_0} + \right] \end{aligned} \quad (3.58b)$$



$$+ \frac{-NL^2 m_4 - Nfy\pi^2(\alpha_0\beta_4\pi^4 + \alpha_1\beta_3\pi^3 + \alpha_2\beta_2\pi^2 + \alpha_3\beta_1\pi + \alpha_4\beta_0\pi^0)}{6 \cdot 5 \cdot \alpha_0} \Big] + \dots$$

sau dacă rearanjăm ecuația (3.58b) avem:

$$M(\xi) = m_0 \xi^0 + m_1 (\xi^1 + \gamma_3 \xi^3 + \gamma_4 \xi^4 + \gamma_5 \xi^5 + \dots) + \\ + m_2 (\xi^2 + \nu_3 \xi^3 + \nu_4 \xi^4 + \nu_5 \xi^5 + \dots) + (\lambda_3 \xi^3 + \lambda_4 \xi^4 + \lambda_5 \xi^5 + \dots) \quad (3.59)$$

unde

$$\gamma_n = \frac{-\sum_{i=3}^{n-1} i(i-1) \gamma_i \alpha_{(n-i)} - NL^2 \gamma_{(n-2)}}{n(n-1) \alpha_0}; \quad \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = \frac{-NL^2}{3 \cdot 2 \alpha_0}$$

$$\nu_n = \frac{-\sum_{i=3}^{n-1} i(i-1) \nu_i \alpha_{(n-i)} - 2 \alpha_{(n-2)} - NL^2 \nu_{(n-2)}}{n(n-1) \alpha_0}; \quad \nu_1 = 0, \nu_2 = 1, \nu_3 = \frac{-2 \alpha_1}{3 \cdot 2 \alpha_0}$$

$$\lambda_n = \frac{-qL^2 \alpha_{(n-2)} - \sum_{i=3}^{n-1} i(i-1) \lambda_i \alpha_{(n-i)} - NL^2 \lambda_{(n-2)} - NfyL\pi^2 \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i \beta_{n-2-i} (\pi)^{n-2-i}}{n(n-1) \alpha_0} \quad (3.60)$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \frac{-qL^2 \alpha_1 - NfyL\pi^2(\alpha_0\beta_1\pi + \alpha_1\beta_0\pi^0)}{3 \cdot 2 \alpha_0}$$

Dacă echivalăm relațiile (3.57) cu (3.65) ne rezultă funcțiile  $M_1^*(\xi)$ ,  $M_2^*(\xi)$ ,  $M_3^*(\xi)$ ,  $q_m(\xi)$ , astfel:

$$M_1^*(\xi) = \xi^0 = 1$$

$$M_2^*(\xi) = \xi^1 + \gamma_3 \xi^3 + \gamma_4 \xi^4 + \gamma_5 \xi^5 + \dots + \gamma_{NTF} \xi^{NTF}$$

$$M_3^*(\xi) = \xi^2 + \nu_3 \xi^3 + \nu_4 \xi^4 + \nu_5 \xi^5 + \dots + \nu_{NTF} \xi^{NTF} \quad (3.61)$$

$$q_m(\xi) = \lambda_3 \xi^3 + \lambda_4 \xi^4 + \lambda_5 \xi^5 + \dots + \lambda_{NTF} \xi^{NTF}$$

Pentru a determina constantele  $m_0, m_1, m_2$  se pun condițiile:

$$\begin{cases} (2 \alpha_0 m_2) + NL^2 m_0 = -q L^2 \alpha_0 \\ Mi = M(0) = m_0 \cdot 1 \\ Mj = M(1) = m_0 M_1^*(1) + m_1 M_2^*(1) + m_2 M_3^*(1) + q_m(1) \end{cases} \quad (3.62)$$

iar după rearanjarea ecuațiilor rezultă:

$$\begin{cases} m_2 = \frac{-q L^2 \alpha_0 - NL^2 m_0}{2 \alpha_0} = Mi \left[ \frac{-NL^2}{2 \alpha_0} \right] + \left[ \frac{-q L^2 \alpha_0}{2 \alpha_0} \right] = Mi\psi_{21} + Mj\psi_{22} + \psi_{23} \\ m_0 = Mi \\ m_1 = Mi \left[ \frac{NL^2 M_3^*(1) - M_1^*(1)}{M_2^*(1)} \right] + Mj \left[ \frac{1}{M_2^*(1)} \right] + \left[ \frac{-q_m(1) + \frac{q L^2}{2} M_3^*(1)}{M_2^*(1)} \right] = Mi\psi_{11} + Mj\psi_{12} + \psi_{13} \end{cases} \quad (3.63)$$

unde pentru simplificarea calculului s-au introdus următoarele notații:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{21} = \frac{-NL^2}{2\alpha_0}; \psi_{22} = 0; \psi_{23} = \frac{-qL^2\alpha_0}{2\alpha_0} \\ \psi_{11} = \frac{\frac{NL^2}{2\alpha_0}M_3^*(1) - M_1^*(1)}{M_2^*(1)}; \psi_{12} = \left[ \frac{1}{M_2^*(1)} \right]; \psi_{13} = \frac{-q_m(1) + \frac{qL^2}{2}M_3^*(1)}{M_2^*(1)} \end{array} \right. \quad (3.64)$$

Ecuatia (3.57) a momentului încovoietor în secțiunea curentă  $\xi$  devine:

$$M(\xi) = Mi M_1^*(\xi) + (Mi \psi_{11} + Mj \psi_{12} + \psi_{13}) M_2^*(\xi) + (Mi \psi_{21} + Mj \psi_{22} + \psi_{23}) M_3^*(\xi) + q_m(\xi) \quad (3.65)$$

sau după rearanjarea termenilor:

$$M(\xi) = Mi [M_1^*(\xi) + \psi_{11} M_2^*(\xi) + \psi_{21} M_3^*(\xi)] + Mj [\psi_{12} M_2^*(\xi) + \psi_{22} M_3^*(\xi)] + [q_m(\xi) + \psi_{13} M_2^*(\xi) + \psi_{23} M_3^*(\xi)] \quad (3.66)$$

Cu această expresie a momentului încovoietor relația (3.46), ce stabilește *relația deplasare-forță* pentru elementul de bară, devine:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{bmatrix} = \frac{L}{EI(0)} \left[ \begin{array}{cc} \int_0^1 \frac{(M_1^*(\xi) + \psi_{11} M_2^*(\xi) + \psi_{21} M_3^*(\xi)) \cdot (1-\xi)}{\frac{I(\xi)}{I(0)}} d\xi & \int_0^1 \frac{(\psi_{12} M_2^*(\xi) + \psi_{22} M_3^*(\xi)) \cdot (1-\xi)}{\frac{I(\xi)}{I(0)}} d\xi \\ \int_0^1 \frac{(M_1^*(\xi) + \psi_{11} M_2^*(\xi) + \psi_{21} M_3^*(\xi)) \cdot \xi}{\frac{I(\xi)}{I(0)}} d\xi & \int_0^1 \frac{(\psi_{12} M_2^*(\xi) + \psi_{22} M_3^*(\xi)) \cdot \xi}{\frac{I(\xi)}{I(0)}} d\xi \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} M_i \\ M_j \end{bmatrix} + \\ + \frac{L}{EI(0)} \left[ \begin{array}{c} \int_0^1 \frac{(q_m(\xi) + \psi_{13} M_2^*(\xi) + \psi_{23} M_3^*(\xi)) \cdot (1-\xi)}{\frac{I(\xi)}{I(0)}} d\xi \\ \int_0^1 \frac{(q_m(\xi) + \psi_{13} M_2^*(\xi) + \psi_{23} M_3^*(\xi)) \cdot \xi}{\frac{I(\xi)}{I(0)}} d\xi \end{array} \right] \end{aligned} \quad (3.67)$$

sau exprimată în formă matriceală condensată:

$$\begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{b}^T \mathbf{f}_{st} \mathbf{B} d\xi \begin{bmatrix} M_i \\ M_j \end{bmatrix} + \boldsymbol{\delta}_r \quad (3.68)$$

unde

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= [1-\xi \quad \xi] \\ \mathbf{B} &= \left[ (M_1^*(\xi) + \psi_{11} M_2^*(\xi) + \psi_{21} M_3^*(\xi)) \quad (\psi_{12} M_2^*(\xi) + \psi_{22} M_3^*(\xi)) \right] \\ \mathbf{f}_{st} &= \left[ \frac{L}{EI(\xi)} \right] \\ \boldsymbol{\delta}_r &= \int_0^1 \mathbf{f}_{st} Q \mathbf{b}^T d\xi \\ Q &= \left[ (q_m(\xi) + \psi_{13} M_2^*(\xi) + \psi_{23} M_3^*(\xi)) \right] \end{aligned}$$

Relația *forță-deplasare* se stabilește prin inversarea relației de mai sus rezultând expresiile pentru coeficienții matricei de rigiditate, precum și vectorul forțelor nodale echivalente:

**Pagină eliminată din conținutul electronic al acestei lucrări.**

$$V_{\xi=0} = \frac{1}{L}(Mi \psi_{11} + Mj \psi_{12} + \psi_{13}) \quad (3.73)$$

sau

$$V_{\xi=0} = \frac{qL}{2} \frac{\left[ Mi \left( \frac{N}{q\alpha_0} M_3^*(1) - \frac{2}{qL^2} M_1^*(1) \right) + Mj \frac{2}{qL^2} + \left( M_3^*(1) - \frac{2q_m(1)}{qL^2} \right) \right]}{M_2^*(1)} \quad (3.74)$$

$$V_{\xi=1} = qL - V_{\xi=0}$$

### 3.5 Integrarea funcțiilor neliniare

Odată cu creșterea performanței calculatoarelor, utilizarea și îmbunătățirea metodelor numerice au devenit subiect de interes pentru mulți cercetători. De-alungul anilor au fost dezvoltate numeroase aplicații pentru rezolvarea problemelor matematice întâlnite în practică. Totuși, utilizarea inteligentă a produselor software performante implică înțelegerea în profunzime a metodelor numerice. Astfel, pentru obținerea unor rezultate cât mai apropiate de soluțiile exacte ale problemei studiate, utilizarea algoritmului numeric să fie optimă.

Pentru evaluarea integralelor unor funcții, în literatura de specialitate sunt menționate numeroase metode numerice dintre care, pentru analizele cu element finit, trei sunt mai des utilizate și anume cuadratura Newton-Cotes, cuadratura Gauss-Legendre respectiv Gauss-Lobatto. Cuadratura Newton-Cotes utilizează pentru aproximarea funcției  $f(x)$  polinoamele de interpolare Lagrange. Punctele de integrare sunt echidistante și includ capetele intervalului. Ca și cazuri particulare ale cuadraturii Newton-Cotes amintim formula trapezelor, regula 1/3, respectiv 3/8 a lui Simpson. Cuadratura Newton-Cotes este folosită cu precădere la analize neliniare (Bathe K.-J. , 1996). Spre deosebire de metoda Newton-Cotes, la cuadraturile Gauss-Legendre și Gauss-Lobatto pasul de integrare nu mai este considerat constant iar punctele de diviziune reprezintă rădăcinile unor polinoame ortogonale Legendre. Aceste metode reduc eroarea de integrare printr-o alegere optimizată a rețelei de puncte de integrare. Metodele Gauss-Legendre și Gauss-Lobatto sunt mai eficiente la analizele structurilor în element finit (Bathe K.-J. , 1996).

În Anexa D sunt prezentate trei dintre aceste metode și anume: regula 3/8 a lui Simpson și cuadraturile Gauss-Legendre și Gauss Lobatto.

Pentru evaluarea coeficienților matricelor caracteristice deduse în secțiunea anterioară se propune utilizarea metodei de cuadratura Gauss-Lobatto întrucât necesită un număr de puncte de integrare optimizat și, spre deosebire de metoda Gauss-Legendre, prevede puncte de integrare și la capetele elementului.

### 3.6 Studii numerice pentru calibrarea modelului numeric propus

Pentru a verifica eficiența și acuratețea modelului de calcul sunt efectuate diferite teste numerice privind convergența metodelor de integrare respectiv alegerea numărului adecvat de

termeni în funcția polinomială. Pentru evaluarea absciselor și ponderilor, în cazul cuadraturilor Gauss, se vor utiliza subrutinele propuse de Greg von Winckel (Winckel, www.mathworks.com). În continuare sunt prezentate câteva exemple numerice analizate de alți autori iar rezultatele obținute, confirmă performanța metodei propuse.

### 3.6.1 Element cu secțiune circulară și înălțime variabilă. Determinarea funcțiilor de stabilitate

În acest exemplu se studiază bara cu secțiune circulară și înălțime variabilă din Fig. 3.5, solicitată la forță axială, care a fost analizat anterior de (Al-Sarraf, 1979), (Al-Sadder, 2004). Pentru a determina răspunsul elastic al barelor cu secțiune variabilă, (Al-Sarraf, 1979) derivează funcțiile de stabilitate pentru diferite forme ale secțiunii transversale, însă doar pentru compresiune. Apoi, Al-Sadder (2004) rezolvă ecuația diferențială de ordinul al IV-lea cu coeficienți variabili, având ca necunoscută principală deplasarea. Modelul abordat este cel bazat pe dezvoltare în serii de puteri, luând în considerare efectul forței axiale, ignorând efectul forței tăietoare.

Funcția de variație a momentului de inerție poate fi exprimată astfel:

$$I(\xi) = I_A \left[ \frac{1}{\beta} + C_1 L(1 - \xi) \right]^4 \quad (3.75)$$

unde

$$C_1 = \frac{1}{L} \left( 1 - \frac{1}{\beta} \right) \text{ și } \beta = \frac{d_A}{d_B} \quad (3.76)$$

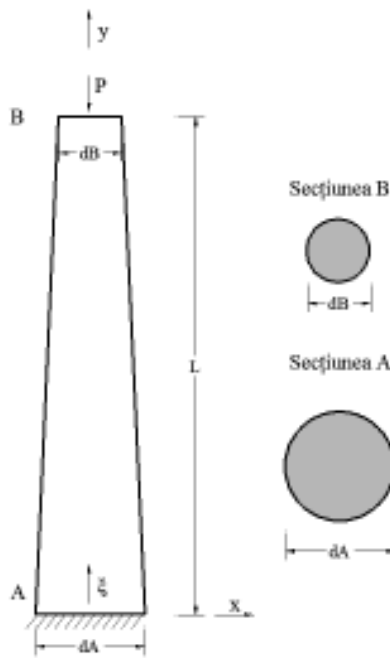


Fig. 3.5 Configurație geometrică bară cu secțiune circulară și înălțime variabilă (Al-Sadder, 2004)

Pentru a verifica precizia funcțiilor de stabilitate (coeficienții de rigiditate) evaluate cu modelul numeric propus s-au efectuat numeroase studii pentru diferite rapoarte ale diametrelor

secțiunilor transversale de capăt, bara fiind solicitată la o forță axială având un coeficient de încărcare  $\lambda_B = \frac{P}{P_{E\}B}$  unde  $P$  este forța axială aplicată iar  $P_{E\}B$  este forța axială critică (Euler) a elementului de bară având momentul de inerție de la capătul B,  $P_{E\}B = \frac{\pi^2 EI_B}{L^2}$ . Coeficienții de flexibilitate au fost evaluați utilizând metoda Gauss-Legendre cu 10 puncte de integrare în lungul elementului și 40 termeni în expresia funcției polinomiale. Rezultatele centralizate în Fig. 3.6 - Fig. 3.8 confirmă performanța modelului de calcul propus.

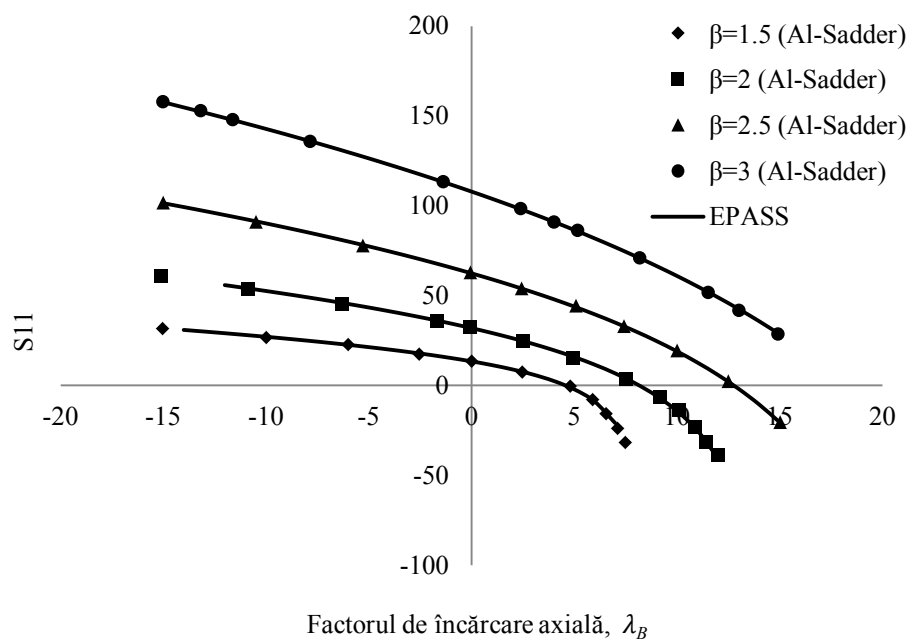


Fig. 3.6 Funcția S11 pentru bara cu secțiune circulară și înălțime variabilă

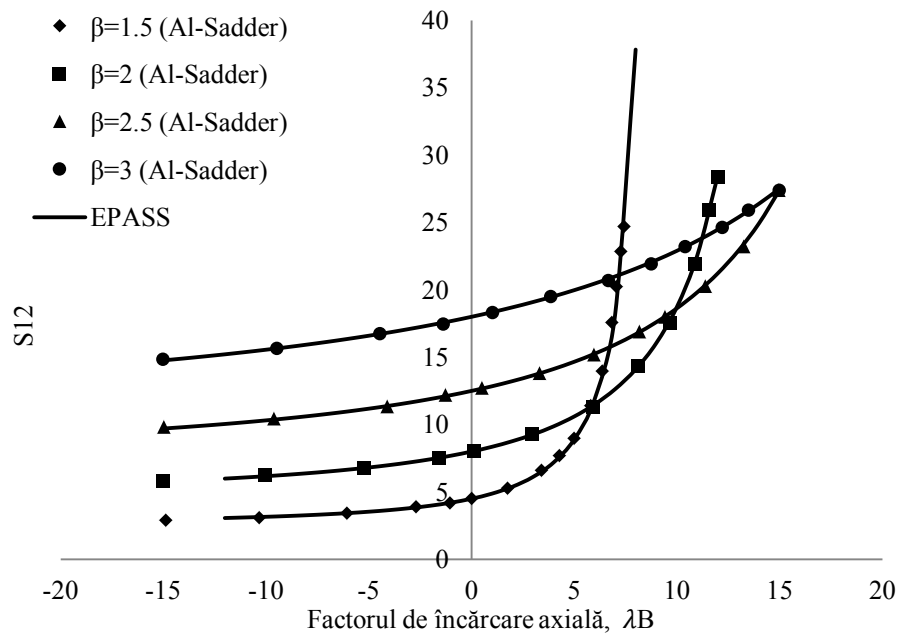


Fig. 3.7 Funcția  $S_{12}$  pentru bara cu secțiune circulară și înălțime variabilă

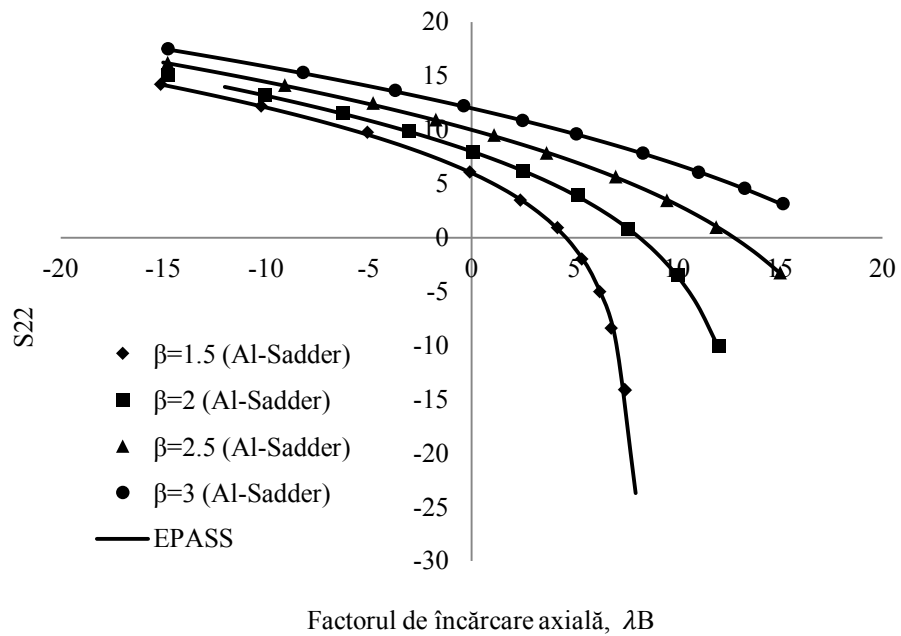


Fig. 3.8 Funcția  $S_{22}$  pentru bara cu secțiune circulară și înălțime variabilă

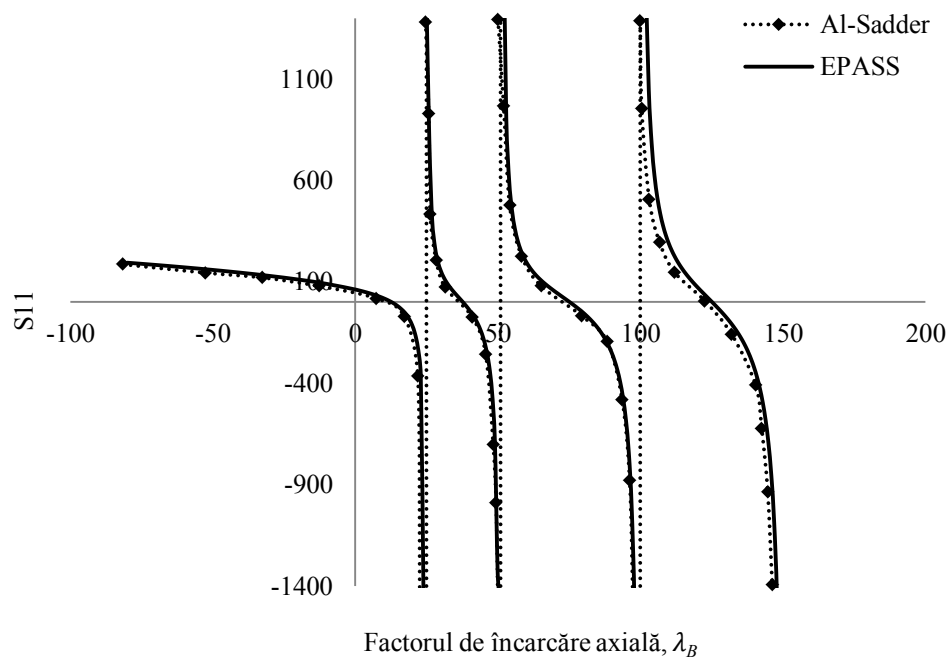


Fig. 3.9 Funcția  $S_{11}$  pentru bara cu secțiune circulară și înălțime variabilă ( $\beta=2.5$ ) pentru coeficienți mari de încărcare axială

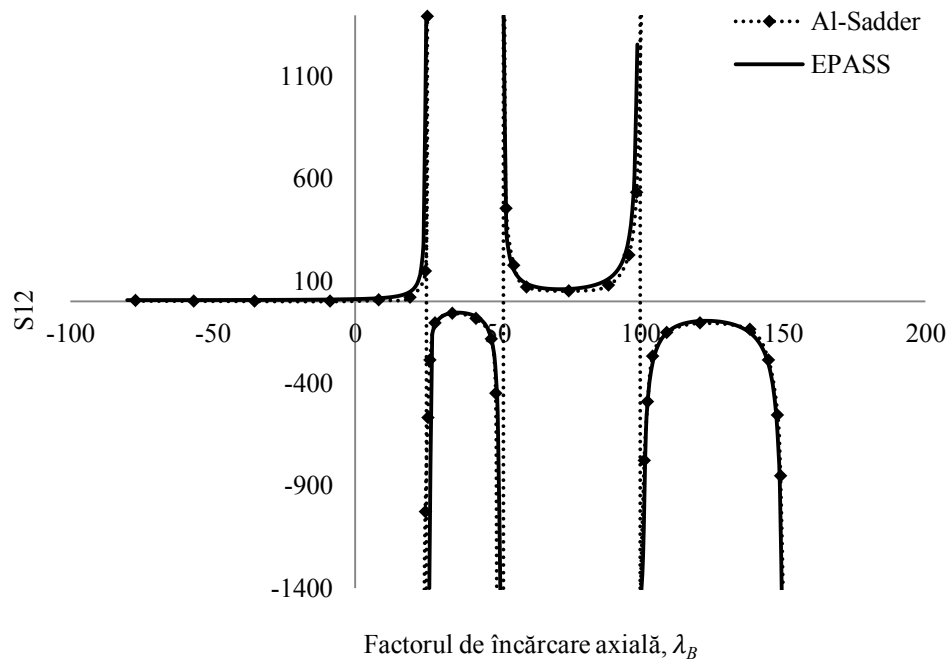


Fig. 3.10 Funcția  $S_{12}$  pentru bara cu secțiune circulară și înălțime variabilă ( $\beta = 2.5$ ) pentru coeficienți mari de încărcare axială



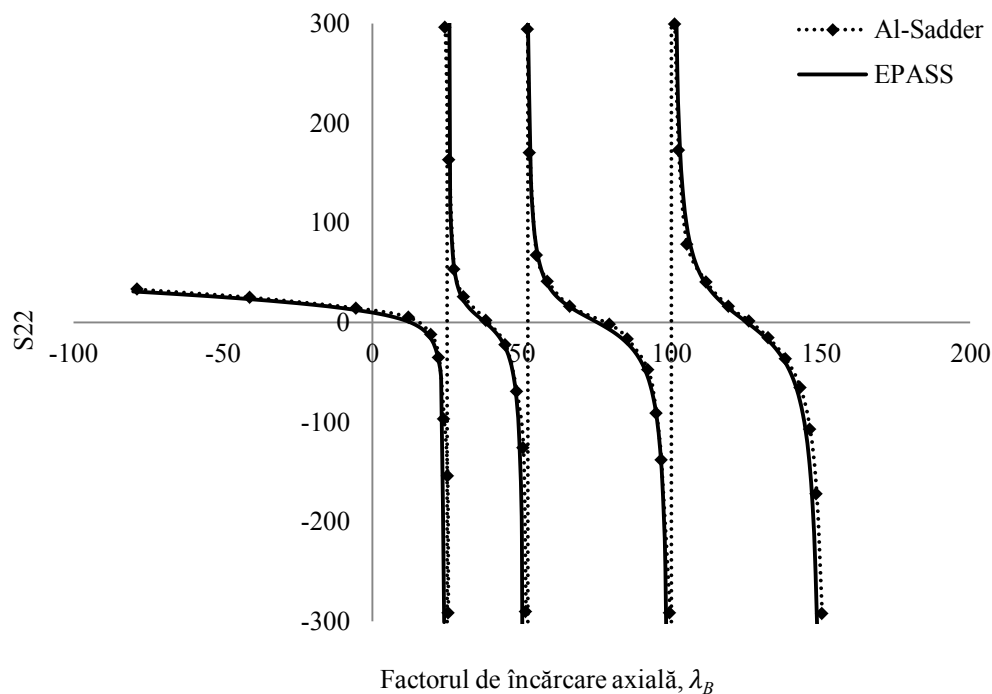


Fig. 3.11 Funcția  $S_{22}$  pentru bara cu secțiune circulară și înălțime variabilă ( $\beta = 2.5$ ) pentru coeficienți mari de încărcare axială

Pentru a verifica stabilitatea procedurii numerice propus, se evaluează funcțiile de stabilitate pentru bara cu secțiune circulară variabilă având raportul secțiunilor transversale de capăt  $\beta = 2.5$  și supusă la coeficienți mari de încărcare axială,  $\lambda_B$ . În analizele efectuate s-au considerat 10 puncte de integrare în lungul elementului iar metoda de integrare utilizată este Gauss-Legendre. Studiile comparative au fost centralizate în Fig. 3.9 - Fig. 3.11, iar în urma interpretării rezultatelor s-a constatat că un număr de 40 de termeni în exprimarea funcției polinomiale este suficient pentru surprinderea acurateții rezultatelor, spre deosebire de modelul prezentat de (Al-Sadder, 2004) care are nevoie de un număr de peste 60 de termeni.

Totuși, în realitate, un element nu este solicitat la forțe axiale de compresiune de asemenea magnitudine. Din aceste considerente, autorul a considerat necesar și relevant analiza barei cu secțiune variabilă încărcată cu o forță axială de compresiune  $P = P_{E\}B$ . În Fig. 3.12, s-au pus în evidență rezultatele analizelor barei cu secțiune circulară pentru diferite rapoarte ale secțiunilor transversale de capăt  $\beta = 1.5, 2, 2.5, 3$ . Se constată că 8-9 termeni este suficient pentru obținerea unor rezultate cu precizie satisfăcătoare, care conduc la înregistrarea unor erori sub 5%.

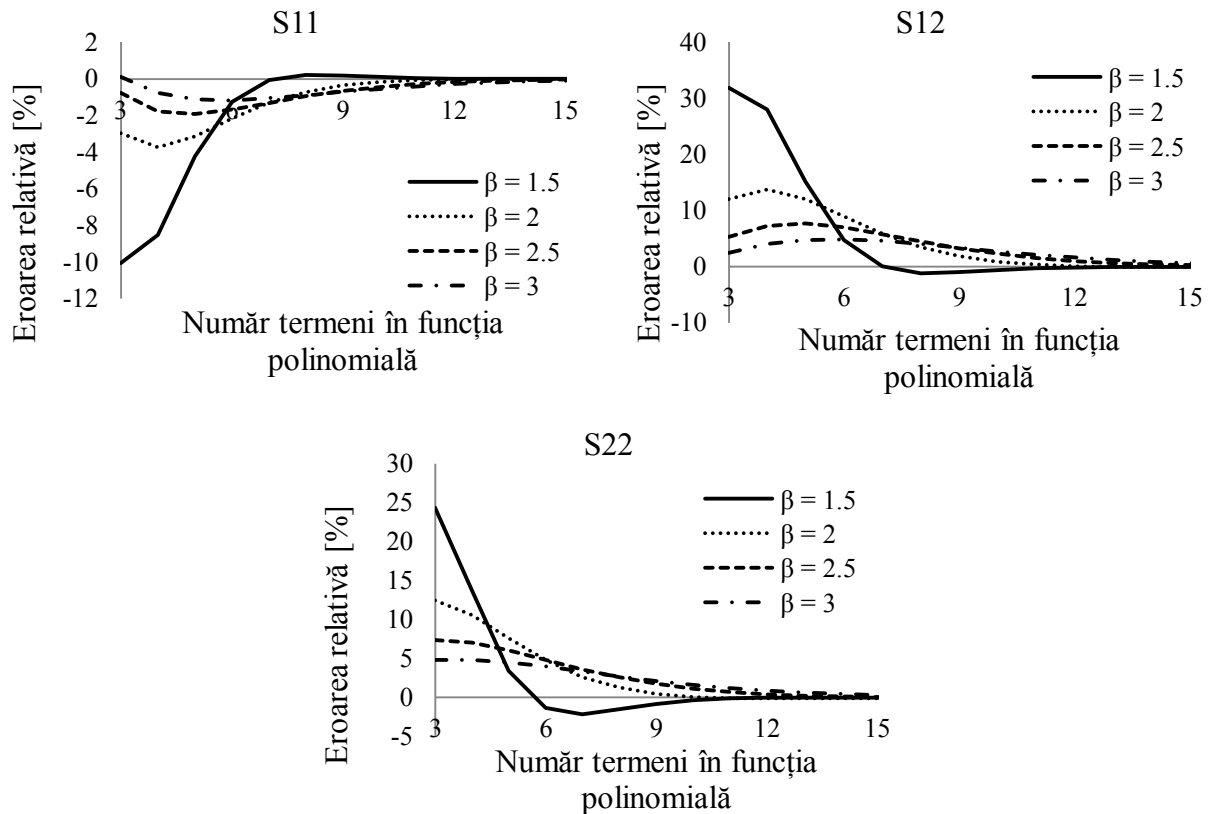


Fig. 3.12 Funcțiile de stabilitate pentru bara neprismatică cu secțiune circulară având coeficientul de compresiune axială  $\lambda_B = 1$ .

### 3.6.2 Element cu secțiune dreptunghiulară și înălțime variabilă. Determinarea funcțiilor de stabilitate

Funcțiile de stabilitate pentru bara cu secțiune dreptunghiulară și înălțime variabilă din Fig. 3.13 sunt determinate și comparate cu rezultatele din (Al-Sadder, 2004). În studiile efectuate se consideră diferite rapoarte ale secțiunilor transversale de capăt ( $\beta = 1.5 - 3$ ) ale barei încărcate cu o forță axială (compresiune sau întindere). Modulul de elasticitate al barei s-a considerat 206 GPA. Metoda de integrare utilizată este Gauss-Legendre cu 10 puncte de integrare/bară iar pentru surprinderea acurateții rezultatelor s-a constatat că 40 de termeni în exprimarea funcției polinomiale este suficient. Funcția de variație a momentului de inerție are următoarea formă:

$$I_{z(\xi)} = I_A [1 + C_2(\xi L)^2]^3 \quad (3.77)$$

unde

$$C_2 = \frac{1 - \beta}{\beta L^2} \quad (3.78)$$

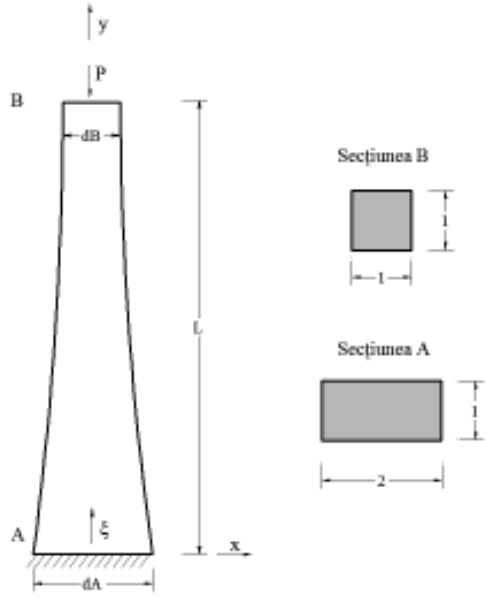


Fig. 3.13 Configurație geometrică bară cu secțiune dreptunghiulară și înălțime variabilă (Al-Sadder, 2004)

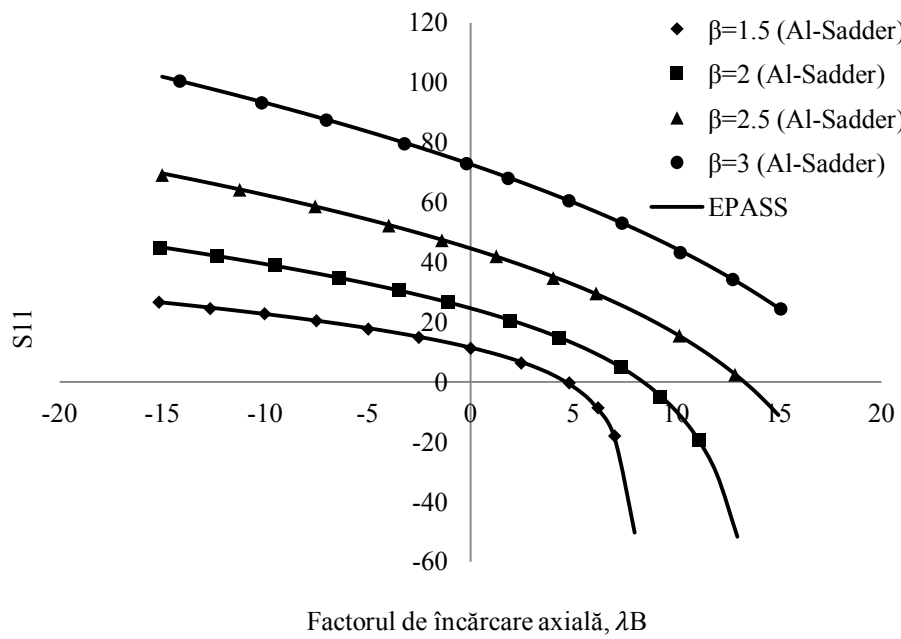


Fig. 3.14 Funcția  $S11$  pentru bara cu secțiune dreptunghiulară și înălțime variabilă

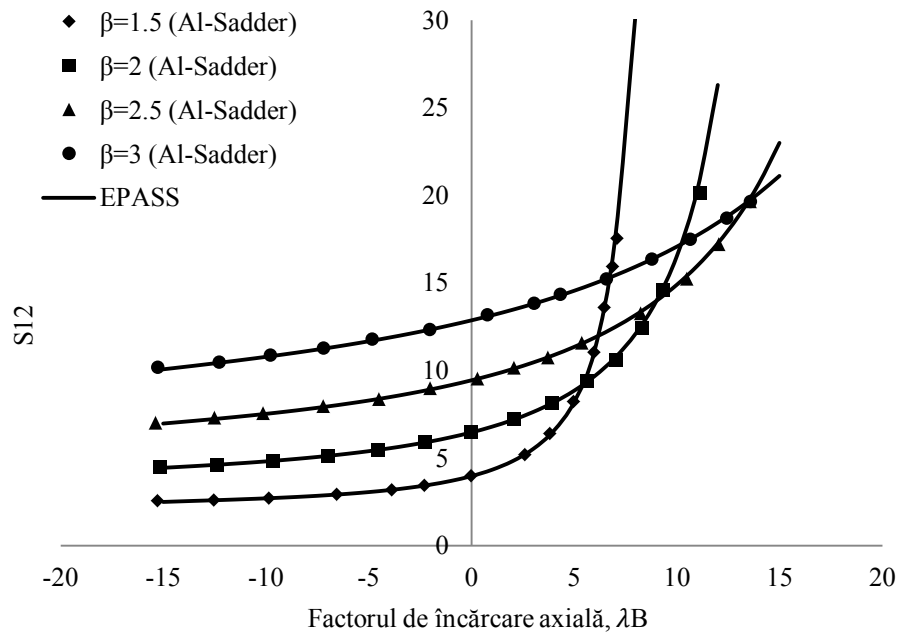


Fig. 3.15 Funcția  $S_{12}$  pentru bara cu secțiune dreptunghiulară și înălțime variabilă

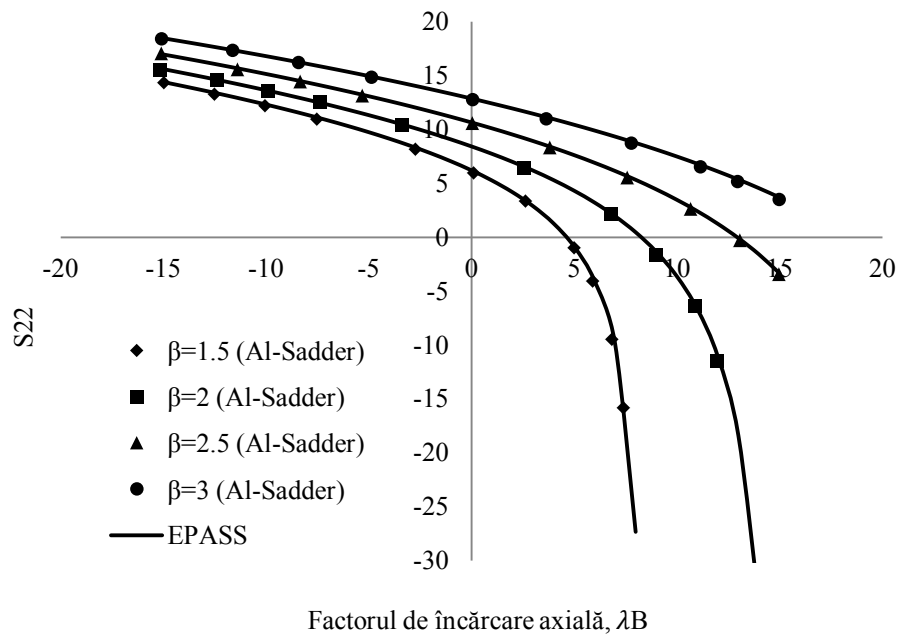


Fig. 3.16 Funcția  $S_{22}$  pentru bara cu secțiune dreptunghiulară și înălțime variabilă

În Fig. 3.14 – Fig. 3.16 au fost centralizate funcțiile de stabilitate ale barei solicitate axial pentru un factor de încărcare axială  $\lambda_B = \frac{P}{P_{E\}B}$  unde  $P$  este forța axială aplicată iar  $P_{E\}B$  este forța axială critică (Euler) a elementului de bară având momentul de inerție de la capătul B,  $P_{E\}B = \frac{\pi^2 EI_B}{L^2}$ . În urma interpretării rezultatelor s-a constatat o foarte bună corelație între modelul numeric propus și metoda propusă de Al-Sadder (Al-Sadder, 2004), însă considerând mai puțini termeni în funcția polinomială.

### 3.6.3 Bară cu secțiune I și înălțime variabilă. Deplasarea maximă ținând cont de efectul defomațiilor de lunecare.

Următorul exemplu prezentat este cu scopul de a confirma performanța și eficiența metodei propuse în surprinderea efectelor cuplate din deforțațiile de lunecare datorate forței tăietoare și efectul neliniarității geometrice locale. În acest sens, se consideră bara simplu rezemată cu secțiune variabilă din Fig. 3.17, care a fost studiată anterior de Li & Li (2002) și Hadidi, Azar, & Marand (2014). Înălțimea secțiunii transversale a barei variază liniar de la 400mm (Secțiunea A) la 200mm (Secțiunea B). Bara este comprimată centric și încărcată cu o forță concentrată la mijlocul deschiderii în planul de rigiditate maxim. Li & Li (2002) și Hadidi, Azar, & Marand (2014) au rezolvat ecuația diferențială de ordinul al II-lea pentru bare cu secțiune variabilă cu polinomul Cebîșev având necunoscuta în deplasare, considerând simultan efectele forței axiale și ale deforțațiilor de lunecare, utilizând două elemente pentru modelarea barei; cei din urmă incluzând și forțele în cuprinsul barei. În abordarea propusă au fost utilizate două elemente cu câte 5 puncte de integrare pentru a modela bara cu secțiune variabilă. Deplasarea maximă în lungul elementului a fost evaluată considerând două ipoteze de încărcare, și anume: cu includerea sau nu a efectului deforțațiilor de lunecare. De asemenea, studii privind influența numărului de termeni considerați în seria de puteri au fost incluse în analizele întreprinse.

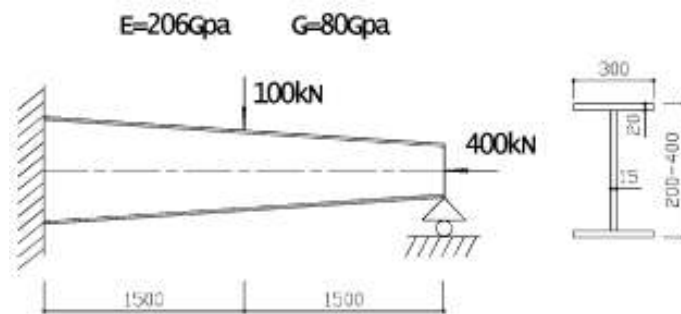


Fig. 3.17 Bară cu secțiune I și înălțime variabilă solicitată la compresiune cu forță concentrată la mijlocul deschiderii (Li & Li, 2002)

Tabel 3.1 Deplasarea maximă la mijlocul deschiderii

Metoda	Deplasarea la mijlocul deschiderii [mm]					
	Caz A			Caz B		
Li & Li (2002)	0.4091			0.6716		
MEF (Li & Li, 2002)	0.4110			0.6733		
Hadidi, Azar, & Marand (2014)	0.409			0.639		
EPASS	5	10	20	5	10	20
	NTF	NTF	NTF	NTF	NTF	NTF
	0.40879	0.40876	0.40876	0.66842	0.66841	0.66841

Caz A: ignorarea efectelor forței tăietoare, Caz B: includerea efectului forței tăietoare.

NTF – număr termeni în funcția polinomială.

Rezultatele analizelor au fost centralizate în Tabel 3.1 și, după cum se poate observa, există o bună concordanță între rezultatele obținute cu programul EPASS și cele obținute de Li & Li (2002) și Hadidi și al. (2014). Mai mult, se constată că un număr mic de termeni este suficient pentru obținerea convergenței metodei propuse. Se poate concluziona, de asemenea, că deformațiile de lunecare din forța tăietoare influențează comportamentul barei și reduce semnificativ rigiditatea ei.

### 3.6.4 Bară cu secțiune I și înălțime variabilă. Determinarea forței axiale critice de compresiune pentru cele două direcții principale de inerție

Avem bara în consolă din Fig. 3.18, solicitată la forță axială de compresiune. Modulul de elasticitate este considerat  $E=206$  GPa. Funcțiile de variație a momentului de inerție, respectiv a ariei secțiunii transversale pot fi exprimate astfel:

$$I_{z(x)} = \frac{1}{12} t_w D_{(x)}^3 + 2 \cdot \frac{1}{12} t_f^3 (b_f - t_w) + 2t_f(b_f - t_w) \left( \frac{(D_{(x)} - t_f)}{2} \right)^2 \quad (3.79)$$

$$A_{(x)} = 2b_f t_f + (D_{(x)} - t_f)t_w; \quad (3.80)$$

$$D_{(x)} = D_1 + s \cdot x; \quad s = \frac{D_2 - D_1}{L} \quad (3.81)$$

unde  $D_2 = 400$  mm;  $D_1 = 200$  mm

Pentru a determina încărcarea critică axială pentru cele două axe principale de inerție s-au efectuat trei tipuri de analize, o analiză de tip „Static Riks” în programul de element finit Abaqus (2011) și două statice neliniare în EPASS. Pentru modelarea barei în Abaqus s-au folosit elemente finite de tip “shell” S4R cu o dimensiune de 10 mm. Pentru a trasa curba completă încărcare – deplasare laterală, s-a încărcat bara cu o forță axială de compresiune  $P = 100$  kN și o forță laterală, pe direcția de inerție studiată,  $F = 10^{-4}P = 0.01$  kN.

Următoarele analize s-au efectuat în programul EPASS, toate fiind statice neliniare în domeniul elastic. Pasul de încărcare considerat în analiză este constant de 0.1 din forța aplicată. Efectul neliniarității geometrice globale este luat în considerare prin reactualizarea configurației geometrice a barei la fiecare pas precum și prin includerea matricei de rigiditate geometrică. La primul set de analize efectuate, bara este divizată în 5, 10 respectiv 100 de elemente finite liniare cu secțiune constantă. Pentru a surprinde efectul neliniarității geometrice locale, pentru fiecare element se folosesc funcțiile de stabilitate propuse de Chen & Lui (1991) care sunt reactualizate la fiecare pas de încărcare. Ultima analiză efectuată s-a făcut cu procedeul propus de autor, considerând un singur element/ bară cu 10 puncte de integrare și 10 termeni în expresia funcției polinomiale.

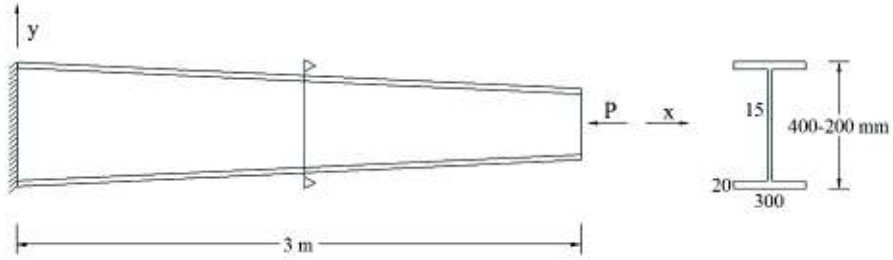


Fig. 3.18 Bară în consolă cu secțiune I și înălțime variabilă

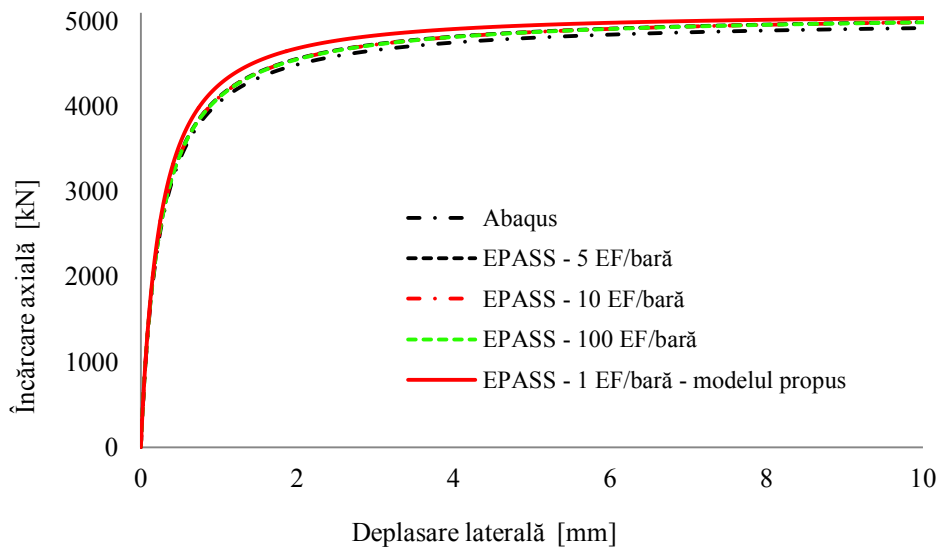


Fig. 3.19 Bară cu secțiune variabilă I. Curba încărcare - deplasare laterală, încovoiere în planul de rigiditate minim

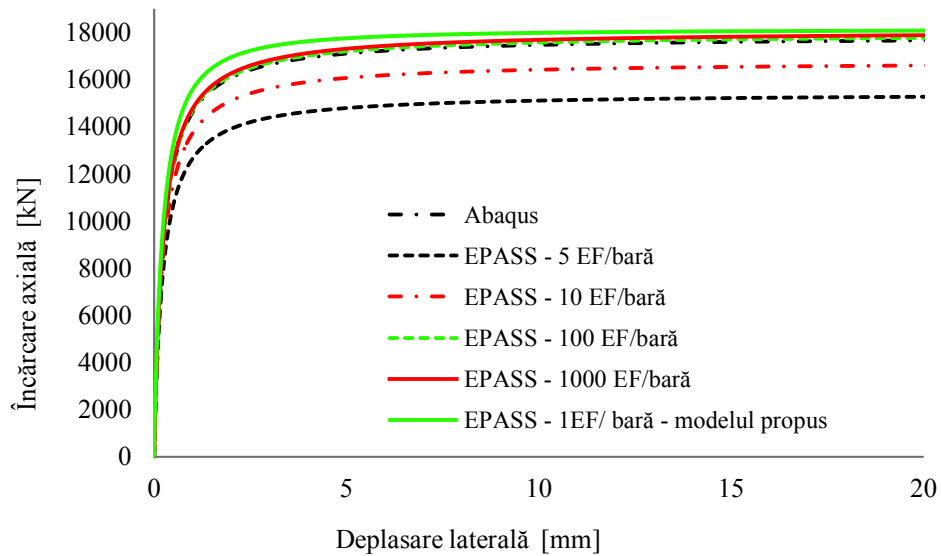


Fig. 3.20 Bară cu secțiune variabilă I. Curba încărcare - deplasare laterală, încovoiere în planul de rigiditate maxim

Rezultatele analizelor au fost centralizate în Fig. 3.20 și Fig. 3.21. După cum se poate observa, dacă se optează pentru divizarea barei în elemente liniare cu secțiune constantă este nevoie de 100 segmente pentru a se atinge acuratețea dorită, spre deosebire de analiza barei cu secțiune variabilă, utilizând procedeul propus de autor, unde un singur element /bară este suficient pentru a obține rezultate cu precizie satisfăcătoare, efortul computațional fiind mult mai mic. Din grafice se constată o bună concordanță între curbele de răspuns obținute cu programul EPASS și programul de element finit Abaqus. Toate analizele s-au rulat pe un calculator cu un procesor Intel Core I5-3470 și 3.2GHz. Abaqus a efectuat analiza în 500 de pași (pas de încărcare variabil de la 0.002 la 1) pentru a atinge forța axială critică de compresiune  $P_{cr} = 17755.7$  kN, timpul de analiză fiind 101.73 minute. În programul EPASS, analiza a durat 355.12 secunde pentru un pas de încărcare constant  $0.1 \cdot N$  (1814 pași,  $P_{cr} = 18140$  kN). Este de remarcat eficiența modelului de calcul propus din punct de vedere al timpului de calcul, care la un singur element finit/bară oferă rezultate satisfăcătoare (diferențe sub 3%) cu ale analizei în Abaqus care utilizează 26400 elemente finite S4R.

### 3.6.5 Bară cu secțiune I și înălțime variabilă. Determinarea forței axiale critice de compresiune pentru diferite lungimi ale elementului, respectiv diferite rapoarte între secțiunile transversale de capăt

Următorul exemplu este ales cu scopul evidențierii influenței raportului secțiunilor transversale de capăt asupra evaluării forței axiale critice de compresiune. Se studiază bara din Fig. 3.21 considerând diferite lungimi ( $L = 4 - 10$  m) și rapoarte ale secțiunilor transversale de capăt ( $\alpha = 0.4 - 1$ ). Elementul este supus la forța axială de compresiune aplicată centric la capătul liber, după cum se vede în Fig. 3.21. S-au efectuat 3 seturi de analize, prima utilizând MEF în programul de element finit Abaqus (Static Riks) și 2 analize în programul dezvoltat de autor, EPASS. Pentru analizele efectuate în Abaqus s-au folosit elemente de tip "shell". Elementul finit ales este S4R iar pentru a observa influența discretizării s-a făcut un studiu privind dimensiunea elementului, datele fiind centralizate în Tabel 3.2. În urma analizelor s-a constatat că dimensiunea elementului finit influențează acuratețea rezultatelor, în special pentru barele scurte cu variații mari ale secțiunii transversale.

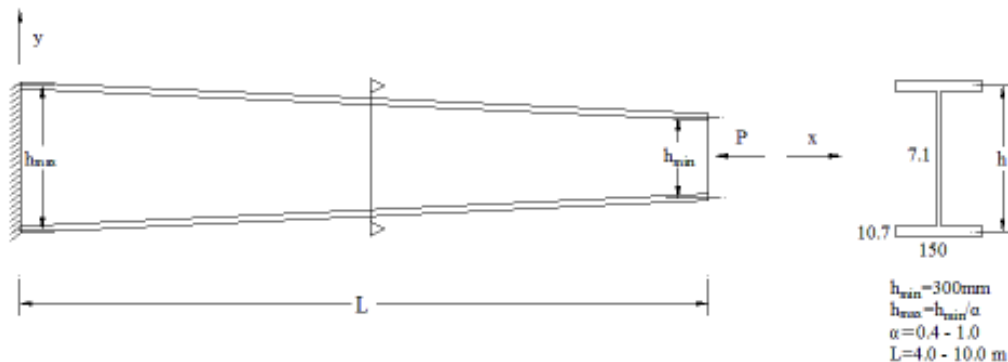


Fig. 3.21 Bară neprismatică cu profil I având diferite rapoarte între secțiunile transversale de capăt respectiv diferite lungimi (Soltani, Asgarian, & Mohri, 2014)



Tabel 3.2 Studiu privind importanța dimensiunii elementului finit în Abaqus

L(m) $\alpha = 0.4$	Forța axială critică în Abaqus [kN]			
	Mesh 10	Mesh 20	Mesh 30	Mesh 40
4	184.065	181.841	179.711	173.159
6	81.7145	80.8	79.8586	77.0503
8	45.423	44.903	44.376	42.8152
10	-	29.2783	28.9021	27.7995

În EPASS s-au efectuat 2 tipuri de analize, una utilizând procedeul practic (detaliat în subcapitolul 3.3, iar a doua analiză este bazată pe abordarea în serii de puteri, considerată „exactă” (detaliată în subcapitolul 3.4) folosind cuadratura Gauss – Lobatto și un număr de 10 termeni în exprimarea funcției polinomiale. Pentru toate analizele în EPASS s-a utilizat un singur element finit/bară cu 10 puncte de integrare în lungul lui. Se ține cont de efectul neliniarității geometrice globale prin reactualizarea configurației geometrice a barei la fiecare pas, precum și considerarea matricei de rigiditate geometrică.

Tabel 3.3 Forța axială critică determinată pentru un profil I cu diferite lungimi ( $L = 4 - 10$  m) și rapoarte ale secțiunilor transversale de capăt ( $\alpha = 0.4 - 1$ ) – plan de încovoiere minim

L (m)	$\alpha$	Forța axială critică [kN] – plan de încovoiere minim					
		MEF Abaqus Static riks	EPASS Procedeul practic	EPASS Modelul exact	MEF Ansys (Soltani, Asgarian, & Mohri)	Soltani (Soltani, Asgarian, & Mohri)	Eisenberger (Eisenberger & Cohen)
4	0.4	184.065	186.3 (1.21%)	186.2 (1.16%)	174.06	186.182	186.18
	0.6	184.267	186.1 (0.99%)	186.0 (0.94%)	174.45	185.989	186.01
	0.8	184.258	186.0 (0.95%)	185.9 (0.89%)	174.5	185.907	185.93
	1	184.228	186.0 (0.96%)	185.8 (0.85%)	174.51	185.889	185.88
6	0.4	81.7145	82.78 (1.30%)	82.78 (1.30%)	81.468	82.747	82.75
	0.6	81.7157	82.69 (1.19%)	82.68 (1.18%)	81.5	82.662	82.67
	0.8	81.6988	82.64 (1.15%)	82.64 (1.15%)	81.518	82.625	82.63
	1	81.6896	82.61 (1.13%)	82.61 (1.13%)	81.505	82.617	82.62
8	0.4	45.423	46.56 (2.50%)	46.56 (2.50%)	46.27	46.545	46.54
	0.6	45.392	46.51 (2.46%)	46.51 (2.46%)	46.258	46.497	46.5
	0.8	45.378	46.48 (2.43%)	46.48 (2.43%)	46.257	46.477	46.48
	1	45.3593	46.47 (2.45%)	46.47 (2.45%)	46.247	46.472	46.47
10	0.4	29.2783	29.80 (1.78%)	29.80 (1.78%)	29.709	29.789	29.78
	0.6	29.2568	29.77 (1.75%)	29.77 (1.75%)	29.692	29.758	29.76
	0.8	29.2448	29.75 (1.73%)	29.75 (1.72%)	29.689	29.745	29.75
	1	29.2384	29.74 (1.72%)	29.74 (1.72%)	29.682	29.742	29.74

Valorile de referință pentru calculul erorilor relative au fost considerate rezultatele din Abaqus .

S-a calculat forța axială critică în planul de încovoiere minim, respectiv maxim. După cum se poate urmări în Tabel 3.3, pentru solicitări în planul de încovoiere minim nu există diferențe majore între metodele propuse, cel considerat *exact* (formularea bazată pe serii de puteri) și procedeul *simplificat*; motivul este evident, și anume faptul că variația înălțimii secțiunii transversale nu influențează semnificativ rigiditatea pe direcția minimă de inerție. Din Tabel 3.3 se constată o foarte bună concordanță (erorile relative fiind sub 3%) atât cu rezultatele din literatura de specialitate, cât și cu cele obținute cu MEF. Pe direcția maximă de inerție nu se poate afirma acest lucru. Din Tabel 3.4 se poate observa faptul că dacă raportul înălțimilor secțiunilor transversale de capăt este cuprins între 0.6 – 1, ambele metode propuse conduc la obținerea unor rezultate cu precizie satisfăcătoare (erori sub 3%). Însă, când variația secțiunii transversale este mai “accentuată” ( $\alpha < 0.6$ ), *procedeeul practic* conduce la înregistrarea unor erori relative de peste 8%, spre deosebire de sub 3% cu *modelul exact*. În acest caz, se recomandă utilizarea metodei bazate pe abordarea în serii de puteri care conduce la obținerea unor rezultate cu precizie satisfăcătoare, prin comparație cu cele obținute în programul de element finit Abaqus, dar cu un efort computațional semnificativ mai mic.

Tabel 3.4 Forța axială critică determinată pentru un profil I cu diferite lungimi ( $L = 2 - 10\text{ m}$ ) și rapoarte ale secțiunilor transversale de capăt ( $\alpha = 0.4 - 1$ ) - plan de încovoiere maxim

L (m)	$\alpha$	Forța axială critică [kN] – plan de încovoiere maxim		
		MEF Abaqus	EPASS Procedeeul practic	EPASS Modelul exact
4	0.4	12056.1	10853(-9.98%)	12103 (0.39%)
	0.6	6118.77	5887(-3.79%)	6064 (-0.89%)
	0.8	3858.83	3779(-2.07%)	3804 (-1.4%)
	1	2728	2684(-1.61%)	2684 (-1.61%)
6	0.4	5276.8	4781(-9.40%)	5286 (0.17%)
	0.6	2689.9	2602(-3.27%)	2680 (-0.37%)
	0.8	1698.3	1673(-0.31%)	1685 (-0.78%)
	1	1201.6	1190(-0.97%)	1190 (-0.97%)
8	0.4	2984.5	2681(-10.17%)	2964 (-0.69%)
	0.6	1517.6	1461(-3.73%)	1505 (-0.83%)
	0.8	957.49	940(-1.83%)	947 (-1.1%)
	1	677.01	669(-1.18%)	669 (-1.18%)
10	0.4	1915.4	1714(-10.51%)	1894 (-1.12%)
	0.6	972.92	935(-3.9%)	962 (-1.1%)
	0.8	613.62	602(-1.9%)	606 (-1.2%)
	1	433.80	428(-1.34)	428 (-1.34)

Valorile de referință pentru calculul erorilor relative au fost considerate rezultatele din Abaqus .

Pentru a verifica eficienței metodei propuse, se efectuează un studiu numeric privind influența numărului de termeni în expresia momentului încovoietor, asupra forței axiale critice de compresiune pe direcția minimă, respectiv maximă de rigiditate. Modelarea barei s-a făcut considerând un singur element cu 10 puncte de integrare, metoda utilizată fiind cuadratura Gauss Lobatto. Rezultatele au fost comparate cu cele obținute cu programul de element finit Abaqus. În Abaqus s-au efectuat analize de tip *Static Riks*, utilizând elemente finite shell de tip *S4r* cu o dimensiune de 20mm. Rezultatele au fost centralizate în Tabel 3.5 și Tabel 3.6 și se constată că 5 termeni sunt suficienți pentru a obține forța axială pe direcția minimă de rigiditate cu o precizie satisfăcătoare, spre deosebire de 12 termeni necesari în formularea propusă de Soltani și al. (2014); iar pe direcția maximă de rigiditate s-a constatat că un număr de 7-8 termeni sunt suficienți pentru a obține rezultate cu erori sub 5%, studii în (Soltani, Asgarian, & Mohri, 2014) nefiind menționate.

Tabel 3.5 Forța axială critică evaluată pentru un profil I cu diferite lungimi ( $L = 4 - 10$  m) și rapoarte ale secțiunilor transversale de capăt ( $\alpha = 0.4 - 1$ ) în funcție de numărul termenilor în funcția polinomială - plan de încovoiere minim

		Forța axială critică [kN] – plan de încovoiere minim								
L (m)	$\alpha$	MEF Abaqus	EPASS NTF = 4	EPASS NTF = 5	EPASS NTF = 6	EPASS NTF = 7	EPASS NTF = 8	EPASS NTF = 9	EPASS NTF = 10	EPASS NTF = 100
4	0.4	184.065	195.4 (6.16%)	189.3 (2.84%)	185.7 (0.89%)	186.0 (1.05%)	186.2 (1.16%)	186.2 (1.16%)	186.2 (1.16%)	186.2 (1.16%)
	0.6	184.267	195.1 (5.88%)	189.1 (2.63%)	185.5 (0.67%)	185.8 (0.83%)	186.0 (0.94%)	186.0 (0.94%)	186.0 (0.94%)	186.0 (0.94%)
	0.8	184.258	195.0 (5.83%)	189.0 (2.57%)	185.4 (0.62%)	185.7 (0.78%)	186.0 (0.95%)	185.9 (0.89%)	185.9 (0.89%)	185.9 (0.89%)
	1	184.228	194.9 (5.79%)	188.9 (2.54%)	185.5 (0.69%)	185.8 (0.85%)	185.8 (0.85%)	185.8 (0.85%)	185.8 (0.85%)	185.8 (0.85%)
6	0.4	81.7145	86.7 (6.10%)	84.1 (2.92%)	82.5 (0.96%)	82.6 (1.08%)	82.7 (1.21%)	82.7 (1.21%)	82.7 (1.21%)	82.7 (1.21%)
	0.6	81.7157	86.6 (5.98%)	84.0 (2.80%)	82.4 (0.84%)	82.5 (0.96%)	82.6 (1.08%)	82.6 (1.08%)	82.6 (1.08%)	82.6 (1.08%)
	0.8	81.6988	86.6 (6.00%)	83.9 (2.69%)	82.3 (0.74%)	82.5 (0.98%)	82.6 (1.10%)	82.6 (1.10%)	82.6 (1.10%)	82.6 (1.10%)
	1	81.6896	86.5 (5.89%)	83.9 (2.72%)	82.3 (0.75%)	82.6 (1.11%)	82.6 (1.11%)	82.6 (1.11%)	82.6 (1.11%)	82.6 (1.11%)
8	0.4	45.423	48.7 (7.21%)	47.3 (4.13%)	46.4 (2.15%)	46.5 (2.37%)	46.5 (2.37%)	46.5 (2.37%)	46.5 (2.37%)	46.5 (2.37%)
	0.6	45.392	48.7 (7.29%)	47.2 (3.98%)	46.3 (2.0%)	46.5 (2.44%)	46.5 (2.44%)	46.5 (2.44%)	46.5 (2.44%)	46.5 (2.44%)
	0.8	45.378	48.6 (7.1%)	47.2 (4.02%)	46.38 (2.21%)	46.47 (2.41%)	46.48 (2.43%)	46.48 (2.43%)	46.48 (2.43%)	46.48 (2.43%)
	1	45.3593	48.6 (7.14%)	47.2 (4.06%)	46.37 (2.23%)	46.46 (2.43%)	46.47 (2.45%)	46.47 (2.45%)	46.47 (2.45%)	46.47 (2.45%)
10	0.4	29.2783	31.2 (6.56%)	30.2 (3.15%)	29.75 (1.61%)	29.77 (1.68%)	29.78 (1.71%)	29.78 (1.71%)	29.78 (1.71%)	29.78 (1.71%)
	0.6	29.2568	31.1 (6.3%)	30.2 (3.22%)	29.74 (1.65%)	29.75 (1.692%)	29.76 (1.72%)	29.76 (1.72%)	29.76 (1.72%)	29.76 (1.72%)
	0.8	29.2448	31.1 (6.34%)	30.1 (2.92%)	29.73 (1.66%)	29.74 (1.69%)	29.75 (1.73%)	29.75 (1.73%)	29.75 (1.73%)	29.75 (1.73%)
	1	29.2384	31.0 (6.02%)	30.1 (2.95%)	29.72 (1.65%)	29.73 (1.682%)	29.74 (1.72%)	29.74 (1.72%)	29.74 (1.72%)	29.74 (1.72%)

Valorile de referință pentru calculul erorilor relative au fost considerate rezultatele din Abaqus .

Tabel 3.6 Forța axială critică evaluată pentru un profil I cu diferite lungimi ( $L = 4 - 10$  m) și rapoarte ale secțiunilor transversale de capăt ( $\alpha = 0.4 - 1$ ) în funcție de numărul termenilor în funcția polinomială - plan de încovoiere maxim

		Forța axială critică [kN] – plan de încovoiere maxim								
L (m)	$\alpha$	MEF Abaqus	EPASS NTF = 4	EPASS NTF = 5	EPASS NTF = 6	EPASS NTF = 7	EPASS NTF = 8	EPASS NTF = 9	EPASS NTF = 10	EPASS NTF = 100
4	0.4	12056.1	10270 (-14.8%)	10705 (-11.2%)	11193 (-7.16%)	11576 (-3.98%)	11816 (-1.99%)	11948 (-0.89%)	12103 (0.39%)	12056 (0%)
	0.6	6118.77	5422 (-11.4%)	5826 (4.78%)	6020 (-1.61%)	6070 (-0.8%)	6073 (-0.75%)	6068 (-0.83%)	6064 (-0.89%)	6060 (-0.96%)
	0.8	3858.83	3679 (-4.66%)	3741 (-3.05%)	3833 (-0.67%)	3811 (-1.2%)	3805 (-1.4%)	3804 (-1.4%)	3804 (-1.4%)	3804 (-1.4%)
	1	2728	2818 (3.29%)	2730 (0.07%)	2677 (-1.87%)	2682 (-1.68%)	2684 (-1.61%)	2684 (-1.61%)	2684 (-1.61%)	2684 (-1.61%)
6	0.4	5276.8	4526 (-14.2%)	4716 (-10.6%)	4926 (-6.64%)	5095 (-3.45%)	5201 (-1.43%)	5258 (-0.35%)	5286 (0.17%)	5305 (0.53%)
	0.6	2689.9	2398 (-10.8%)	2576 (-4.23%)	2661 (-1.07%)	2683 (-0.26%)	2684 (-0.22%)	2682 (-0.29%)	2680 (-0.37%)	2679 (-0.4%)
	0.8	1698.3	1629 (-4.08%)	1707 (-0.51%)	1697 (-0.07%)	1687 (-0.66%)	1685 (-0.78%)	1685 (-0.78%)	1685 (-0.78%)	1685 (-0.78%)
	1	1201.6	1259 (4.78%)	1210 (0.7%)	1187 (-1.22%)	1189 (-1.05%)	1190 (-0.97%)	1190 (-0.97%)	1190 (-0.97%)	1190 (-0.97%)
8	0.4	2984.5	2539 (-14.9%)	2645 (-11.4%)	2764 (-7.38%)	2857 (-4.27%)	2916 (-2.3%)	2948 (-1.22%)	2964 (-0.69%)	2974 (-0.35%)
	0.6	1517.6	1347 (-11.2%)	1446 (-4.72%)	1494 (-1.56%)	1507 (-0.7%)	1507 (-0.7%)	1506 (-0.76)	1505 (-0.83%)	1504 (-0.9%)
	0.8	957.49	790 (-17.5%)	959 (0.16%)	954 (-0.36%)	948 (-1%)	947 (-1.1%)	947 (-1.1%)	947 (-1.1%)	947 (-1.1%)
	1	677.01	702 (3.7%)	680 (0.44%)	667 (-1.48%)	668 (-1.33%)	669 (-1.18%)	669 (-1.18%)	669 (-1.18%)	669 (-1.18%)
10	0.4	1915.4	1623 (-15.3%)	1691 (-11.7%)	1767 (-7.7%)	1826 (-4.67%)	1863 (-2.73%)	1884 (-1.63%)	1894 (-1.11%)	1901 (-0.75%)
	0.6	972.92	861 (-11.5%)	925 (-4.9%)	956 (-1.74%)	964 (-0.92%)	964 (-0.92%)	963 (-1.02%)	962 (-1.1%)	962 (-1.1%)
	0.8	613.62	586 (-4.5%)	614 (0.06%)	610 (-0.5%)	607 (-1.08%)	606 (-1.2%)	606 (-1.2%)	606 (-1.2%)	606 (-1.2%)
	1	433.80	449 (3.5%)	435 (0.28%)	427 (-1.6%)	428 (-1.34)	428 (-1.34)	428 (-1.34)	428 (-1.34)	428 (-1.34)

Valorile de referință pentru calculul erorilor relative au fost considerate rezultatele din Abaqus .

### 3.6.6 Bară cu dublă variație având secțiunea transversală I. Determinarea forței axiale critice de compresiune considerând diferite rapoarte între secțiunile transversale de capăt.

Se studiază bara din Fig. 3.22 având lungimea  $L = 10\text{m}$  și considerând diferite rapoarte între secțiunea transversală de capăt și cea de la mijloc ( $\alpha = 0.4 - 0.8$ ). Elementul are dublă variație și este solicitat la forță axială de compresiune. Scopul analizei constituie determinarea încărcării axiale critice în planul de încovoiere maxim. Astfel, s-au efectuat două tipuri de analize, în programul de element finit Abaqus (2011), respectiv în programul dezvoltat de autor, EPASS. În Abaqus s-a efectuat o analiză de tip *Static Riks* în domeniul elastic, modelând bara cu elemente finite de tip “shell” *S4R* având o dimensiune de 10 mm. Analizele efectuate în EPASS sunt statice neliniare în domeniul elastic. Pasul de încărcare este considerat constant cu o intensitate egală cu 0.1 din forța aplicată  $P$ . Efectul neliniarității geometrice globale este surprins prin reactualizarea nodurilor barelor la fiecare pas, precum și prin includerea matricei de rigiditate geometrică. În modelarea barei s-au considerat două elemente, pentru cele două variații liniare, cu 10 puncte de integrare pentru fiecare. Pentru includerea efectului neliniarității geometrice locale sunt utilizate funcțiile de stabilitate propuse de autor, care sunt reactualizate la fiecare pas de încărcare. Metoda de integrare utilizată este Gauss – Legendre iar numărul de termeni considerați în exprimarea funcției polinomiale este 10.

Rezultatele analizelor au fost centralizate în Fig. 3.23 și, după cum se poate observa, există o bună concordanță între curbele de răspuns obținute cu programul EPASS și programul de element finit Abaqus.

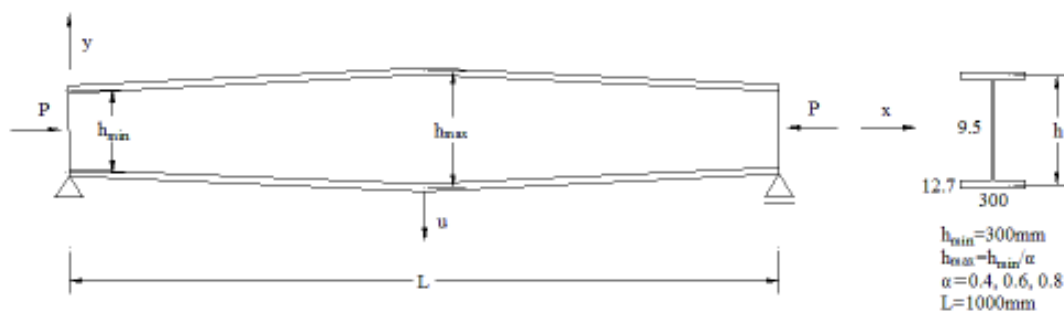


Fig. 3.22 Bară comprimată cu dublă variație având secțiunea transversală I

**Pagină eliminată din conținutul electronic al acestei lucrări.**

$$I(x) = I_0 \left\{ \frac{1}{5} + \frac{8x}{5L} \right\} \quad (3.82)$$

$$I(x) = I_0 \left\{ \frac{2}{\sqrt{10}} + \frac{\sqrt{10} - 2}{\sqrt{10}} \left( \frac{2x}{L} \right) \right\}^2 \quad (3.83)$$

$$I(x) = I_0 \left\{ \frac{14}{19} + \frac{5}{19} \left( \frac{2x}{L} \right) \right\}^3 \quad (3.84)$$

Rezultatele au fost centralizate în Tabel 3.7 și se constată o foarte bună corelație între modelul numeric propus și rezultatele obținute de Young & Roark (2001) și Valipour & Bradford (2012).

Tabel 3.7 Forța axială critică pentru un profil I cu diferite funcții de variație a momentului de inerție

L = 10m	Factorul $\alpha$ , $P_{cr} = \alpha(EI/L^2)$ [kN]						
	Hermitian (2012)	Valipour & Bradford (2012)	Soluție analitică (Young & Roark, 2001)	EPASS			
				8 NTF	10 NTF	12 NTF	100 NTF
Variație liniară	7.18	7.08	7.01	7.04	7.09	7.11	7.12
Variație quadratică	7.84	7.68	7.61	7.76	7.75	7.75	7.75
Variație cubică	7.76	7.60	7.52	7.67	7.66	7.65	7.65

### 3.6.8 Bară cu secțiune I și înălțime variabilă. Studii numerice privind convergența metodelor de integrare studiate

Scopul acestui exemplu este de a studia convergența metodelor de integrare integrate în programul dezvoltat, EPASS, și anume regula 3/8 a lui Simpson și cuadraturile Gauss – Legendre și Gauss – Lobatto, în funcție de numărul termenilor utilizați în seriile de puteri, respectiv numărul punctelor monitorizate în lungul elementului. Astfel, se consideră bara cu secțiune variabilă din Fig. 3.21 încărcată cu o forță axială de compresiune  $P = P_{E\}2$ , unde  $P_{E\}2 = \frac{\pi^2 EI_2}{L^2}$  este forța axială Euler a elementului de bară având momentul de inerție de la capătul 2. Funcțiile de stabilitate se determină, cu modelul propus bazat pe abordarea în serii de puteri, pentru trei variații ale secțiunilor transversale de capăt  $\alpha = 0.4, 0.6$  și  $0.8$ . Se efectuează două tipuri de analize, primul constă în studiul convergenței metodelor în funcție de numărul de termeni ales în funcția polinomială, cu considerarea a 99 de puncte monitorizate, rezultatele fiind centralizate în Fig. 3.25 - Fig. 3.27. În al doilea set de analize se studiază convergența metodelor în funcție de numărul de puncte de integrare în lungul elementului considerând 99 de termeni în exprimarea seriilor de puteri în rezolvarea ecuației diferențiale de echilibru, rezultatele fiind prezentate în Fig. 3.28 - Fig. 3.30.

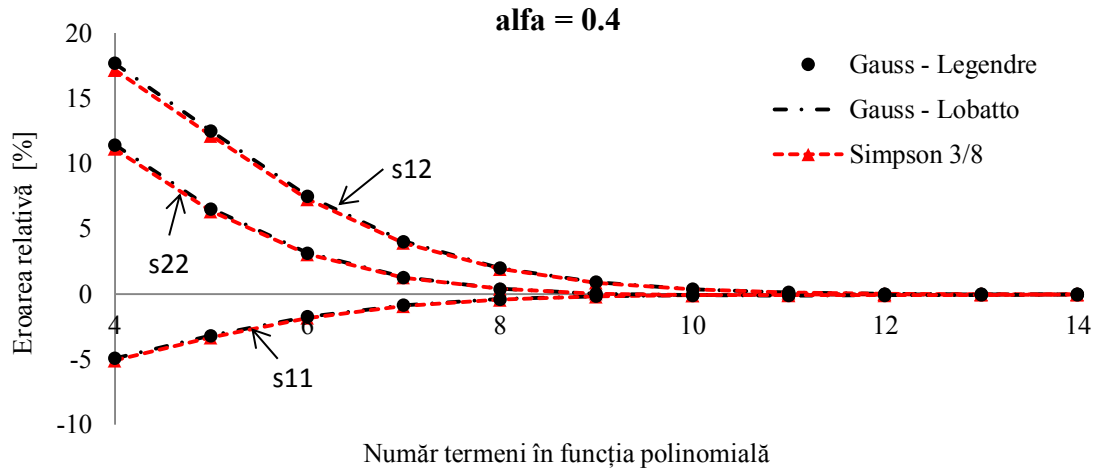


Fig. 3.25 Convergența funcțiilor de stabilitate în funcție de numărul termenilor în funcția polinomială ( $\alpha = 0.4$ )

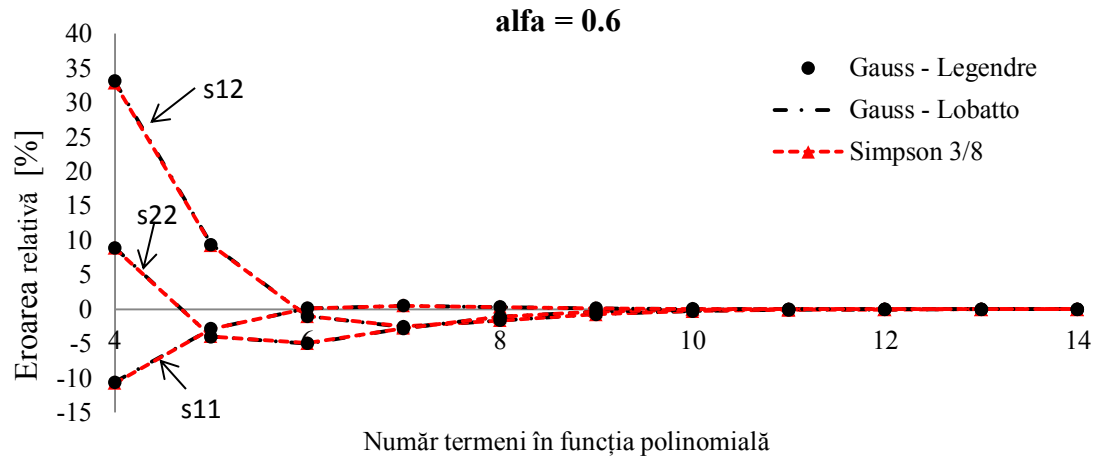


Fig. 3.26 Convergența funcțiilor de stabilitate în funcție de numărul termenilor în funcția polinomială ( $\alpha = 0.6$ )

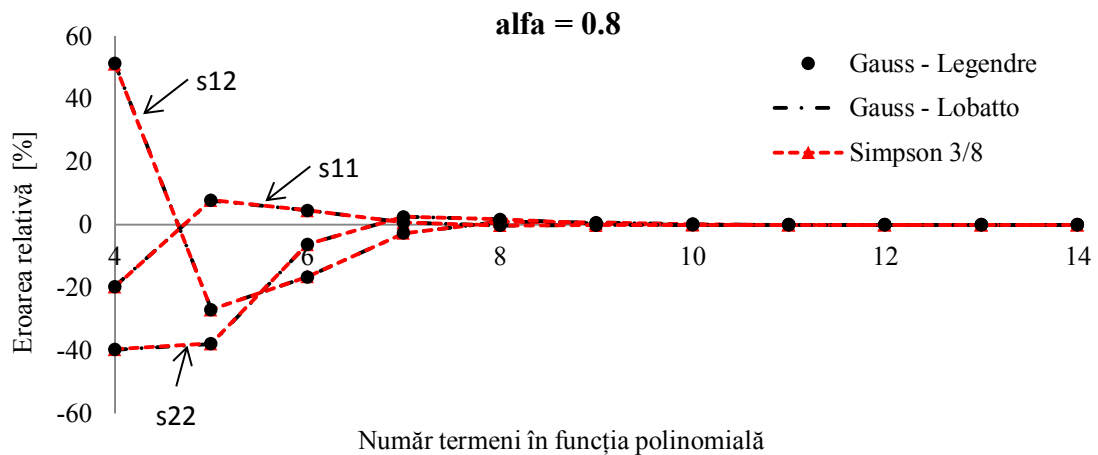


Fig. 3.27 Convergența funcțiilor de stabilitate în funcție de numărul termenilor în funcția polinomială ( $\alpha = 0.8$ )



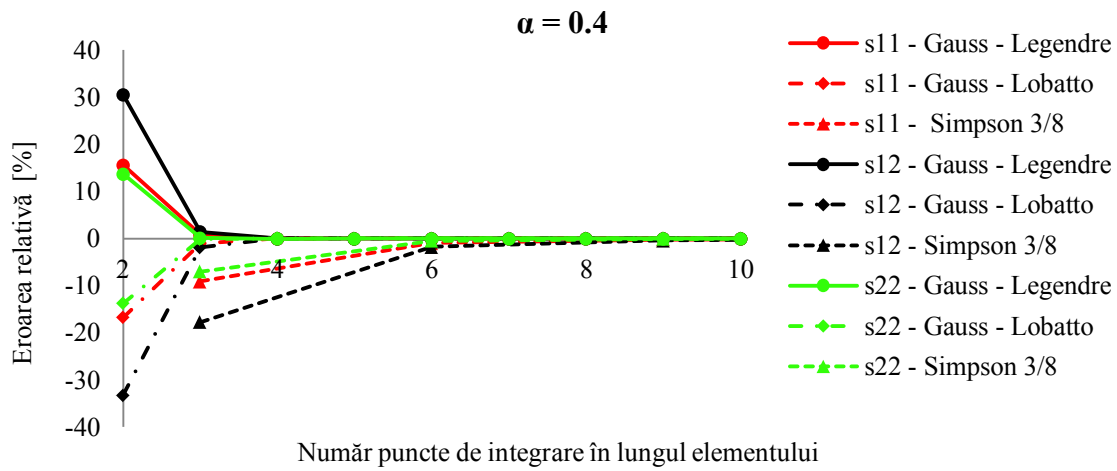


Fig. 3.28 Convergența funcțiilor de stabilitate în funcție de numărul punctelor de integrare în lungul elementului ( $\alpha = 0.4$ )

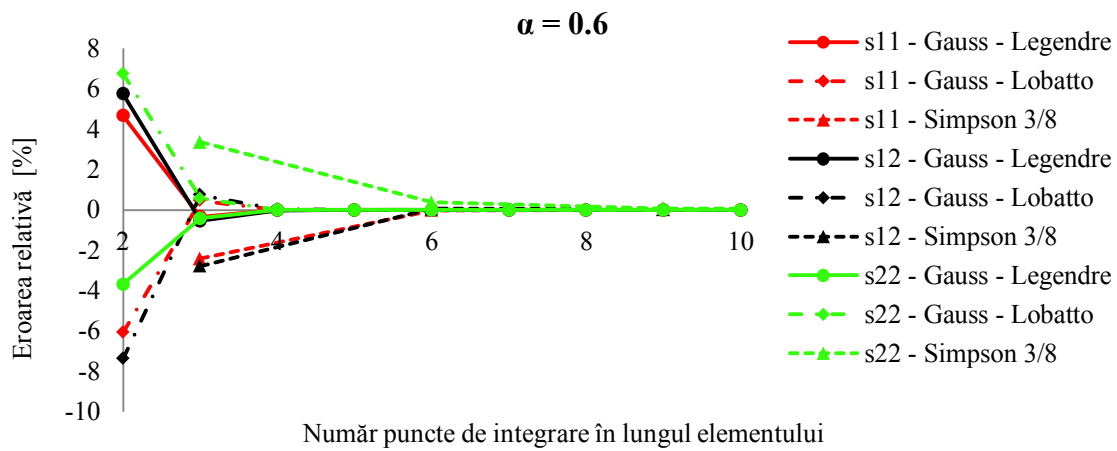


Fig. 3.29 Convergența funcțiilor de stabilitate în funcție de numărul punctelor de integrare în lungul elementului ( $\alpha = 0.6$ )

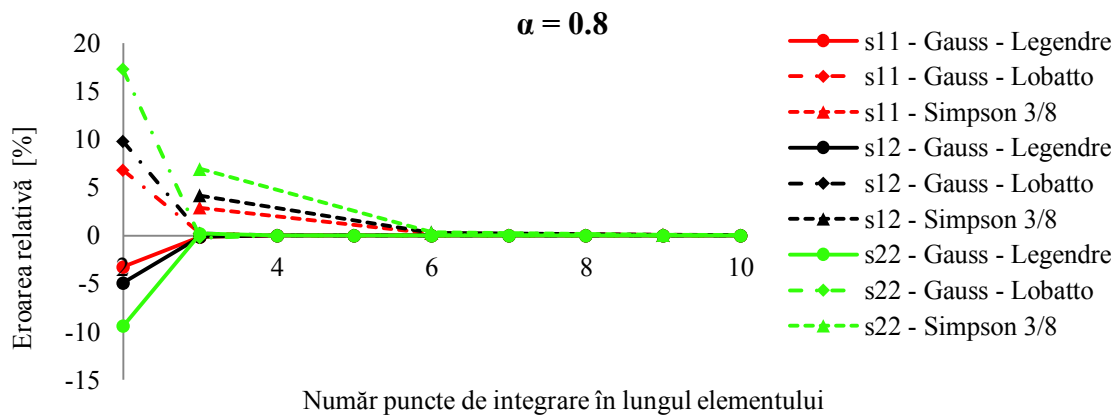


Fig. 3.30 Convergența funcțiilor de stabilitate în funcție de numărul punctelor de integrare în lungul elementului ( $\alpha = 0.8$ )

Din Fig. 3.25 - Fig. 3.27. se poate observa influența variației secțiunii transversale asupra numărului de termeni necesari în expresia funcției polinomiale pentru a se atinge acuratețea dorită. Astfel, pentru un raport al secțiunilor transversale de capăt  $\alpha = 0.4$  este nevoie de 9-10 termeni, spre deosebire de 7-8 termeni pentru raportul  $\alpha = 0.8$ . Se constată faptul că metoda de integrare utilizată nu influențează semnificativ curbele de răspuns.

Acest lucru nu se poate afirma pentru studiul convergenței metodelor de integrare în funcție de numărul de puncte de integrare în lungul elementului. Din graficele Fig. 3.28 - Fig. 3.30 se constată faptul că cuadraturile Gauss sunt mai rapid convergente decât regula Simpson 3/8. Astfel, dacă pentru metodele Gauss numărul punctelor monitorizate este suficient 3, pentru obținerea unor rezultate cu precizie satisfăcătoare (în funcție de variația secțiunii transversale), pentru metoda Simpson 3/8 este nevoie de cel puțin 6 puncte de integrare.

### 3.6.9 Bară cu secțiune I și înălțime variabilă. Studii privind determinarea coeficientului mediu de compresiune ideal

Obiectivul pe care ni-l propunem în cadrul acestui exemplu este determinarea coeficientului mediu de compresiune  $v_{mediu}$  astfel încât rezultatele obținute cu procedeul practic propus să fie cât mai apropiate de cele obținute cu abordarea în serii de puteri. Astfel, propunem studiul barei din Fig. 3.18 având raportul secțiunilor de capăt egal cu 0.5, încărcată cu o forță axială de compresiune  $P = \lambda_B P_{E\}2$ , unde  $P_{E\}2 = \frac{\pi^2 EI_2}{L^2}$  este forța axială critică (Euler) a elementului de bară având momentul de inerție minim iar  $\lambda_B$  este factorul de încărcare axială. Avem  $v_{mediu} = \alpha v_{max} + (1 - \alpha)v_{minim}$  care este definit ca și coeficient mediu de compresiune.

$$\text{unde } v_{max} = L \sqrt{\frac{N}{EI_{min}}} \alpha$$

$$v_{minim} = L \sqrt{\frac{N}{EI_{max}}}$$

În analiză se va studia coeficientul  $\alpha$  cuprins între valorile 0 – 1 adică  $v_{minim} \leq v_{mediu} \leq v_{max}$ .

A două metodă propusă pentru determinarea coeficientului de compresiune mediu presupune evaluarea unei rigidități medii la încovoiere, astfel:

$$EI_{mediu} = \int_0^L EI(x) dx = EI_{maxim} \int_0^L \frac{EI(x)}{EI_{maxim}} dx = EI_{maxim} \cdot \psi$$

Apoi coeficientul de compresiune mediu poate fi evaluat cu următoarea relație:

$$v_{mediu} = L \sqrt{\frac{N}{EI_{mediu}}}$$

Unde  $0 < \psi \leq 1$  este un coeficient subunitar care reduce valoarea maximă a modulului de rigiditate la încovoiere și care este în funcție de raportul înălțimii secțiunilor transversale la capete, iar variația lui poate fi vizualizată în Fig. 3.31.

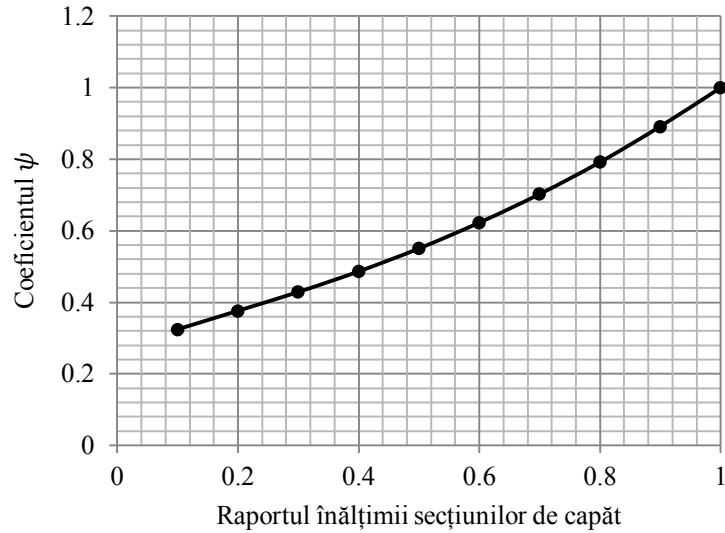


Fig. 3.31 Coeficientul  $\psi$  în funcție de raportul secțiunilor la capetele elementului

În urma sintetizării rezultatelor, Fig. 3.32-Fig. 3.34, se constată faptul că forța axială aplicată influențează semnificativ funcțiile de stabilitate, astfel dacă elementul este solicitat la o forță axială mai mare decât  $0.6\lambda B$  ambele metode furnizează rezultate cu erori peste 5%. De asemenea, s-a remarcat faptul că, pentru determinarea coeficientului mediu de compresiune  $v_{mediu}$  cu prima metodă, coeficientul  $\alpha = 3$  se apropie de valoarea coeficientului mediu de compresiune  $v_{mediu}$  evaluat cu a doua metodă.

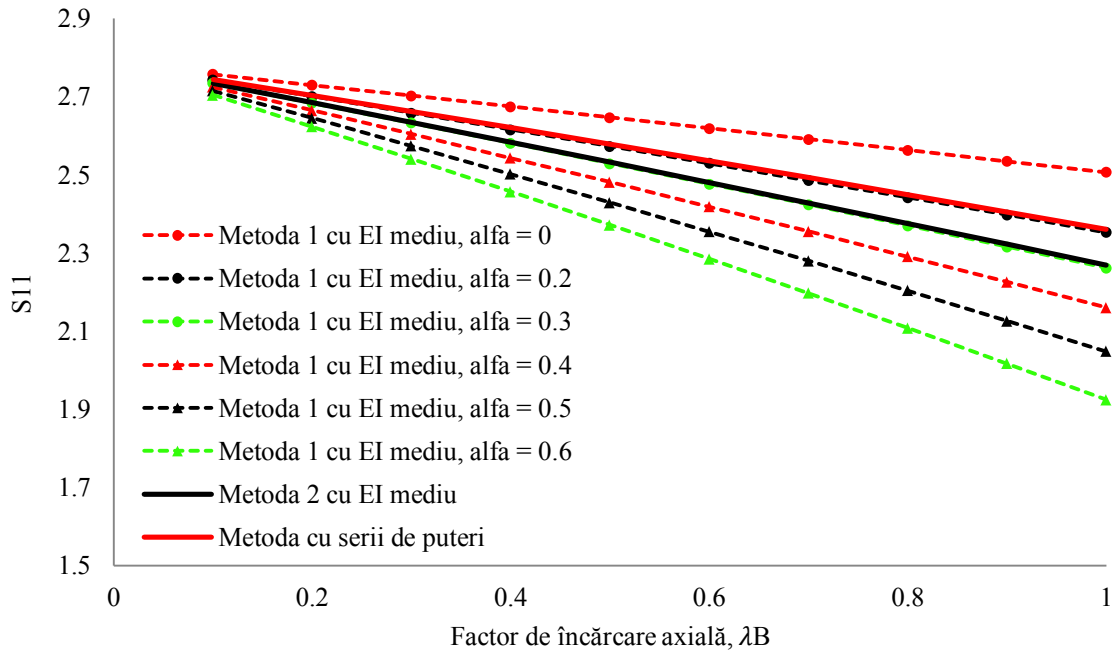


Fig. 3.32 Influența factorului de încărcare axială în evaluarea funcției  $S_{11}$ , în funcție de metoda utilizată

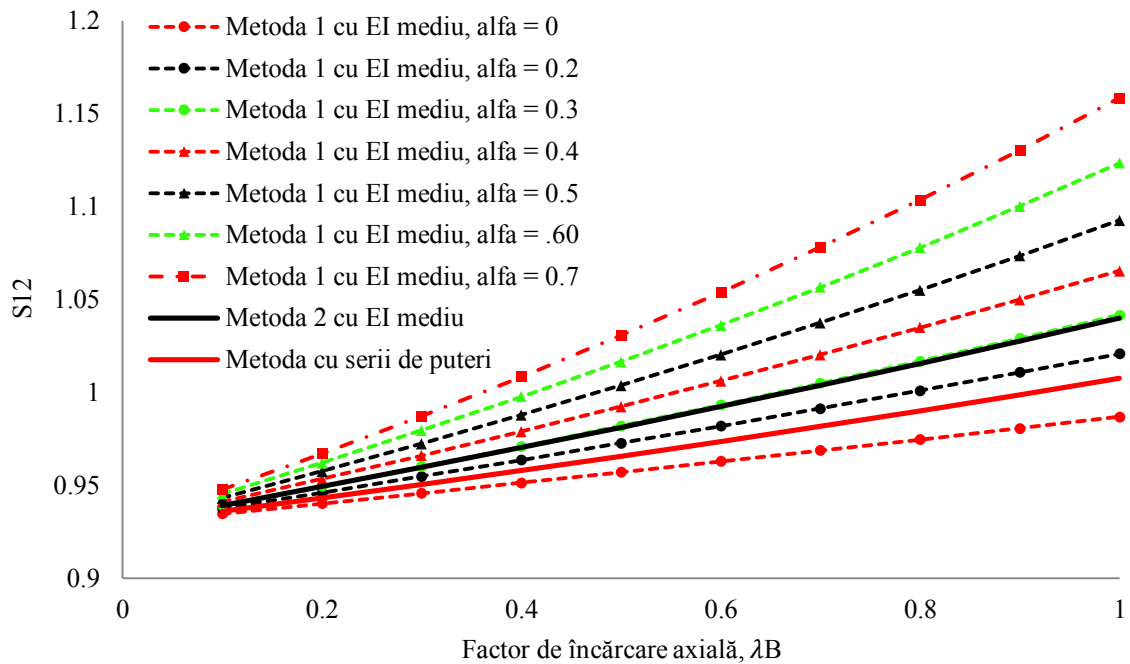


Fig. 3.33 Influența factorului de încărcare axială în evaluarea funcției  $S_{12}$ , în funcție de metoda utilizată

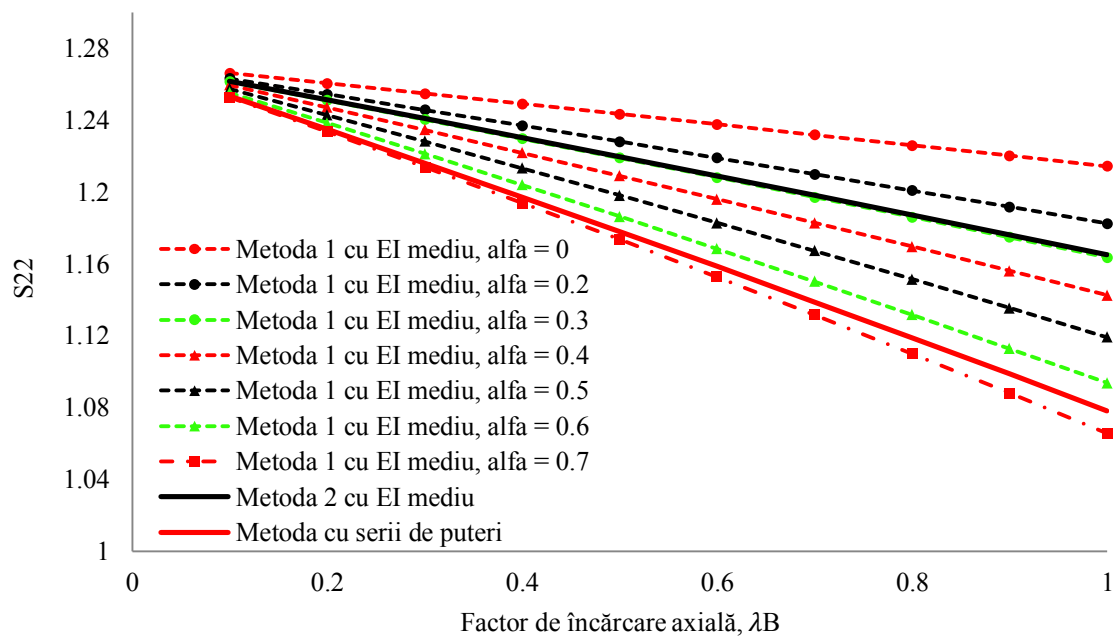


Fig. 3.34 Influența factorului de încărcare axială în evaluarea funcției  $S_{22}$ , în funcție de metoda utilizată

### 3.7 Concluzii preliminare

În cadrul acestui capitol sunt prezentate două modele care stabilesc relațiile forță-deplasare la nivel de element pentru barele cu secțiune variabilă, integrând efectele forței axiale, precum și al imperfecțiunilor geometrice inițiale și al deformațiilor de lunecare transversale. Aplicând relația Maxwell-Mohr se stabilește relația incrementală deplasare-forță prin inversarea căreia se evidențiază matricea de rigiditate și vectorul forțelor nodale echivalente în prezența efectelor mai sus amintite. Primul procedeu este unul practic, și care, pentru exprimarea momentului încovoietor în lungul barei, presupune integrarea ecuației diferențiale de echilibru a barei considerată cu un modul de rigiditate la încovoiere echivalent și aplicarea relației Maxwell-Mohr. În acest fel, în expresia momentului încovoietor este inclus un coeficient de compresiune mediu (echivalent) care este determinat ținând cont de raportul momentelor de inerție ale secțiunilor de la capetele elementului. A doua formulare, considerată „*exactă*”, are la bază o tehnică de rezolvare a ecuației diferențiale de echilibru de ordinul al II-lea cu coeficienți variabili prin dezvoltare în serii de puteri, având ca necunoscută principală momentul încovoietor, efectul imperfecțiunilor geometrice inițiale putând fi incluse în seriile de puteri prin dezvoltarea Taylor. Având exprimarea analitică a momentului încovoietor matricele de rigiditate și vectorul forțelor nodale echivalente se determină ca și în cazul precedent prin aplicarea relației Maxwell-Mohr. Efectul neliniarității geometrice globale este luat în considerare prin reactualizarea configurației geometrice a barei la fiecare pas de încărcare și prin includerea matricei de rigiditate geometrică.

Pentru a verifica eficiența și acuratețea modelului de calcul propus precum și a programului de calcul dezvoltat (EPASS), sunt prezentate câteva exemple numerice tratate în literatura de specialitate (Li & Li, 2002), (Hadidi, Azar, & Marand, 2014), (Soltani, Asgarian, & Mohri, 2014). De asemenea, s-au efectuat și studii comparative în programul de element finit Abaqus.

Din analizele efectuate se pot evidenția câteva remarci importante:

- În literatura de specialitate sunt prezentate numeroase metode care au la bază dezvoltarea în serii de puteri, care presupun rezolvarea ecuației diferențiale de echilibru cu coeficienți variabili având ca necunoscută principală deplasarea, însă majoritatea prezintă unele limitări. Astfel, pentru obținerea unor rezultate cu precizie satisfăcătoare în (Li & Li, 2002) sunt nevoie de 13 termeni în polinomul Chebyshev, însă acest procedeu nu include efectul imperfecțiunilor geometrice inițiale și nici al forțelor uniform distribuite pe bară. Formularea propusă în (Asgarian, Soltani, & Mohri, 2013), (Soltani, Asgarian, & Mohri, 2014) presupune utilizarea a minim 12 termeni în dezvoltarea seriilor de puteri; acest model, chiar dacă include efectul deformațiilor de lunecare transversală, efectul forței axiale în lungul barei și pot fi considerate forțe uniform distribuite în lungul barei, nu include efectul imperfecțiunilor geometrice inițiale. De asemenea, în (Asgarian, Soltani, & Mohri, 2013) analizele prezentate sunt pentru flambajul lateral al barei cu secțiune variabilă, pe direcția minimă de inerție, iar studii pe direcția maximă de inerție nu sunt efectuate, deși efectul variației secțiunii transversale este mai evident. Hadidi, Azar, & Marand (2014) extinde procedeu propus de Li și al. (Li & Li, 2002), (Li J. L., 2003)

pentru includerea forțelor în cuprinsul barei, fiind necesar minim 14 termeni în funcția polinomială, însă nu este inclus efectul imperfecțiunilor geometrice inițiale.

- Pentru evaluarea funcțiilor de stabilitate s-au efectuat studii numerice, pentru bare cu secțiune variabilă încărcate cu forțe axiale mari (de compresiune sau întindere) și s-a constatat că un număr de 20-30 de termeni în exprimarea funcției polinomiale este suficient pentru surprinderea acurateții rezultatelor, spre deosebire de modelul prezentat în (Al-Sadder, 2004) care are nevoie de un număr de peste 60 de termeni. Totodată se evidențiază faptul că în prezența unor forțe axiale de mică magnitudine prezenta formulare conduce la rezultate stabile și exacte necesitând un număr mic de termeni, spre deosebire de formulările din literatură care înregistrează instabilități și necesită un număr mare de termeni pentru obținerea unor rezultate stabile.
- În cazul procedurii practice propus, se recomandă ca raportul înălțimilor secțiunilor transversale de capăt să nu fie mai mic de 0.6, în caz contrar s-a observat că metoda conduce la obținerea unor rezultate cu erori de peste 8%. În acest caz, se recomandă utilizarea formulării bazate pe abordarea în serii de puteri care s-a demonstrat a fi stabil și conduce la obținerea unor rezultate cu erori până la 3%.
- Se constată faptul că metoda de integrare utilizată nu influențează semnificativ numărul necesar de termeni în expresia funcției polinomiale. În schimb, s-a observat că metodele Gauss sunt mai rapid convergente decât regula Simpson 3/8 pentru un număr de puncte monitorizate în lungul elementului mai mic, datorită alegerii optime a poziției punctelor de integrare.

## Cap. 4 Modelul de calcul propus pentru analiza avansată a structurilor în cadre. Aplicația EPASS

---

### 4.1 Introducere

O preocupare continuă a cercetătorilor, la nivel mondial, este îmbunătățirea metodelor de analiză, pentru obținerea unui răspuns cât mai reprezentativ al structurilor. Odată cu dezvoltarea tehnologiei pe calculator, utilizarea practică a metodelor avansate devine posibilă. Totuși, modelul de analiză se dorește a fi cât mai ușor și practic de utilizat în proiectarea curentă. Metoda elementelor finite, chiar dacă este considerată o metodă “exactă”, presupune un efort computațional ridicat, datorită necesității divizării elementelor și a datelor ce trebuie memorate. Din aceste considerente, s-a considerat oportună perfecționarea metodelor bazate pe conceptul de articulație plastică, modelul abordat presupunând modelarea structurii utilizând un singur element/bară ceea ce reduce numărul gradelor de libertate utilizate în analiză și, implicit, timpul de calcul, și, în același timp, rezultatele obținute au un nivel de acuratețe comparabil cu metodele de analiză considerate “exacte”.

În subcapitolele ce urmează este prezentat modelul de calcul implementat în programul dezvoltat de autor, EPASS (Elasto-Plastic Analysis of Steel Structures).

#### 4.1.1 Ipotezele de calcul ale metodei

Modelul de calcul are la bază următoarele ipoteze de calcul:

- Ipoteza lui Bernoulli (ipoteza secțiunilor plane) – se consideră că o secțiune plană și normală pe axa barei înainte de deformare rămâne tot plană și normală pe axa barei și după deformație
- Ipoteza micilor deformații (deplasările și rotirile pot fi mari)
- Efectele pierderii stabilității locale, atât flambajul local, cât și flambajul din torsiune, au fost neglijate în analiză
- Secțiunile transversale ale elementelor au o comportare perfect plastică (nu se consideră reconsolidarea materialului) după apariția articulației plastice
- Se neglijează efectul descărcărilor elastice
- Convenția de semne este: momentele și rotirile sunt pozitive când au sensul antiorar
- Tipul de element utilizat este cel cu 2 noduri la capete având 6 grade de libertate ( 3 GDL pentru fiecare nod, 2 deplasări și o rotire).

## 4.2 Analiza la nivel de element

### 4.2.1 Modelarea comportării elasto-plastice a secțiunilor. Criteriul de plastificare

Modelul adoptat în prezenta lucrare pentru modelarea comportării elasto-plastice este cel al plastificării concentrate având la bază conceptul de articulație plastică punctuală cu formare instantanee (Chiorean C. G., 2006). În această accepțiune formarea și funcționarea articulațiilor plastice este permisă doar în anumite secțiuni caracteristice ale barei (de regulă cele maxim solificate-capetele elementului sau într-o secțiune din cuprinsul elementului), articulațiile plastice fiind de dimensiune zero, restul elementului având o comportare elastică. Formarea și funcționarea articulației plastice este guvernată de un criteriu de plastificare care poate fi exprimat sintetic prin intermediul curbelor de *interacțiune plastică* definite, în general, prin relații analitice de formă multi-liniară (spre exemplu cele date de codul american AISC-LRFD) sau neliniară (Orbison, 1982), (Duan & Chen, 1990). Drept consecință, condiția de plastificare poate fi exprimată cu următoarea relație:

$$\Gamma(N, M) = 0 \quad (4.1)$$

unde  $N, M$  reprezintă efortul axial și momentul încovoietor într-o secțiune susceptibilă de plastificare:

$\Gamma = 0$  reprezintă plastificarea integrală a unei secțiuni

$\Gamma > 0$ , această stare de eforturi nu este permisă.

În programul dezvoltat de autor, modelarea comportării elasto-plastice a secțiunilor transversale poate fi inclusă considerând următoarele curbe de interacțiune plastică:

Curba de plastificare AISC-LRFD (Fig. 4.1), care poate fi exprimată astfel:

$$\begin{cases} \frac{N}{N_p} + \frac{8}{9} \frac{M}{M_p} = 1, & \frac{N}{N_p} \geq \frac{2}{9} \frac{M}{M_p} \\ \frac{N}{2N_p} + \frac{M}{M_p} = 1, & \frac{N}{N_p} < \frac{2}{9} \frac{M}{M_p} \end{cases} \quad (4.2)$$

Curba de plastificare propusă de Zubydan (2010) (Fig. 4.1)), care poate fi exprimată:

(a) pentru profile H

(b) pentru profile I

$$\begin{cases} \frac{N}{N_p} + \frac{7}{8} \frac{M}{M_p} = 1, & \frac{N}{N_p} \geq 0.2 \\ \left(\frac{N}{N_p}\right)^{1.5} + \frac{M}{M_p} = 1, & \frac{N}{N_p} < 0.2 \end{cases} \quad (a) \quad \begin{cases} \frac{N}{N_p} + \frac{9}{11} \frac{M}{M_p} = 1, & \frac{N}{N_p} \geq 0.3 \\ \left(\frac{N}{N_p}\right)^{1.65} + \frac{M}{M_p} = 1, & \frac{N}{N_p} < 0.3 \end{cases} \quad (b) \quad (4.3)$$



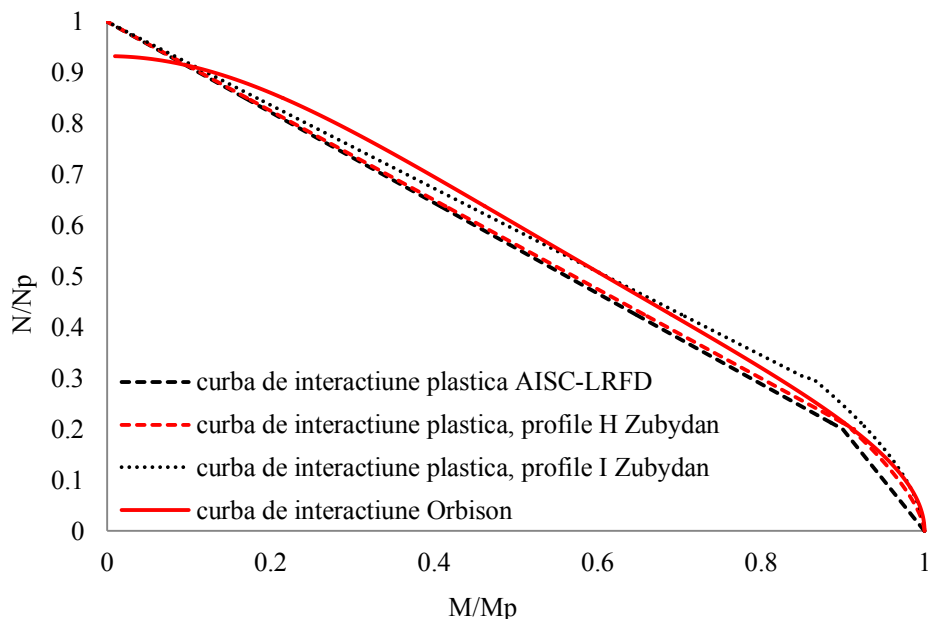


Fig. 4.1 Criterii de plastificare pentru profile metalice

Curba de plastificare Orbison (Fig. 4.1)), care poate fi exprimată:

$$1.15 \left( \frac{N}{N_p} \right)^2 + \left( \frac{M}{M_p} \right)^2 + 3.67 \left( \frac{N}{N_p} \right)^2 \left( \frac{M}{M_p} \right)^2 = 1 \quad (4.4)$$

unde  $N$  este forța axială,  $N_p = A\sigma_y$  este forța axială capabilă,  $A$  este aria secțiunii transversale,  $\sigma_y$  reprezintă valoarea tensiunii de curgere a materialului,  $M$  este momentul încovoietor față de axa de inerție principală,  $M_p = Z_p\sigma_y$  este momentul încovoietor capabil față de axa de inerție principală,  $Z_p$  este modulul plastic de rezistență pentru axa de inerție principală .

#### 4.2.2 Plastificarea graduală

Pentru a include efectul plasticității distribuite, modelul abordat de Zubyan (2010) este propus, și care a fost prezentat succint în subcap. 2.4.1.2. Formularea presupune determinarea unui modul de elasticitate tangent sau secant echivalent, utilizând relații empirice, pentru un element de bară supus la compresiune axială sau încovoiere uniaxială cu compresiune, și utilizarea acestuia în relațiile incrementale forță deplasare. Metoda propusă de Zubyan (2010) poate include sau nu efectul tensiunilor reziduale conform ECCS. În funcție de starea de solicitare într-o secțiune transversală din oțel, Zubyan propune două curbe pentru determinarea modulului de elasticitate tangent adimensional, și anume secțiuni transversale supuse la compresiune axială pură, respectiv la încovoiere cu compresiune axială. În prezenta formulare modelul propus în (Zubyan, 2010) este extins pentru includerea forțelor în cuprinsul barei, prin considerarea a trei secțiuni transversale susceptibile de plastificare, două la capete și una în câmp, Fig. 4.2. Astfel, în timpul execuției, programul identifică elementele solicitate la aceste încărcări

(cu sau fără forțe uniform distribuite) și evaluează modulul de elasticitate tangent, pe baza relațiilor descrise anterior. Modulul de elasticitate tangent care va fi inclus în expresia matricii de rigiditate va fi media aritmetică a celor trei valori.

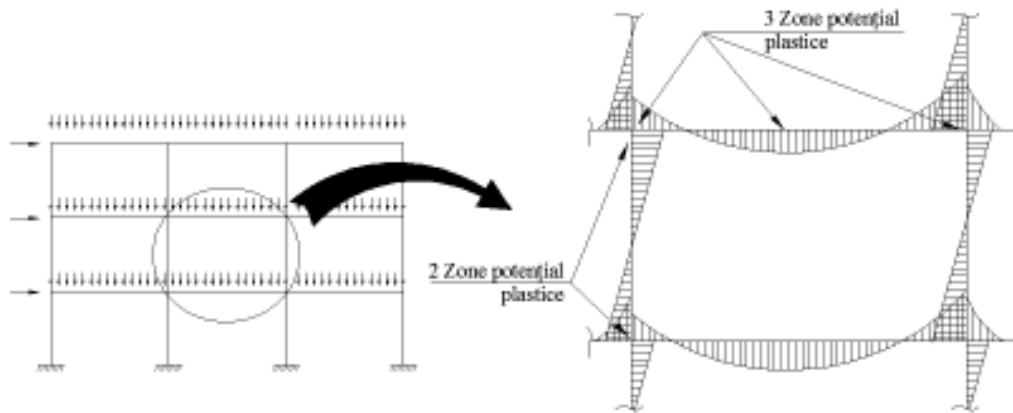


Fig. 4.2 Zone potențial plastice

#### 4.2.3 Efectul local al neliniarității geometrice în cazul barelor prismatice

Considerarea efectului local al neliniarității geometrice asupra barelor cu secțiune variabilă a fost descris în cadrul Capitolului 3 al prezentei lucrări. Pentru cazul barelor prismatice (cu secțiune constantă în lungul lor) efectul neliniarității geometrice locale, se ia în considerare, pentru fiecare element, în baza funcțiilor de stabilitate propuse de Livesley & Chandler (1956), și care sunt actualizate la fiecare pas de încărcare în funcție de nivelul forței axiale:

$$c_1 = \begin{cases} \frac{v \sin(v) - v^2 \cos(v)}{2 - 2 \cos(v) - v \sin(v)} & \text{pentru } N < 0 \\ \frac{v^2 \cosh(v) - v \sinh(v)}{2 - 2 \cos(v) + v \sin(v)} & \text{pentru } N > 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

$$c_2 = \begin{cases} \frac{v^2 - v \sin(v)}{2 - 2 \cos(v) - v \sin(v)} & \text{pentru } N < 0 \\ \frac{v \sinh(v) - v^2}{2 - 2 \cos(v) + v \sin(v)} & \text{pentru } N > 0 \end{cases}$$

unde  $v^2 = L^2 \frac{N}{EI}$  iar  $N$  este considerat pozitiv pentru compresiune.

Se observă că soluțiile numerice obținute cu ecuațiile (4.5) sunt nedeterminate când forța axială este egală cu 0. În acest caz, s-au utilizat relațiile propuse de Lui și Chen (1986), pentru aproximarea funcțiilor de stabilitate când coeficientul de compresiune este cuprins între  $-2.0 \leq v \leq 2.0$ .

$$c_1 = 4 + \frac{2\pi^2 q}{15} - \frac{(0.01 q + 0.543) q^2}{4 + q} - \frac{(0.004 q + 0.285) q^2}{8.183 + q}$$

$$c_2 = 2 - \frac{\pi^2 q}{30} + \frac{(0.01 q + 0.543) q^2}{4 + q} - \frac{(0.004 q + 0.285) q^2}{8.183 + q} \quad (4.6)$$

$$\text{Unde } q = \frac{N}{N_{Euler}} = \frac{N}{\frac{\pi^2 EI}{L^2}} = \frac{v^2}{\pi^2}.$$

#### 4.2.4 Efectul imperfecțiunilor geometrice inițiale în cazul barelor prismatice

Elementele structurale din oțel, indiferent de calitatea în execuție, dezvoltă anumite imperfecțiuni inițiale care pot fi clasificate în două mari categorii: imperfecțiuni geometrice la nivelul elementelor structurale (bare încovoiate), și imperfecțiuni generate de operațiunile de montaj (neverticalitatea elementelor).

Pentru considerarea efectului local al imperfecțiunilor geometrice inițiale, în studiile întreprinse de autor, s-a luat în considerare elementul de bară curbat în configurația premergătoare încărcării, considerând o formă sinusoidală, după cum se poate observa în Fig. 4.3.

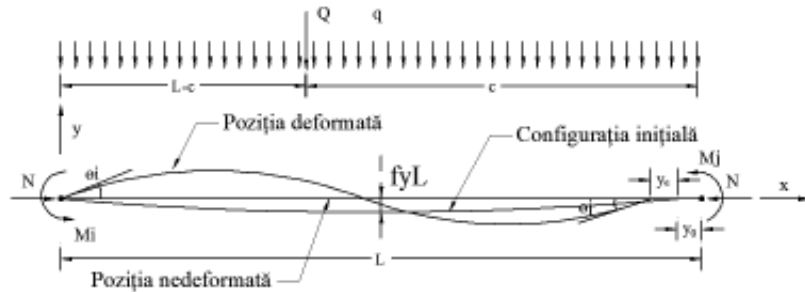


Fig. 4.3 Element de bară cu imperfecțiuni geometrice locale inițiale

În consecință deformația totală poate fi exprimată :

$$y = y_e + y_0 \quad (4.7)$$

unde  $y_e$  este deformația cauzată de forțele exterioare și  $y_0 = f_y L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$  este deformația cauzată de imperfecțiunile geometrice inițiale.

Pornind de la teoria lui Timoshenko (1961), Gu & Chan (2005) includ efectul imperfecțiunilor geometrice inițiale în ecuația diferențială de echilibru:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{d^2 y_0}{dx^2} = \frac{d^2 y_e}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI(x)} \quad (4.8)$$

Impunând condițiile de rezemare, se deduce deplasarea transversală într-o secțiune curentă  $x$  a barei:

$$y(x) = -M_{yA} \left[ \frac{\sin(\alpha L - \alpha x)}{\sin(\alpha L)} - \left(1 - \frac{x}{L}\right) \right] + M_{yB} \left( \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\alpha L)} - \frac{x}{L} \right) + \frac{q}{1-q} f_y L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (4.9)$$

Unde  $\alpha = \sqrt{\frac{N}{EI}}$  este factorul de compresiune și  $q = \frac{N}{N_{Euler}}$  este factorul de încărcare axială adimensional.

Derivând ecuația (4.9) în raport cu  $x$  și exprimând rotirile la capete, se pot deduce expresiile momentelor încovoietoare la capetele barei:

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} c_0 f_y \\ -c_0 f_y \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Unde  $c_0, c_1, c_2$  sunt funcții de stabilitate propuse de (Oran, 1973) și (Chan & Gu, 2000) și care sunt date în Anexa A.

#### 4.2.5 Integrarea ecuației diferențiale a fibrei medii deformată. Ecuația momentului încovoietor în secțiunea curentă pentru bara prismatică

Pentru elementul de bară, din Fig. 4.3, supus la efortul axial  $N$ , forță concentrată  $Q$  și forță uniform distribuită  $q$ , momentul încovoietor în secțiunea  $x$  poate fi exprimat :

$$\begin{aligned} M(x) &= Ny + \frac{1}{2} qx(L-x) + M_A \left( \frac{x}{L} - 1 \right) + M_B \frac{x}{L} + Q \frac{Cx}{L}, \quad 0 \leq x \leq L-c \\ M(x) &= Ny + \frac{1}{2} qx(L-x) + M_A \left( \frac{x}{L} - 1 \right) + M_B \frac{x}{L} + Q \left( \frac{Cx}{L} - x + L - c \right), \quad L-c \leq x \leq L \end{aligned} \quad (4.11)$$

Se cunoaște că ecuația axei medii deformată, în domeniul micilor deplasări, are forma:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{d^2 y_0}{dx^2} = \frac{d^2 y_e}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI(x)} \quad (4.12)$$

Ținând cont de ecuația axei medii deformată și înlocuind  $y = y_e + y_0$  și  $y_0 = f_y L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$  obținem :

$$\begin{aligned} y''(x) &= -\frac{1}{EI} \left[ N \left( y_e + f_y L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right) + \frac{1}{2} qx(L-x) + M_A \left( \frac{x}{L} - 1 \right) + M_B \frac{x}{L} + Q \frac{Cx}{L} \right], \quad 0 \leq x \leq L-c \\ y''(x) &= -\frac{1}{EI} \left[ N \left( y_e + f_y L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right) + \frac{1}{2} qx(L-x) + M_A \left( \frac{x}{L} - 1 \right) + M_B \frac{x}{L} + Q \left( \frac{Cx}{L} - x + L - c \right) \right], \quad L-c \leq x \leq L \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ținând cont de factorul de compresiune axială,  $\alpha^2 = \frac{N}{EI_z}$ , și rearanjând obținem:

$$\begin{aligned} y'' + \alpha^2 y_e &= -\frac{1}{EI} \left[ N \left( f_y L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right) + \frac{1}{2} qx(L-x) + M_A \left( \frac{x}{L} - 1 \right) + M_B \frac{x}{L} + Q \frac{Cx}{L} \right], \quad 0 \leq x \leq L-c \\ y'' + \alpha^2 y_e &= -\frac{1}{EI} \left[ N \left( f_y L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right) + \frac{1}{2} qx(L-x) + M_A \left( \frac{x}{L} - 1 \right) + M_B \frac{x}{L} + Q \left( \frac{Cx}{L} - x + L - c \right) \right], \quad L-c \leq x \leq L \end{aligned} \quad (4.14)$$

Soluția generală a ecuației diferențiale este:

$$y_e = y_e^0 + \bar{y}_e \quad (4.15)$$

Unde  $y_e^0$  este soluția generală a ecuației omogene și care se poate alege sub forma:

$$y_e^0 = A_1 \sin(\alpha x) + A_2 \cos(\alpha x) \quad (4.16)$$

Iar  $\bar{y}_e$  este o soluție particulară a ecuației neomogene și care se poate alege după forma membrului drept al ecuației. Astfel, soluția ecuației diferențiale se poate scrie:

$$y_e = A_1 \sin(\alpha x) + A_2 \cos(\alpha x) + \frac{\alpha^2 f_y L^3}{\pi^2 - \alpha^2 L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \quad (4.17)$$

$$-\frac{1}{N} \left[ \frac{1}{2} qx(L-x) + \frac{q}{\alpha^2} + M_A \left( \frac{x}{L} - 1 \right) + M_B \frac{x}{L} + Q \frac{Cx}{L} \right], \quad 0 \leq x \leq L-c$$

$$y_e = A_3 \sin(\alpha x) + A_4 \cos(\alpha x) + \frac{\alpha^2 f_y L^3}{\pi^2 - \alpha^2 L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \frac{1}{N} \left[ \frac{1}{2} qx(L-x) + \frac{q}{\alpha^2} + M_A \left( \frac{x}{L} - 1 \right) + M_B \frac{x}{L} + Q \left( \frac{Cx}{L} - x + L - c \right) \right], \quad L-c \leq x \leq L$$

Pentru a determina constantele de integrare, se impun următoarele condiții:

- condiții de deplasare nulă la capetele barei,  $y(0) = 0$ ,  $y(L) = 0$
- condiții de continuitate în punctul de aplicare al sarcinii  $Q$  unde elementul de bară descris de cele două expresii din Ecuația 4.17 au aceeași deplasare și o tangentă comună  $y(L-c-0) = y(L-c+0)$ ,  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(L-c)-0} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(L-c)+0}$ .

Rezolvând sistemul de ecuații, deducem expresiile constantelor de integrare care au următoarea formă:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{N \sin(\alpha L)} \left[ M_B + M_A \cos(\alpha L) + \frac{q}{\alpha^2} (1 - \cos(\alpha L)) + \frac{Q}{\alpha} \sin(\alpha c) \right] \\ A_2 &= \frac{1}{N} \left( \frac{q}{\alpha^2} - M_A \right) \\ A_3 &= \frac{1}{N \sin(\alpha L)} \left[ M_B + M_A \cos(\alpha L) + \frac{q}{\alpha^2} (1 - \cos(\alpha L)) - \frac{Q}{\alpha} \cos(\alpha L) \sin(\alpha(L-c)) \right] \\ A_4 &= \frac{1}{N} \left( \frac{q}{\alpha^2} - M_A \right) + \frac{Q}{\alpha N} \sin(\alpha(L-c)) \end{aligned} \quad (4.18)$$

După înlocuirea constantelor de integrare în Ecuația 4.15, ne rezultă următoarea expresie a deplasării într-o secțiune curentă:

$$\begin{aligned} y(x) &= -M_A \left[ \frac{\sin(\alpha L - \alpha x)}{\sin(\alpha L)} - \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \right] + M_B \left( \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\alpha L)} - \frac{x}{L} \right) + \frac{\alpha^2 f_y L^3}{\pi^2 - \alpha^2 L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \frac{qx}{2N} (L-x) + \\ &\quad + \frac{q}{N\alpha^2} \left[ \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\alpha L - \alpha x\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\alpha L\right)} - 1 \right] + \frac{Q}{\alpha N} \left[ \frac{\sin(\alpha c) \sin(\alpha x)}{\sin(\alpha L)} - \frac{\alpha c x}{L} \right], \quad 0 \leq x \leq L-c \\ y(x) &= -M_A \left[ \frac{\sin(\alpha L - \alpha x)}{\sin(\alpha L)} - \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \right] + M_B \left( \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\alpha L)} - \frac{x}{L} \right) + \frac{\alpha^2 f_y L^3}{\pi^2 - \alpha^2 L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \frac{qx}{2N} (L-x) + \\ &\quad + \frac{q}{N\alpha^2} \left[ \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\alpha L - \alpha x\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\alpha L\right)} - 1 \right] - \frac{Q}{\alpha N} \left[ \frac{\sin(\alpha(L-c)) \sin(\alpha(x-L))}{\sin(\alpha L)} + \frac{\alpha(L-c)(L-x)}{L} \right], \quad L-c \leq x \leq L \end{aligned} \quad (4.19)$$

Derivând de două ori, obținem expresia momentului încovoietor în secțiunea curentă, pentru bara cu secțiune constantă:

$$\begin{aligned} M(x) &= -M_A \frac{\sin(\alpha L - \alpha x)}{\sin(\alpha L)} + M_B \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\alpha L)} + \frac{N f_y L \pi^2}{\pi^2 - \alpha^2 L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \\ &\quad + \frac{q}{\alpha^2} \left[ \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\alpha L - \alpha x\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\alpha L\right)} - 1 \right] + \frac{Q}{\alpha} \frac{\sin(\alpha c) \sin(\alpha x)}{\sin(\alpha L)}, \quad 0 \leq x \leq L-c \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$M(x) = -M_A \frac{\sin(\alpha L - \alpha x)}{\sin(\alpha L)} + M_B \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\alpha L)} + \frac{P f_y L \pi^2}{\pi^2 - \alpha^2 L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{q}{\alpha^2} \left[ \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\alpha L - \alpha x\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\alpha L\right)} - 1 \right] + \frac{Q}{\alpha} \frac{\sin(\alpha(L-c)) \sin(\alpha(L-x))}{\sin(\alpha L)}, \quad L-c \leq x \leq L$$

#### 4.2.6 Efectele de ordinul al II-lea asupra forțelor nodale echivalente pentru bara prismatică

Pentru a obține rotirile la capetele barei, Ecuația 4.20 se derivează o dată și ținând cont că  $\theta_A = y'(0)$  și  $\theta_B = y'(L)$ , avem:

$$\theta_A = -\frac{M_A}{N} \left[ \frac{\alpha \cos(\alpha L)}{\sin(\alpha L)} - \frac{1}{L} \right] - \frac{M_B}{N} \left( \frac{\alpha}{\sin(\alpha L)} - \frac{1}{L} \right) - \frac{\alpha^2 f_y L^2 \pi}{\pi^2 - \alpha^2 L^2} + \frac{q}{N \alpha^2} \left[ \frac{\alpha \cos(\alpha L)}{\sin(\alpha L)} - \frac{\alpha}{\sin(\alpha L)} \right] + \frac{qL}{2N} - \frac{Q}{P} \left[ \frac{\sin(\alpha c)}{\sin(\alpha L)} - \frac{c}{L} \right], \quad 0 \leq x \leq L-c$$

$$\theta_B = -\frac{M_A}{N} \left[ \frac{\alpha}{\sin(\alpha L)} - \frac{1}{L} \right] - \frac{M_B}{N} \left( \frac{\alpha \cos(\alpha L)}{\sin(\alpha L)} - \frac{1}{L} \right) + \frac{\alpha^2 f_y L^2 \pi}{\pi^2 - \alpha^2 L^2} - \frac{q}{N \alpha^2} \left[ \frac{\alpha \cos(\alpha L)}{\sin(\alpha L)} - \frac{\alpha}{\sin(\alpha L)} \right] - \frac{qL}{2N} + \frac{Q}{P} \left[ \frac{\sin(\alpha(L-c))}{\sin(\alpha L)} - \frac{L-c}{L} \right], \quad L-c \leq x \leq L$$

Inversând relațiile (4.21), obținem relația forță-deplasare la nivel de element raportat la sistemul coordonatelor de bază pentru o bară cu secțiune constantă:

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \left( \frac{EI_y}{L} \right) & c_2 \left( \frac{EI_y}{L} \right) \\ c_2 \left( \frac{EI_y}{L} \right) & c_1 \left( \frac{EI_y}{L} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix} + 2P \frac{\pi f_y L}{\pi^2 - \alpha^2 L^2} \begin{bmatrix} \frac{c_1 - c_2}{2} \\ -\frac{c_1 - c_2}{2} \end{bmatrix} + \frac{q L^2}{12} \begin{bmatrix} -\frac{6}{c_1 + c_2} \\ \frac{6}{c_1 + c_2} \end{bmatrix} + \frac{QL}{\alpha^2 L \sin(\alpha L)} \begin{bmatrix} c_1 \left[ \frac{c}{L} \sin(\alpha L) - \sin(\alpha c) \right] - c_2 \left[ \frac{L-c}{L} \sin(\alpha L) - \sin(\alpha(L-c)) \right] \\ -c_1 \left[ \frac{L-c}{L} \sin(\alpha L) - \sin(\alpha(L-c)) \right] + c_2 \left[ \frac{c}{L} \sin(\alpha L) - \sin(\alpha c) \right] \end{bmatrix}$$

Iar simbolic relația (4.22) se poate scrie:

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} = k_r \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix} + f_{y0} + f_q + f_Q$$

Unde  $f_q$ ,  $f_Q$  și  $f_{y0}$  sunt forțele nodale echivalente din încărcările uniform distribuite, încărcarea concentrată, respectiv imperfecțiunile geometrice inițiale.

$$f_q = \frac{q L^2}{12} \begin{bmatrix} -\frac{6}{c_1 + c_2} \\ \frac{6}{c_1 + c_2} \end{bmatrix}$$

$$f_{y0} = 2P \frac{\pi f_y L}{\pi^2 - \alpha^2 L^2} \begin{bmatrix} \frac{c_1 - c_2}{2} \\ -\frac{c_1 - c_2}{2} \end{bmatrix}$$

$$f_Q = \frac{QL}{\alpha^2 L \sin(\alpha L)} \left[ c_1 \left[ \frac{c}{L} \sin(\alpha L) - \sin(\alpha c) \right] - c_2 \left[ \frac{L-c}{L} \sin(\alpha L) - \sin(\alpha(L-c)) \right] \right] \\ \left[ -c_1 \left[ \frac{L-c}{L} \sin(\alpha L) - \sin(\alpha(L-c)) \right] + c_2 \left[ \frac{c}{L} \sin(\alpha L) - \sin(\alpha c) \right] \right]$$

Valorile forțelor tăietoare la capetele barei, ținând cont de efectul forței axiale în lungul elementului, se pot calcula, conform (Barsan G. , 1978):

$$T_A = P \left\{ \frac{c}{L} + \frac{c_1 + c_2}{\alpha^2 L \sin(\alpha L)} \left[ \frac{2c-L}{L} \sin(\alpha L) + \sin(\alpha(L-c)) - \sin(\alpha c) \right] \right\} \\ T_B = Q - T_A \quad (4.25)$$

Modalitatea de obținere a relației forță-deplasare pentru barele cu secțiune variabilă au fost discutate detaliat în capitolul III.

#### 4.2.7 Efectele curbei de interacțiune plastică asupra matricei de rigiditate și a forțelor nodale echivalente

În prezenta lucrare modelul propus în (Chiorean C. G., 2006), (Chiorean C. G., 2009), (Chiorean, Tarța, Marchiș, & Buru, 2012) ce exprimă relația forță-deplasare la nivel de element în condițiile formării articulațiilor plastice la capete elementului și în cuprinsul acestuia este extins pentru considerarea barelor cu secțiune variabilă coroborat cu considerarea efectelor de ordinul al II-lea în exprimarea momentelor încovoietoare și a imperfecțiunilor geometrice în lungul elementului. Astfel, ecuația de constrângere impusă pentru o bară cu articulație plastică formată la capatul “i” poate fi exprimată astfel:

$$\alpha \Delta M_i = \gamma \Delta N \quad (4.26)$$

De unde rezultă  $\Delta M_i = \frac{\gamma}{\alpha} \Delta N = e \Delta N$ , unde  $e = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\Delta M_i}{\Delta N}$ .

(a)

(b)

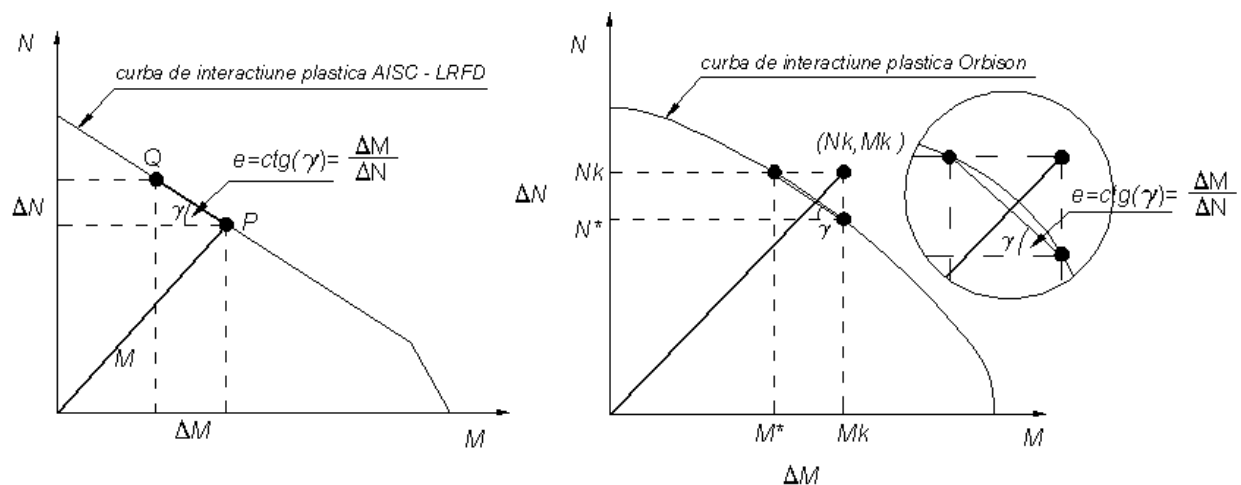


Fig. 4.4 Criteriul de plastificare: (a) liniar ((AISC), 1994); (b) neliniar (Orbison, McGuire, & Abel, 1982)

Coeficientul “e” se calculează astfel:

- Pentru curba de plastificare AISC-LRFD

$$\begin{cases} \frac{N}{N_p} + \frac{8M}{9M_p} = 1 \\ \frac{N}{2N_p} + \frac{M}{M_p} = 1 \end{cases} \Big|_{\frac{\partial}{\partial N}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{N_p} + \frac{8}{9M_p} \frac{\Delta M}{\Delta N} = 1 \\ \frac{1}{2N_p} + \frac{1}{M_p} \frac{\Delta M}{\Delta N} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\Delta M}{\Delta N} = -\frac{9M_p}{8N_p}, & \frac{N}{N_p} \geq \frac{2M}{9M_p} \\ \frac{\Delta M}{\Delta N} = -\frac{1M_p}{2N_p}, & \frac{N}{N_p} < \frac{2M}{9M_p} \end{cases} \quad (4.27)$$

- Pentru curba de plastificare Orbison

$$\frac{\Delta M}{\Delta N} = \frac{M_k - M^*}{N_k - N^*} \text{ unde } (M_k, N_k) \text{ sunt eforturile în secțiunea plastificată la pasul "k".}$$

Se calculează  $(M^*, N^*)$  astfel încât combinațiile de eforturi  $(M^*, N_k)$ ,  $(M_k, N^*)$  să respecte curba de plastificare.

- Se scrie ecuația curbei de plastificare cu necunoscută în M:

$$\left(\frac{M}{M_p}\right)^2 \left[1 + 3.67 \left(\frac{N}{N_p}\right)^2\right] = 1 - 1.15 \left(\frac{N}{N_p}\right)^2 \Rightarrow \frac{M}{M_p} = \pm \sqrt{\frac{1 - 1.15 \left(\frac{N}{N_p}\right)^2}{1 + 3.67 \left(\frac{N}{N_p}\right)^2}} \quad (4.28)$$

- Se scrie ecuația curbei de plastificare cu necunoscută în N:

$$\left(\frac{N}{N_p}\right)^2 \left[1.15 + 3.67 \left(\frac{M}{M_p}\right)^2\right] = 1 - \left(\frac{M}{M_p}\right)^2 \Rightarrow \frac{N}{N_p} = \pm \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{M}{M_p}\right)^2}{1.15 + 3.67 \left(\frac{M}{M_p}\right)^2}} \quad (4.29)$$

Relația incrementală forță-deplasare pentru un element de bară care ține cont de plastificare unei secțiuni incluzând aici și forțele nodale echivalente poate fi exprimată:

$$\Delta s_r = k_{r,ep} \Delta u_r + \Delta q_{rp} \quad (4.30)$$

Unde  $k_{r,ep}$  și  $\Delta q_{rp}$  sunt matricea de rigiditate tangentă și vectorul forțelor nodale echivalente pentru un element cu o articulație plastică formată la capătul "i":

$$\begin{aligned} k_{r,ep} &= T_c (T_c^T f_r T_c)^{-1} T_c^T \\ \Delta q_{rp} &= T_c (T_c^T f_r T_c)^{-1} T_c^T f_r \Delta q_r \end{aligned} \quad (4.31)$$

Unde  $f_r = k_r^{-1}$  reprezintă matricea de flexibilitate a elementului de bară care ține cont de efectele neliniarității de material și geometrice locale, după cum au fost descrise în subcapitolele precedente.

Matricea de transformare  $T_c$  introduce corelația necesară între eforturi pentru satisfacerea condiției de plastificare când o articulație plastică este formată, Fig. 4.4.

- Pentru o bară plastificată la capătul "i"  $T_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ e_i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  (4.32)

- Pentru o bară plastificată la capătul "j"  $T_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ e_j & 0 \end{bmatrix}$  (4.33)

- Pentru o bară plastificată la ambele capete  $T_c = \begin{bmatrix} 1 \\ e_i \\ e_j \end{bmatrix}$  (4.34)



Metoda de analiză abordată poate fi aplicată chiar dacă o articulație plastică este formată în lungul elementului. Dacă avem cadrul din Fig. 4.5, încărcat cu forța uniform distribuită și presupunând că în secțiunea “ $\xi$ ” și la capătul “ $j$ ” s-au format articulații plastice, ecuațiile de constrângere impuse sunt:

$$\begin{cases} \Delta M(\xi) = e_\xi \Delta N \\ \Delta M_j = e_j \Delta N \end{cases} \quad (4.35)$$

Unde  $\Delta M(\xi)$  este incrementul de moment încovoietor în pasul de încărcare curent și care poate fi evaluat, în cazul barelor cu secțiune constantă, cu expresia:

$$\Delta M(\xi) = \Delta M_i \left( \frac{\sin v(1-\xi)}{\sin v} \right) + \Delta M_j \left( \frac{\sin v \xi}{\sin v} \right) + \frac{\Delta q EI}{N} \left( \frac{\sin v(1-\xi)}{\sin v} + \frac{\sin v \xi}{\sin v} - 1 \right) \quad (4.36)$$

sau, în cazul barelor cu secțiune variabilă cu expresia:

$$\begin{aligned} \Delta M(\xi) = \Delta M_i [ M_1^*(\xi) + \psi_{11} M_2^*(\xi) + \psi_{21} M_3^*(\xi) ] + \Delta M_j [ \psi_{12} M_2^*(\xi) + \psi_{22} M_3^*(\xi) ] \\ + [ \overline{q \cdot m}(\xi) + \overline{\psi_{13}} M_2^*(\xi) + \overline{\psi_{23}} M_3^*(\xi) ] \end{aligned} \quad (4.37)$$

Iar  $e_\xi = \frac{\Delta M(\xi)}{\Delta N}$ ,  $e_j = \frac{\Delta M_j}{\Delta N}$

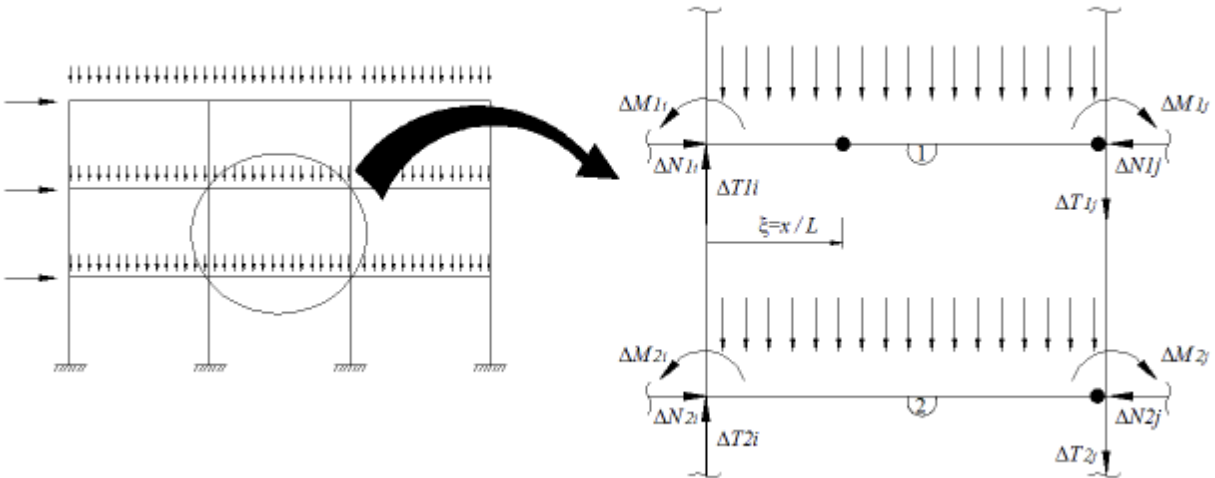


Fig. 4.5 Cadru încărcat cu forță uniform distribuită

Relația incrementală încărcare-deplasare pentru un element de bară incluzând și forțele nodale echivalente poate fi exprimată:

$$\Delta s_r = k_{r,ep} \Delta u_r + \Delta q_{rp} \quad (4.38)$$

Unde  $k_{r,ep}$  și  $\Delta q_{rp}$  sunt matricea de rigiditate tangentă și vectorul forțelor nodale echivalente pentru un element cu o articulație plastică formată la capătul “ $i$ ” și în lungul elementului:

$$\begin{aligned} k_{r,ep} &= T_c (T_c^T f_r T_c)^{-1} T_c^T \\ \Delta q_{rp} &= T_c (T_c^T f_r T_c)^{-1} T_c^T f_r \Delta q_r + \Delta \hat{q} - T_c (T_c^T f_r T_c)^{-1} T_c^T f_r \Delta \hat{q} \end{aligned} \quad (4.39)$$

**Pagină eliminată din conținutul electronic al acestei lucrări.**

$$\Delta \hat{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\overline{q_m}(\xi) + \overline{\psi_{13}} M_2^*(\xi) + \overline{\psi_{23}} M_3^*(\xi)}{\psi_{12} M_2^*(\xi) + \psi_{22} M_3^*(\xi)} \end{bmatrix}$$

- Pentru o bară plastificată la capătul “j” și în lungul elementului:

$$T_c = \begin{bmatrix} 1 \\ e_\xi - e_j \left( \psi_{12} M_2^*(\xi) + \psi_{22} M_3^*(\xi) \right) \\ \left( M_1^*(\xi) + \psi_{11} M_2^*(\xi) + \psi_{21} M_3^*(\xi) \right) \end{bmatrix}$$

$$\Delta \hat{q} = \begin{bmatrix} e_j \\ 0 \\ -\frac{\overline{q_m}(\xi) + \overline{\psi_{13}} M_2^*(\xi) + \overline{\psi_{23}} M_3^*(\xi)}{M_1^*(\xi) + \psi_{11} M_2^*(\xi) + \psi_{21} M_3^*(\xi)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

- Pentru o bară plastificată doar în lungul elementului:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ e_\xi & -\frac{M_1^*(\xi) + \psi_{11} M_2^*(\xi) + \psi_{21} M_3^*(\xi)}{\psi_{12} M_2^*(\xi) + \psi_{22} M_3^*(\xi)} \end{bmatrix}$$

$$\Delta \hat{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\overline{q_m}(\xi) + \overline{\psi_{13}} M_2^*(\xi) + \overline{\psi_{23}} M_3^*(\xi)}{\psi_{12} M_2^*(\xi) + \psi_{22} M_3^*(\xi)} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

unde

$$M_1^*(\xi) = \xi^0 = 1$$

$$M_2^*(\xi) = \xi^1 + \gamma_3 \xi^3 + \gamma_4 \xi^4 + \gamma_5 \xi^5 + \dots + \gamma_{NTF} \xi^{NTF}$$

$$M_3^*(\xi) = \xi^2 + \nu_3 \xi^3 + \nu_4 \xi^4 + \nu_5 \xi^5 + \dots + \nu_{NTF} \xi^{NTF}$$

$$\overline{q_m}(\xi) = \overline{\lambda_3} \xi^3 + \overline{\lambda_4} \xi^4 + \overline{\lambda_5} \xi^5 + \dots + \overline{\lambda_{NTF}} \xi^{NTF}$$

$\gamma_n, \nu_n$  se pot evalua cu relațiile (3.60) iar  $\overline{\lambda_n}$  se evaluează pentru un pas de încărcare astfel:

$$\overline{\lambda_n} = \frac{-\Delta q L^2 \alpha_{(n-2)} - \sum_{i=3}^{n-1} i(i-1) \overline{\lambda_i} \alpha_{(n-i)} - NL^2 \overline{\lambda_{(n-2)}}}{n(n-1) \alpha_0}$$

$$\overline{\lambda_1} = 0, \overline{\lambda_2} = 0, \overline{\lambda_3} = \frac{-\Delta q L^2 \alpha_1}{3 \cdot 2 \alpha_0}$$

Iar

$$\begin{cases} \overline{\psi_{23}} = \frac{-\Delta q L^2 \alpha_0}{2 \alpha_0} \\ \overline{\psi_{13}} = \frac{-\overline{q_m}(1) + \frac{\Delta q L^2}{2} M_3^*(1)}{M_2^*(1)} \end{cases}$$

unde  $\alpha(\xi) = EI(\xi) = \sum_{n=0}^{NTF} \alpha_n \xi^n$ .

#### 4.2.8 Matricea de rigiditate elasto-plastică

Matricea de rigiditate elastică a elementului de bară, cu secțiune constantă sau variabilă, poate fi pusă în evidență prin inversarea relației deplasare-forță (4.21, respectiv 3.67) , în sistemul de coordonate de bază, sub forma simbolică:

$$k_r = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ & k_{22} & k_{23} \\ sim. & & k_{33} \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

Matricea de rigiditate elasto-plastică poate fi evaluată cu relația:

$$k_{r,ep} = T_c(T_c^T f_r T_c)^{-1} T_c^T \quad (4.47)$$

Unde  $T_c$  este matricea de transformare, evaluată conform subcapitolului precedent, iar  $f_r = k_r^{-1}$  reprezintă matricea de flexibilitate a elementului de bară.

În baza procedurii descris, se poate determina matricea de rigiditate elasto-plastică pentru un element de bară cu articulații plastice formate și care sunt detaliate în Anexa B.

#### 4.2.9 Includerea efectelor conexiunilor flexibile în calculul elasto-plastic de ordinul al II-lea

Modelarea conexiunilor semirigide se face prin includerea unui resort de rotație de dimensiune 0 între grindă și stâlp, având rigidități de rotire  $R_i$ ,  $R_j$  care pot varia între zero (capăt articulată) și infinit (capăt perfect încadrat). Efectele forței axiale și al forței tăietoare sunt neglijate în analiză, fiind foarte mici comparativ cu cel cauzat de momentul încovoietor. Modelul de calcul considerat, pentru includerea efectelor conexiunilor semirigide asupra matricei de rigiditate tangentă și vectorului forțelor nodale echivalente, este cel propus de Chiorean (2009).

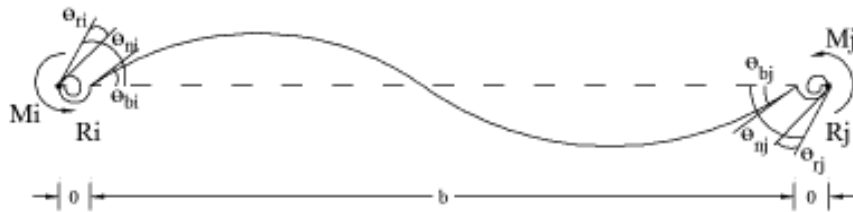


Fig. 4.6 Element de bară cu conexiuni semi-rigide

Se consideră o bară dreaptă, legată în noduri prin legături elastice punctuale care permit numai rotații, având rigiditățile de rotire  $R_i$ ,  $R_j$ , conform Fig. 4.6; relația incrementală forță-deplasare poate fi scrisă:

$$\Delta S_{(2x1)} = k_{sem(2x2)} \Delta u_{n(2x1)} + \Delta q_{sem(2x1)} \quad (4.48)$$

Unde  $k_{sem}$  reprezintă matricea de rigiditate a elementului de bară incluzând atât efectul neliniarității fizice cât și efectul neliniarității geometrice locale (P- $\delta$ ) și al conexiunilor

semirigide, iar  $\Delta q_{sem}$  reprezintă vectorul forțelor nodale echivalente la noduri cu considerarea efectelor amintite mai sus și care pot fi exprimate astfel:

$$k_{sem(2x2)} = \left[ k_{r(2x2)} - k_{r(2x2)}(k_{r(2x2)} + k_{sc(2x2)})^{-1}k_{r(2x2)} \right] \quad (4.49)$$

$$\Delta q_{sem(2x1)} = \Delta q_{eq(2x1)} - k_{r(2x2)}(k_{r(2x2)} + k_{sc(2x2)})^{-1}\Delta q_{eq(2x1)} \quad (4.50)$$

Matricea  $k_r$  reprezintă matricea de rigiditate a elementului ce include efectele neliniarității fizice și geometrice, după cum s-a descris în subcapitolele precedente, iar  $\Delta q_{eq}$  reprezintă vectorul forțelor echivalente la noduri incluzând aceleași efecte, în condițiile prinderii barei în noduri cu conexiuni rigide ( $R_k^i, R_k^j = \infty$ );  $k_{sc}$  reprezintă matricea de rigiditate a conexiunilor semi-rigide care poate fi exprimată  $k_{sc} = diag(R_k^i, R_k^j)$  unde  $R_k^i, R_k^j$  sunt rigiditățile conexiunilor pentru axa principală de inerție pentru nodurile “i” și “j”. Matricea de rigiditate  $k_{sem(2x2)}$  nu include gradul de libertate corespunzător forței axiale, el fiind adăugat, ulterior, pentru a rezulta o matrice de rigiditate de 3x3 pentru un element în plan.

Dacă conexiunile au o comportare liniar-elastică, atunci rigiditățile  $R_k^i$  și  $R_k^j$  ale conexiunilor sunt constante. În cazul în care însă, comportarea este neliniară, atunci aceste rigidități sunt variabile, depinzând de nivelul de solicitare al conexiunii. Pentru a modela comportarea neliniară a conexiunilor se consideră pentru relația moment-rotire o familie de curbe determinată experimental și aproximată în funcție de momentul capabil limită al conexiunii  $M_u$ , de rotirea relativă  $\theta_r$  și rigiditatea inițială  $R_{i0}$  a acesteia (Chiorean C. G., 2009). Astfel, momentul încovoietor adimensional în secțiune, poate fi evaluat cu următoarea relație:

$$m = \frac{M}{M_u} = \frac{\theta}{(1 + \theta^n)^{1/n}} \quad (4.51)$$

sau, dacă exprimăm rotirea:

$$\theta = \frac{m}{(1 - m^n)^{1/n}} \quad (4.52)$$

Unde  $\theta = \frac{\theta_r}{\theta_0}$ ,  $M$  este momentul încovoietor în conexiune,  $M_u$  este momentul ultim al conexiunii,  $n$  este un parametru de formă,  $\theta_r$  este rotirea relativă între grindă și stâlp,  $\theta_0$  este rotirea de referință definită  $M_u/R_{ki}$  și  $R_{ki}$  este rigiditatea inițială a conexiunii. Rigiditatea tangentă  $R_k$  corespunzătoare unei valori arbitrare a rotirii  $\theta_r$  se poate evalua făcând derivata lui  $M$  în raport cu  $\theta_r$ :

$$R_k = \frac{dM}{d\theta_r} = \frac{M_u}{\theta_0(1 + \theta^n)^{1+1/n}} = R_{ki} \frac{1}{(1 + \theta^n)^{1+1/n}} \quad (4.53)$$

Înlocuind  $\theta$  din relația (4.52) în relația (4.53),  $R_{ki}$  devine:

$$R_k = R_{ki}(1 - m^n)^{1+1/n} \quad (4.54)$$

Unde  $R_{ki}$  este rigiditate inițială a conexiunii și care poate fi exprimată în funcție de factorul de “fixare”  $g_i$ :

$$R_{ki} = \frac{4EI_0}{L} \frac{3g_i}{4(1 - g_i)} \quad (4.55)$$

Iar din ecuația (4.55) se poate obține factorul de fixare:

$$g_i = \frac{1}{1 + 3EI_0/R_{ki}L} \quad (4.56)$$

Se poate observa că coeficientul de "fixare"  $g_i$  ia valori între 0 și 1; 0 pentru o conexiune perfect articulată și 1 pentru o conexiune perfect rigidă.

Urmând acest procedeu, se poate determina rigiditatea tangentă într-un nod "i", în funcție de momentul încovoietor  $M_i$  din conexiune.

$$R_{ki}^i = \frac{4EI_0}{L} \frac{3g_i}{4(1-g_i)} \eta(M_i) \quad (4.57)$$

Unde  $\eta(M_i) = \frac{1}{(1+\theta^n)^{1+1/n}} = (1-m^n)^{1+1/n}$  este un factor de reducere al rigidității conexiunii.

#### 4.2.10 Matricea de rigiditate și vectorul forțelor echivalente pe noduri în sistemul de coordonate local

În cazul analizelor incrementale, pentru a nu se induce tensiuni suplimentare datorită rotirilor de corp rigid, relația de echilibru incrementală forță-deplasare va fi exprimată în sistemul de coordonate de bază a elementului astfel:

$$\Delta S_{r(3x1)} = k_{r(3x3)} \cdot \Delta u_{r(3x1)} + \Delta q_{r(3x1)} \quad (4.58)$$

unde  $k_r$  și  $\Delta q_r$  sunt matricea de rigiditate tangentă și vectorul forțelor nodale echivalente, ținând cont de efectul neliniarității de material, geometrice locale și al imperfecțiunilor geometrice inițiale, după cum s-a descris în subcapitolele anterioare.

În continuare, matricea de rigiditate a elementului, în sistemul local, poate fi obținută, în domeniul micilor deplasări, printr-o transformare liniară între coordonatele de bază și cele locale ale elementului.

Considerând elementul de bară din Fig. 4.7, se pot exprima relațiile de echilibru static astfel:

$$\Delta u_{r(3x1)} = T_{(3x6)} \cdot \Delta u_{(6x1)} \quad (4.59)$$

$$\Delta S_{(6x1)} = T_{(6x3)}^T \cdot \Delta S_{r(3x1)} + \Delta q_{(6x1)} \quad (4.60)$$

$$\Delta S_{r(3x1)} = [P \quad m_i \quad m_j]^T \quad (4.61)$$

unde  $\Delta S_{(6x1)} = [N_i \quad T_i \quad M_i \quad N_j \quad T_j \quad M_j]^T \quad (4.62)$

$$\Delta q_{(6x1)} = \left[ 0 \quad \frac{qL}{2} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{qL}{2} \quad 0 \right]^T \quad (4.63)$$

unde matricea liniară de transformare T are următoarea formă:

$$T_{(3x6)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 1 & 0 & -1/L & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & -1/L & 1 \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

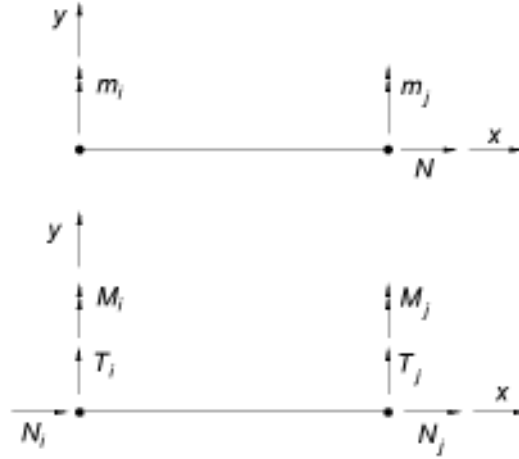


Fig. 4.7 Sistemul de coordonate de bază și cel local al elementului de bară

Folosind ecuațiile 4.59 – 4.64, relația incrementală forță-deplasare devine:

$$\Delta S_{(6x1)} = T_{(6x3)}^T \cdot k_{r(3x3)} \cdot T_{(3x6)} \cdot \Delta u_{(6x1)} + T_{(6x3)}^T \cdot \Delta q_{r,eq(3x1)} + \Delta q_{(6x1)} \quad (4.65)$$

Unde matricea de rigiditate  $k_{l(6x6)}$  și vectorul forțelor nodale echivalente  $\Delta q_{l(6x1)}$  în coordonate locale pot fi exprimate:

$$k_{l(6x6)} = T_{(3x6)}^T \cdot k_{r(3x3)} \cdot T_{(3x6)} \quad (4.66)$$

$$\Delta q_{l(6x1)} = T_{(3x6)}^T \cdot \Delta q_{r(3x1)} + \Delta q_{(6x1)} \quad (4.67)$$

### 4.3 Efectul global al neliniarității geometrice

Modificarea configurației geometrice, ca urmare a acțiunii forțelor exterioare, induce tensiuni suplimentare în elemente ceea ce afectează rigiditatea globală iar mecanismul de cedare poate apărea ca urmare a pierderii stabilității structurii, și nu din epuizarea capacității portante. Prin urmare, pentru determinarea răspunsului real al structurii, considerarea în calcul a deplasărilor și rotirilor de dimensiuni finite este foarte importantă. Actualizarea poziției nodurilor structurii și a elementelor se face, în programul EPASS, prin formularea Lagrangiană actualizată care, pentru calcularea forțelor interioare și a deplasărilor incrementale, consideră ultima configurație geometrică a structurii. Prin urmare, la rezolvarea ecuațiilor de echilibru forțele exterioare, care acționează pe element, se rotesc urmărind rotirile de corp rigid în timp ce valoarea lor rămâne neschimbată (Yang, s.al., 2003).

#### 4.3.1 Reactualizarea configurației geometrice a structurii

Reactualizarea configurației de echilibru, presupune actualizarea poziției nodurilor structurii, recalcularea cosinurilor directori, respectiv a lungimilor barelor. Astfel, matricea de rotație va fi actualizată la fiecare pas de încărcare iar ecuațiile de echilibru vor fi exprimate pe forma deformată a structurii.

$$R^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos^{k+1}(\alpha) & -\sin^{k+1}(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin^{k+1}(\alpha) & \cos^{k+1}(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos^{k+1}(\alpha) & -\sin^{k+1}(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin^{k+1}(\alpha) & \cos^{k+1}(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

unde:

$$\sin^{k+1}(\alpha) = \sin\left(\arcsin\left(\frac{y_j^k - y_i^k}{L^{k+1}}\right) + \alpha\right)$$

$$\cos^{k+1}(\alpha) = \cos\left(\arccos\left(\frac{x_j^k - x_i^k}{L^{k+1}}\right) + \alpha\right)$$

$$L^{k+1} = \sqrt{(x_j^k - x_i^k)^2 + (y_j^k - y_i^k)^2}$$

$L^{k+1}$  este lungimea barei actualizată considerate în analiză în pasul  $k+1$ , iar  $x_j^k, x_i^k, y_j^k, y_i^k$  sunt coordonatele nodurilor la începutul pasului  $k+1$ .

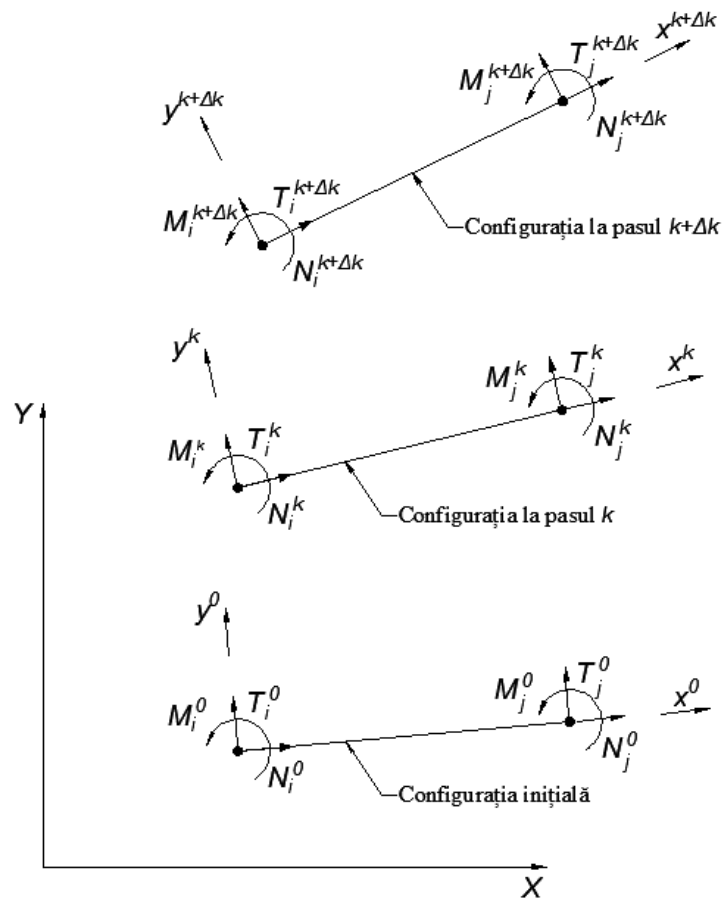


Fig. 4.8 Efectul global al neliniarității geometrice



### 4.3.2 Matricea de rigiditate geometrică

În calculul simplu incremental, forțele neechilibrate nu sunt disipate integral în interiorul fiecărui pas de încărcare. Prin urmare, valoarea cumulată a acestora nu mai poate fi neglijată deoarece va estima greșit capacitatea ultimă de rezistență a structurii. Din acest motiv, în literatura de specialitate, se recomandă includerea matricei de rigiditate geometrică:

- Pentru un element supus la efort axial

$$k_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{P}{L} & 0 & 0 & \frac{P}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{P}{L} & 0 & 0 & \frac{P}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{P}{L} & 0 & 0 & -\frac{P}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{P}{L} & 0 & 0 & \frac{P}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

- Pentru un element supus la încovoiere uniaxială cu efort axial

$$k_D = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{M_i + M_j}{L^2} & 0 & 0 & \frac{M_i + M_j}{L^2} & 0 \\ \frac{M_i + M_j}{L^2} & \frac{P}{L} & 0 & \frac{M_i + M_j}{L^2} & \frac{P}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{P}{L} & 0 & 0 & \frac{P}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M_i + M_j}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{M_i + M_j}{L^2} & 0 \\ \frac{M_i + M_j}{L^2} & \frac{P}{L} & 0 & -\frac{M_i + M_j}{L^2} & \frac{P}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{P}{L} & 0 & \frac{M_i + M_j}{L^2} & -\frac{P}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

### 4.4 Algoritm de analiză neliniară. Aplicația EPASS

Conform formulării matematice prezentate în subcapitolele precedente, s-a realizat un program de calcul, EPASS (Elasto-Plastic Analysis of Steel Structures), pentru determinarea răspunsului neliniar al cadrelor plane din oțel alcătuite din bare cu secțiune constantă sau variabilă, cu considerarea concomitentă a neliniarității de material, a efectelor neliniarității geometrice locale și globale, a imperfecțiunilor inițiale geometrice și mecanice, a deformațiilor de lunecare transversală, precum și comportarea neliniară a conexiunilor flexibile dintre bare și utilizarea unui singur element pe bară. Modelarea comportării elasto-plastice are la bază conceptul de articulație plastică cu respectarea criteriului de plastificare după formarea unei articulații plastice. Secțiunile se consideră a avea o comportare perfect plastică, după formarea unei articulații plastice; nu se ia în considerare descărcarea și nici reconsolidarea materialului. Încărcări uniforme distribuite pe bară pot fi incluse direct în analiză fără a fi necesară divizarea barei în mai multe elemente, zonele potențial plastice fiind considerate la capetele elementului precum și în lungul lui. De asemenea, pentru a surprinde cât mai corect comportamentul real al

structurii, degradarea graduală a rigidității elementelor, ca urmare a dezvoltării zonelor plastice, poate fi inclusă în modelul de analiză prin considerarea modulului de elasticitate tangent, conform formulării propuse de Zubydan (2010). În baza acestui procedeu efectul plastificării distribuite în lungul elementului se consideră printr-o valoare medie a modulului de elasticitate tangent calculat în trei secțiuni caracteristici în lungul elementului.

Programul a fost dezvoltat de autor în mediul de programare Matlab 7.11, pentru sistemul de operare Windows 7 Professional. Calculul este simplu incremental, rezolvarea fiind condusă în metoda pașilor controlați de încărcări cu creșterea incrementală a forțelor exterioare, surprinderea efectelor “snap-back” și “snap-through” și nici a flambajului lateral nefiind posibilă.

#### 4.4.1 Etapele metodei

Algoritmul de bază de conducere a analizei neliniare este prezentat în Fig. 4.9, rezolvarea ecuațiilor de echilibru static făcându-se cu metoda simplu incrementală cu control în forțele exterioare. În continuare sunt descriși pașii parcurși de program pentru evaluarea răspunsului structurii:

##### 1. Date de intrare:

- Pozițiile geometrice ale nodurilor structurii, ale elementelor și orientarea lor
- Caracteristicile secționale și de material ale barelor
- Legăturile interioare și exterioare
- Încărcările concentrate în noduri și cele care acționează în cuprinsul barei (dacă există)

##### 2. Setarea parametrilor analizei:

- Stabilirea dimensiunii pasului de încărcare
- Alegerea curbei de interacțiune plastică, AISC-LRFD, Orbison sau Zubydan
- Includerea sau nu a efectelor imperfecțiunilor mecanice și/sau geometrice inițiale, a deformațiilor de lunecare din forța tăietoare
- Modelarea comportării elasto-plastice în baza conceptului de articulație plastică sau în ipoteza dezvoltării zonelor plastice
- Considerarea sau nu a conexiunilor semirigide, precum și alegerea modelului de comportare (liniar sau neliniar); introducerea rigidității inițiale, a momentului încovoietor ultim și a factorului de formă pentru fiecare conexiune
- Dacă structura conține și elemente cu secțiune variabilă: stabilirea metodei de determinare a matricei de rigiditate (procedeul practic conform Subcap. 3.3 sau abordarea în serii de puteri, conform Subcap. 3.4); alegerea metodei de integrare (Simpson 3/8, Gauss Legendre, Gauss Lobatto), alegerea numărului de puncte de integrare în lungul elementului NP, precum și numărul termenilor NTF pentru evaluarea expresiei momentului încovoietor  $M(x)$

##### 3. Pașii parcurși în interiorul unui pas de încărcare:

- Actualizarea matricei de rigiditate a elementului  $k_{rp}$ , în coordonate de bază
- Actualizarea caracteristicilor conexiunilor flexibile, dacă este cazul. Calcularea matricei de rigiditate  $k_{sem}$

- Actualizarea matricelor de transformare T și de rotație R
- Asamblarea matricei de rigiditate tangentă globală  $K_T$
- Evaluarea forțelor nodale echivalente, din forțe exterioare pe bară,  $f_q, f_Q$ ; din imperfecțiuni geometrice inițiale,  $f_{y0}$ ; din plastificarea unei secțiuni la capetele barei  $\Delta q_{rp}$  sau/și în lungul elementului  $\Delta \hat{q}$ ; din conexiuni flexibile  $\Delta q_{sem}$
- Rezolvarea sistemului de ecuații de echilibru pentru pasul incremental k+1:  $K_T^k \cdot \Delta U^{k+1} = \Delta F^k$ . Evaluarea vectorului deplasărilor și rotirilor nodale și al reacțiunilor în bază incrementale și totale
- Determinarea eforturilor incrementale  $\Delta s^{k+1}$  și a eforturilor totale maxime (la capetele barei și în lungul ei), ținând cont dacă elementul conține secțiuni plastificate  $s^{k+1} = s^k + \Delta s^{k+1}$
- Corectarea eforturilor secționale și reactualizarea modulului de elasticitate tangent, dacă se consideră simularea dezvoltării zonelor plastice
- Verificarea condiției de interacțiune plastică. Dacă s-a depășit limita elastică, se evaluează matricea de transformare care conține coeficienții  $e = \text{ctga} = \frac{\Delta M}{\Delta N}$ , constanți pentru curba de plastificare liniară și variabili pentru curba neliniară
- Se verifică dacă matricea de rigiditate este singulară (mecanism local) sau dacă structura cedează din condiții de stabilitate (deplasări mari)
- Dacă nu avem mecanisme se verifică dacă s-a depășit numărul maxim de incremente specificat
- Reactualizarea poziției nodurilor structurii, a funcțiilor de stabilitate și de formă pentru coeficientul de compresiune în pasul curent de încărcare.

Pentru includerea efectelor imperfecțiunilor geometrice inițiale s-a implementat o etapă corector care verifică echilibrul între forțele interioare și cele aplicate pe structură, care va fi prezentată sub forma unei scheme logice în Fig. 4.10, fiind prezentată mai detaliat în (Chiorean & Marchiș, 2016).

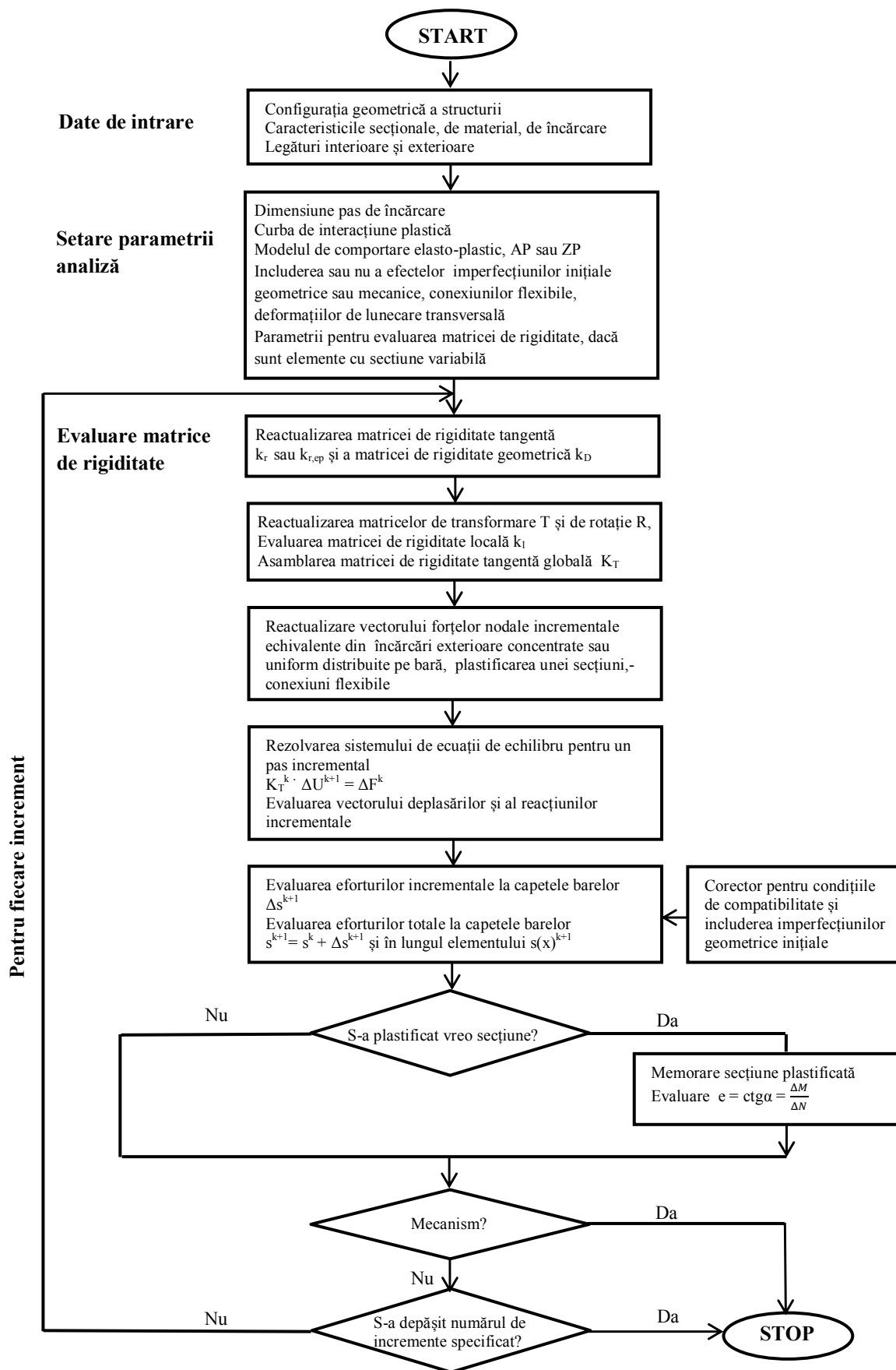


Fig. 4.9 Schema logică a metodei incrementale pentru analiza statică neliniară a cadrelor plane

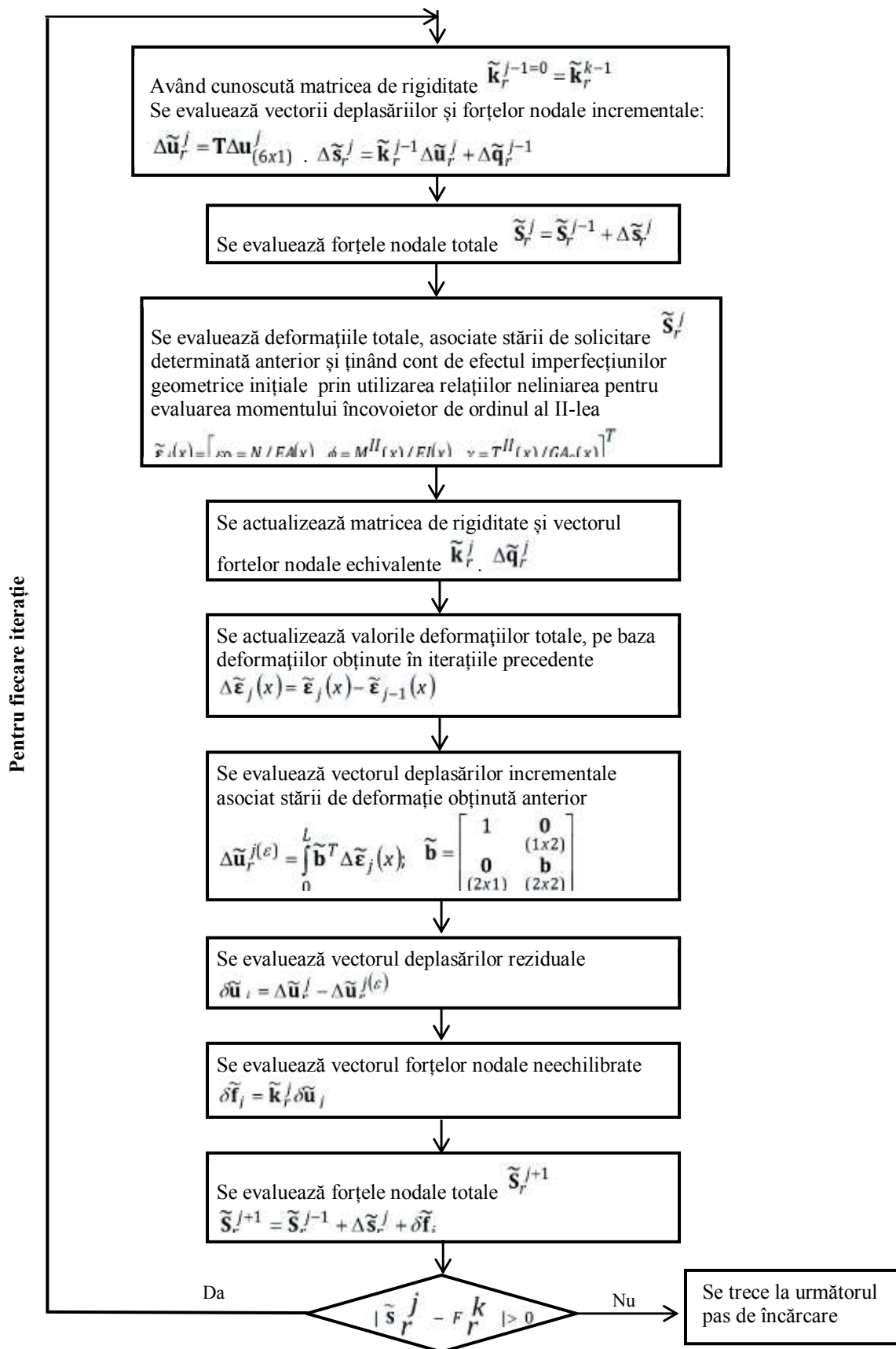


Fig. 4.10 Schema logică a procesului iterativ din etapa corector, pentru un pas de încărcare

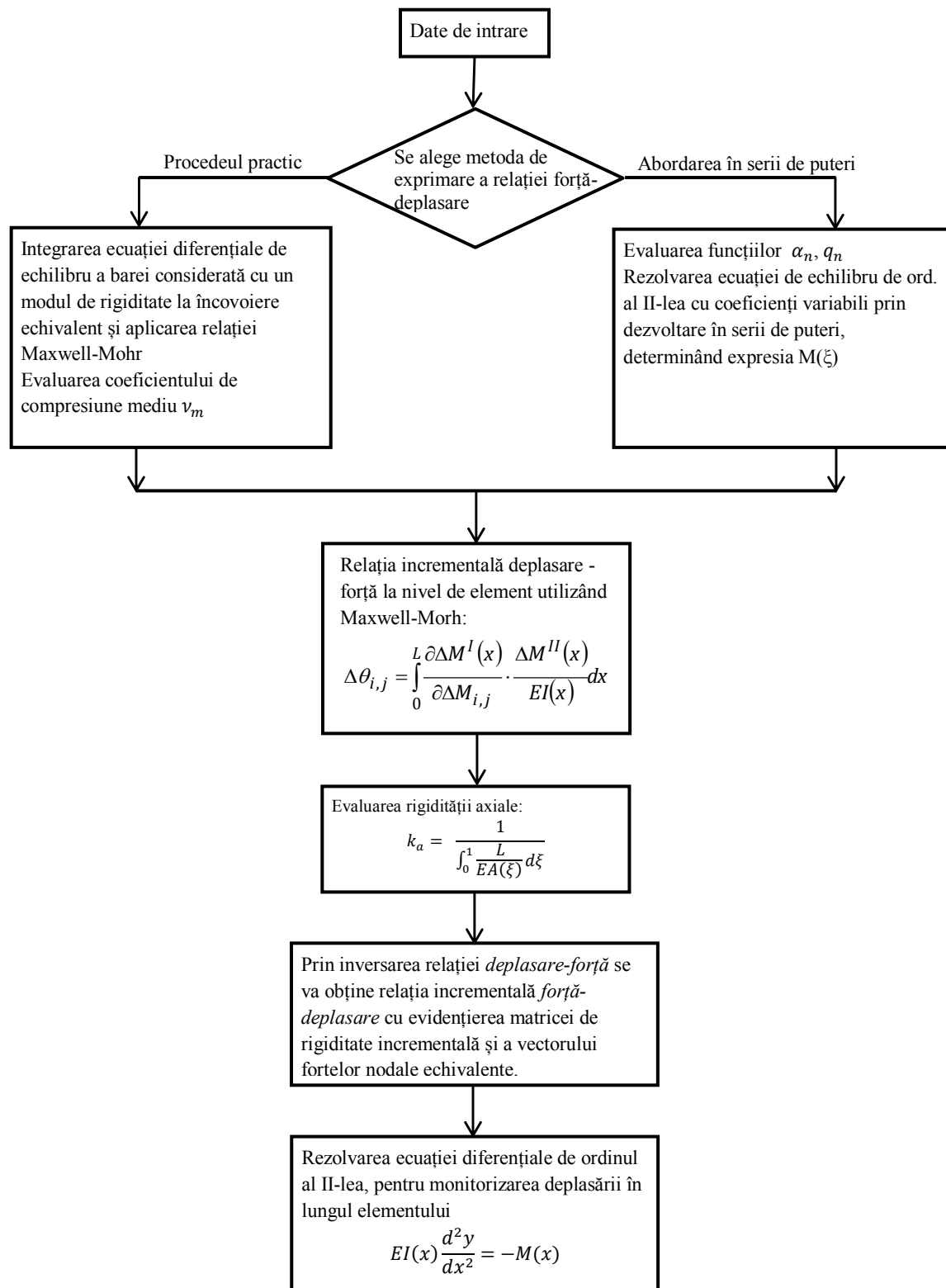


Fig. 4.11 Schema logică a metodelor propuse pentru determinarea matricei de rigiditate a unui element de bară cu secțiune variabilă

În Fig. 4.11 este descris procedeul de calcul pentru determinarea matricei de rigiditate a unui element cu secțiune variabilă, în interiorul unui pas de încărcare, și care presupune următorii pași:

1. Se alege metoda dorită de utilizator pentru evaluarea matricei de rigiditate:
  - Procedeul practic care, pentru exprimarea momentului încovoietor în lungul barei, presupune integrarea ecuației diferențiale de echilibru a barei considerată cu un modul de rigiditate la încovoiere echivalent și aplicarea relației Maxwell-Mohr.
  - Abordarea în serii de puteri propusă de autor, care presupune rezolvarea ecuațiilor diferențiale de echilibru cu coeficienți variabili prin dezvoltarea în serii de puteri având ca principală necunoscută momentul încovoietor. Efectele forței axiale, al deformațiilor de lunecare transversală, precum și al imperfecțiunilor geometrice inițiale pot fi incluse în modelul de analiză.
2. Evaluarea rotirilor incrementale la capetele elementului, utilizând metoda Maxwell-Mohr:

$$\Delta\theta_i = \int_0^L \frac{\partial \Delta M^I(x)}{\partial \Delta M_i} \cdot \frac{\Delta M^{II}(x)}{EI(x)} dx$$

$$\Delta\theta_j = \int_0^L \frac{\partial \Delta M^I(x)}{\partial \Delta M_j} \cdot \frac{\Delta M^{II}(x)}{EI(x)} dx$$
(4.71)

unde cu indice superior (I) și (II) s-a marcat momentul încovoietor obținut din calculul de ordinul I, respectiv din calculul de ordinul II (efectul forței axiale asupra momentelor încovoietoare). Separat, se evaluează rigiditatea axială cu următoarea relație:

$$k_a = \frac{1}{\int_0^1 \frac{L}{EA(\xi)} d\xi}$$
(4.72)

3. Prin inversarea relației deplasare-forță se obține relația forță-deplasare și se pune în evidență matricea de rigiditate vectorul forțelor nodale echivalente

Având cunoscută expresia momentului încovoietor, se rezolvă ecuația diferențială de echilibru de ordinul al II-lea, pentru determinarea relației deplasării barei în secțiunea curentă.

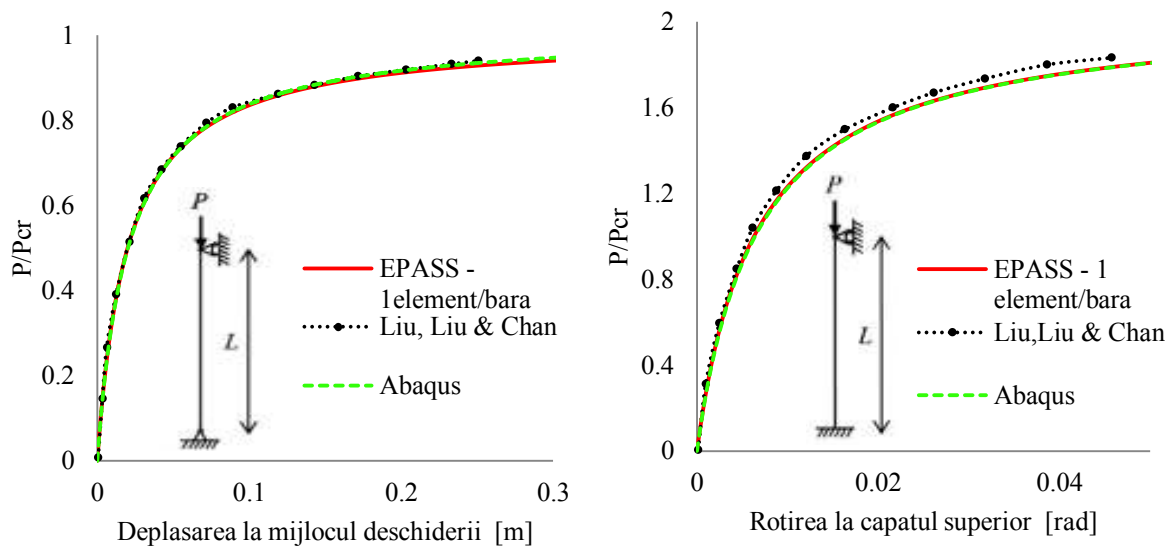
#### 4.5 Studii numerice la nivel de bară pentru verificarea și calibrarea modelului numeric implementat în EPASS

Pentru a demonstra eficiența și acuratețea formulării analitice elaborate pe parcursul capitolelor precedente, precum și a programului de calcul dezvoltat de autor, în continuare vom prezenta câteva exemple numerice tratate în literatura de specialitate sau propuse în această lucrare. Exemplele de calcul discutate în această secțiune se referă la elemente de bară izolate, prismatice sau nonprismatice. Alegerea acestor tipuri de structuri este justificată de faptul că răspunsul nelinier este dominat de efectele locale ale neliniarității geometrice, a imperfecțiunilor

geometrice inițiale și a neliniarității fizice, precum și a efectului conexiunilor flexibile de prindere a barelor. Validarea și calibrarea modelului de calcul s-a făcut prin compararea rezultatelor atât cu cele din literatura de specialitate, avută la dispoziție, precum și cu cele furnizate de programul de element finit Abaqus (2011) și Mastan2 (2000). Rezultatele comparative obținute confirmă performanța modelului de calcul elaborat și a programului de calcul dezvoltat.

#### 4.5.1 Element de bară comprimat. Efectul imperfecțiunilor geometrice inițiale locale, considerând diferite condiții de rezemare

Acest exemplu are scopul de a demonstra eficiența metodei propuse în surprinderea efectului imperfecțiunilor geometrice inițiale în cazul barele comprimate cu secțiune constantă. Elementul cu lungimea de 10 m are secțiunea transversală SHS300x10.0, modulul de elasticitate  $E = 205 \text{ GPa}$  și tensiunea de curgere  $\sigma_y = 355 \text{ Mpa}$ . Bara se consideră cu imperfecțiuni geometrice inițiale, având o formă sinusoidală cu amplitudine amaximă de  $L/500$  la mijlocul deschiderii. Bara a fost studiată anterior de Liu și colab. (2014), considerând diferite condiții de rezemare. Liu și col. (2014) propun un element liniar Euler–Bernoulli a cărui matrice de rigiditate tangentă este determinată utilizând a doua variație a energiei potențiale. În abordarea propusă, un singur element finit a fost folosit pentru modelarea barei. Pentru calibrarea metodei propuse, s-au efectuat analize statice geometric neliniare și în programul de element finit Abaqus (2011) pentru cele trei condiții de rezemare: simplu rezemat, încastrat-articulat, încastrat-încastrat. În Abaqus modelarea barei s-a făcut utilizând elemente liniare de tip B21 având o dimensiune de 10 mm. Imperfecțiunile geometrice au fost modelate prin modificarea configurației geometrice inițiale a barei. Rezultatele au fost centralizate în Fig. 4.12 și se poate observa o bună concordanță între rezultatele obținute cu aplicația EPASS și Abaqus și cele din referință (2014).





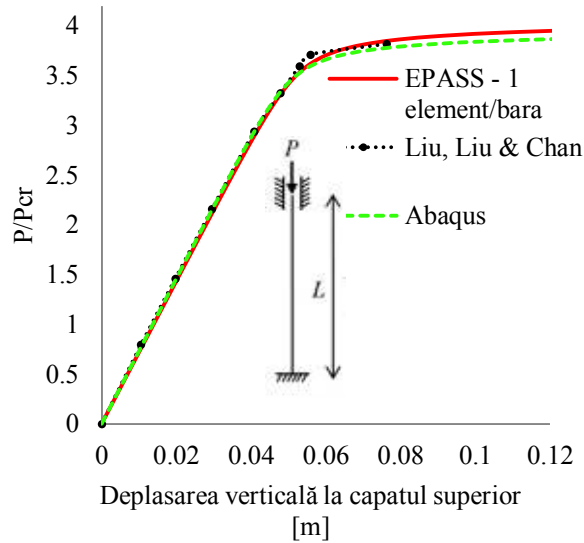


Fig. 4.12 Curbe comparative pentru bara cu imperfecțiuni geometrice inițiale

#### 4.5.2 Bară rezemată cu considerarea imperfecțiunilor geometrice inițiale

Bara simplu rezemată din Fig. 4.13 este studiată pentru evidențierea eficienței metodei propuse în surprinderea efectului imperfecțiunilor geometrice inițiale în domeniul elasto-plastic pentru bare cu secțiune constantă. Elementul are secțiunea transversală CHS355.6x8.0 cu următoarele proprietăți:  $A = 8.74 \cdot 10^{-3} m^2$ ,  $I_y = 1.32 \cdot 10^{-4} m^4$ ,  $W_{el} = 7.42 \cdot 10^{-4} m^3$  și  $W_{pl} = 9.67 \cdot 10^{-4} m^3$ . Tensiunea de curgere se consideră  $\sigma_y = 275$  Mpa iar modulul de elasticitate  $E=205$  GPa. Elementul are o lungime totală de 20m având imperfecțiuni geometrice inițiale în formă sinusoidală cu o amplitudine maximă la mijlocul deschiderii egală cu  $L/500$ . Bara a fost studiată anterior de Liu și al. (2014). Pentru modelarea barelor Liu și al. (2014) propun un element care este capabil să surprindă formarea articulației plastice în lungul barei, matricea de rigiditate tangentă fiind determinată prin a doua variație a energiei potențiale de echilibru. Analizele efectuate cu programul dezvoltat de autor, EPASS, sunt statice neliniare cu control în forțele exterioare, modelarea neliniarității de material fiind în baza conceptului de articulație plastică cu formare instantanee. Imperfecțiunile geometrice inițiale sunt modelate în două moduri: prin divizarea barei în 10 segmente și modificarea poziției inițiale a nodurilor (Fig. 4.13 (b)), respectiv prin metoda descrisă în prezenta lucrare, pentru modelul cu un singur element/bară (Fig. 4.13 (a)). Pentru a calibra modelul de analiză, s-au efectuat studii în programul Mastan2 (2000) și programul de element finit Abaqus (2011). Analiza statică neliniară efectuată în Mastan2 este cu control în deplasări, bara fiind divizată în 10 segmente și modificând poziția inițială a nodurilor în formă sinusoidală, pentru includerea imperfecțiunilor geometrice (Fig. 4.13 (b)), modelarea comportării elasto-plastice fiind la nivel de secțiune prin conceptul de articulație plastică. În programul de element finit Abaqus analizele efectuate sunt în baza dezvoltării zonelor plastice, considerând un singur element pe bară, fiind discretizate în elemente liniare de tip “beam” B23 cu dimensiunea de 100 mm.

În urma analizelor efectuate și care au fost centralizate în Fig. 4.14 se poate constata o bună concordanță între curbele încărcare-deplasare obținute cu programele EPASS, cele furnizate de programele Mastan2 și Abaqus și cele de referință.

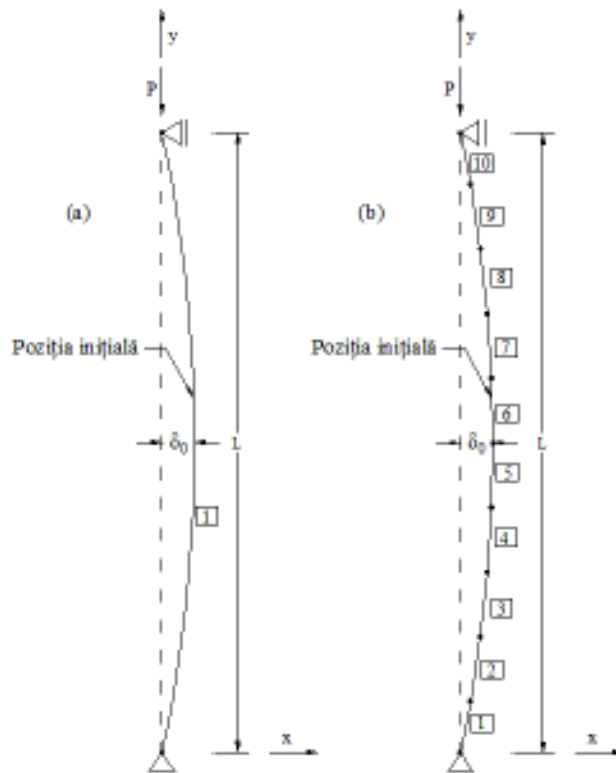


Fig. 4.13 Bară simplu rezemată cu imperfecțiuni geometrice inițiale

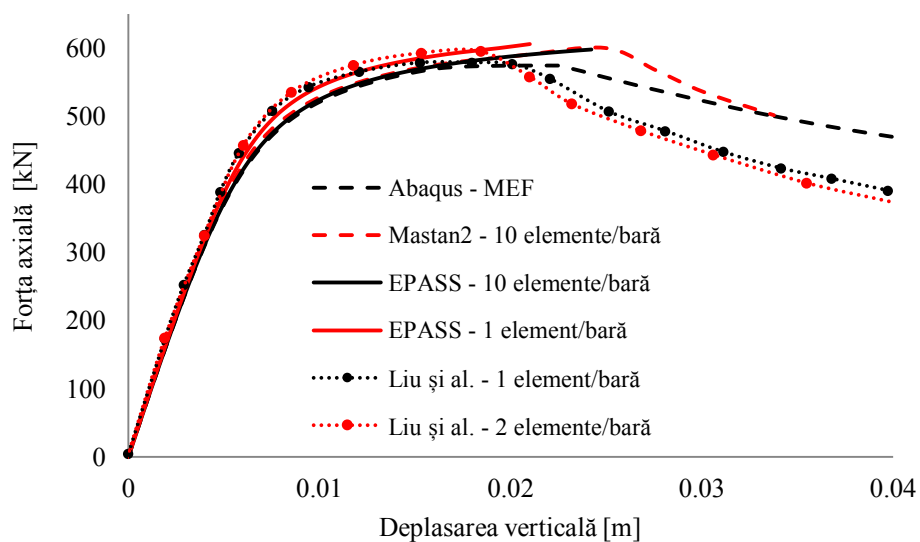


Fig. 4.14 Bară cu imperfecțiuni geometrice - Curba încărcare-deplasare axială

### 4.5.3 Bara cu secțiune variabilă și imperfecțiuni geometrice inițiale. Calcul geometric neliniar

Scopul acestui exemplu este de a studia efectul imperfecțiunilor geometrice inițiale pentru o bară cu secțiune variabilă solicitată la o forță axială de compresiune, într-un calcul geometric neliniar. Caracteristicile geometrice și de rezemare se pot urmări în Fig. 4.15. Se evaluează forța axială critică pentru direcția maximă de inerție, cu includerea sau nu a efectelor imperfecțiunilor geometrice inițiale, care se consideră a avea o formă sinusoidală cu o amplitudine maximă egală cu  $L/500$  la mijlocul deschiderii.

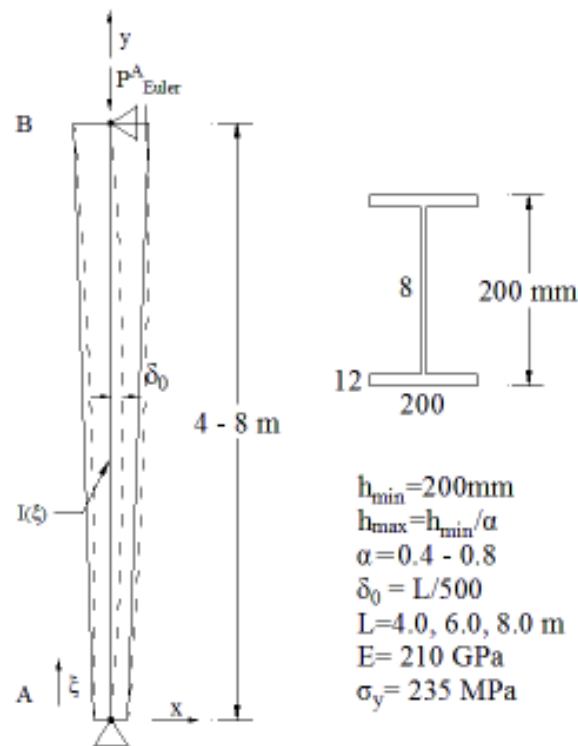


Fig. 4.15 Bară cu secțiune variabilă

În abordarea propusă, s-a utilizat un singur element pe bară cu 10 puncte de integrare Gauss Lobatto, respectiv 10 termeni în dezvoltarea seriei de puteri. Calibrarea modelului s-a făcut cu programul de element finit Abaqus, bara fiind divizată în 20 de elemente liniare cu secțiune constantă iar pentru discretizare s-au folosit elemente finite de tip B21 cu o dimensiune de 100 mm. Imperfecțiunile geometrice inițiale au fost modelate prin modificare configurației inițiale a barei. În Fig. 4.16 se pot vizualiza curbele comparative încărcare – deplasare laterală la mijlocul deschiderii și se constată o bună concordanță între rezultatele obținute cu programul EPASS și Abaqus (2011), dar cu un efort computațional mult mai mic.

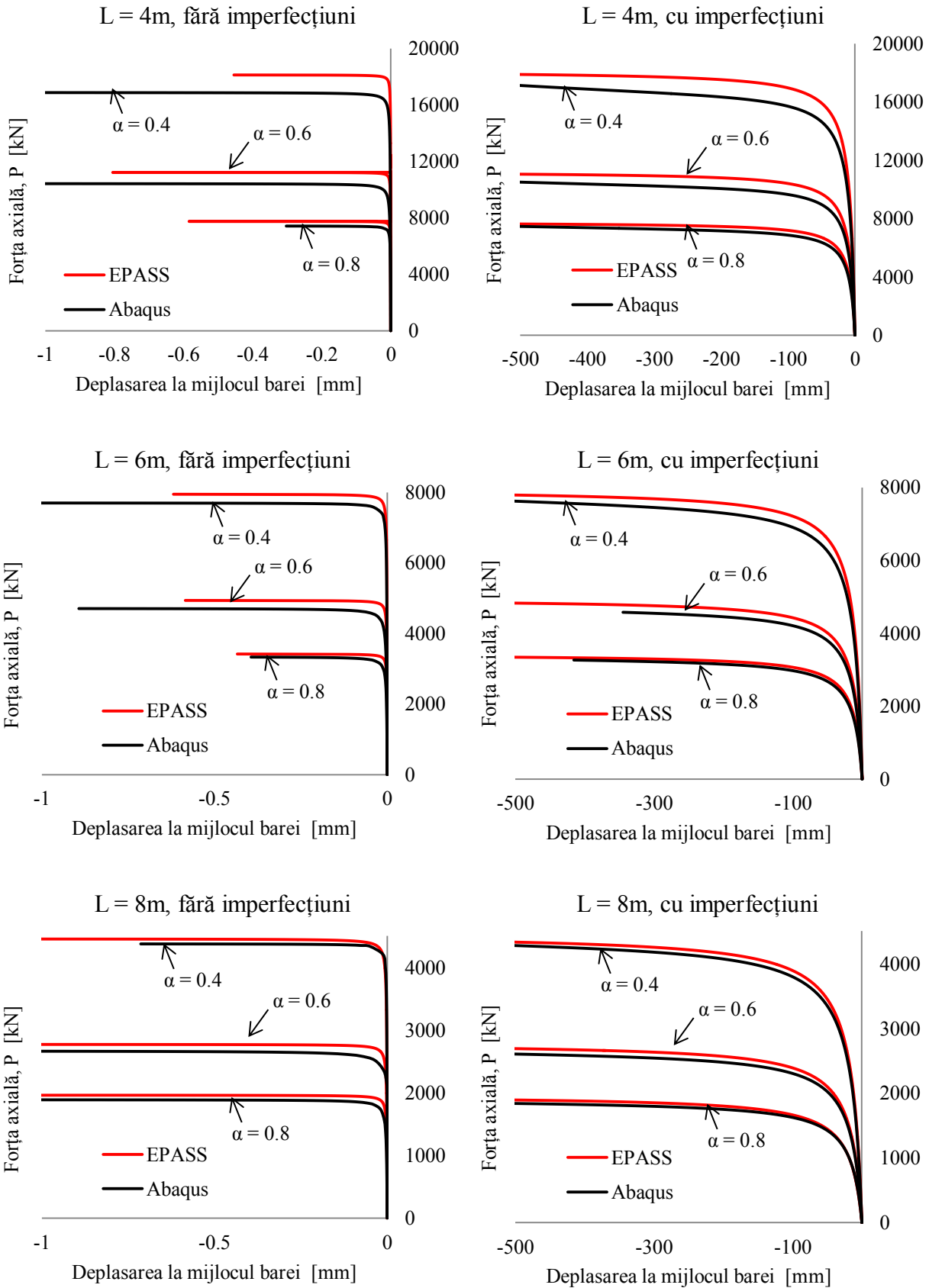


Fig. 4.16 Curbe comparative încărcare-deplasare, (a) cu ignorarea efectului imperfecțiunilor geometrice, (b) cu considerarea efectului

#### 4.5.4 Bara cu secțiune variabilă și imperfecțiuni geometrice inițiale. Calcul elasto-plastic

Pentru a confirma performanța și eficiența metodei propuse în captarea efectelor neliniare de ordinul al II-lea, precum și a efectelor imperfecțiunilor geometrice inițiale asupra capacității ultime de rezistență și deformabilitate a barei încovoiate în starea inițială, diferite seturi de analize neliniare elasto-plactice au fost efectuate pentru bara comprimată cu secțiune variabilă. Caracteristicile geometrice, de material și încărcările aplicate se pot vizualiza în Fig. 4.17. Bara, având înălțimea secțiunii transversale care variază liniar, este supusă încărcărilor combinate ale forței axiale și forțelor uniform distribuite, după cum se poate vedea în Fig. 4.17. Imperfecțiunile geometrice inițiale sunt incluse prin considerarea unei funcții sinusoidale având amplitudinea maximă la mijlocul deschiderii  $v_{0m}=L/500$ , pentru diferite rapoarte ale înălțimilor secțiunilor transversale la capetele elementului ( $\alpha = h_{\min}/h_{\max} = 0.4 \div 0.8$ ). În abordarea propusă s-a utilizat un singur element pe bară cu doisprezece puncte de integrare Gauss-Lobatto, pentru evaluarea coeficienților matricei de rigiditate, și zece termeni în seria de puteri pentru rezolvarea ecuației diferențiale de echilibru.

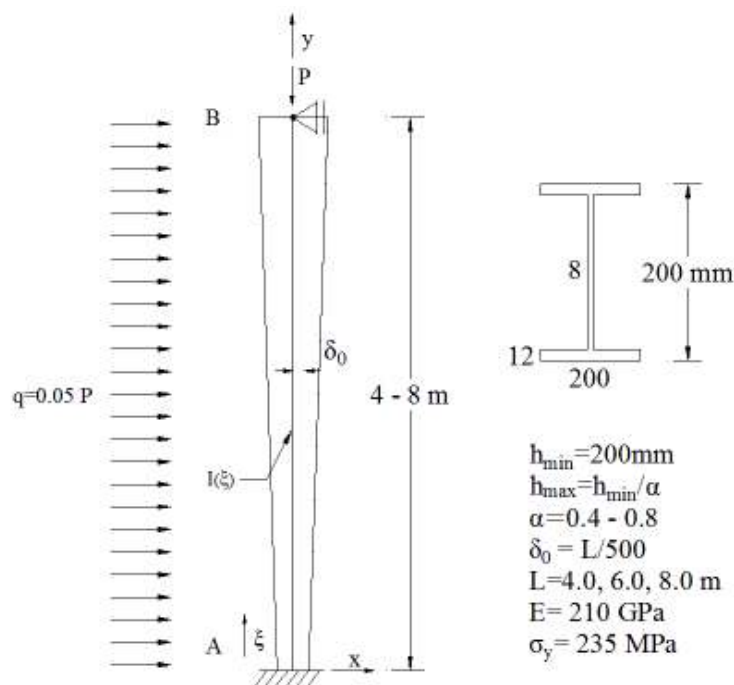


Fig. 4.17 Bară cu secțiune variabilă supusă la încărcare uniform distribuită și forță axială de compresiune

Trebuie menționat faptul că secțiunile transversale monitorizate, pentru detectarea dezvoltării articulației plastice în interiorul elementului, sunt situate corespunzător schemei de integrare utilizate. Prin urmare, poziția punctelor de integrare (PI) domină precizia de detecție a formării articulației plastice în interiorul elementului, de obicei, rezultatele fiind mai precise pe măsură ce numărul punctelor de integrare utilizat este mai mare. Pentru a modela comportamentul elasto-plastic s-a utilizat curba de interacțiune plastică din codul american AISC-LRFD (1994). Curbele de răspuns încărcare-deplasare laterală la mijlocul deschiderii obținute cu metoda propusă au fost comparate cu cele obținute cu un model bazat pe zone plastice cu programul de element finit Abaqus (2011), care va fi folosit ca bază pentru

comparații. Modelarea barei în Abaqus s-a făcut utilizând 20 de elemente B22 cu secțiune transversală uniformă iar imperfecțiunile geometrice inițiale au fost modelate în mod direct prin modificarea configurației geometrice a nodurilor conform cu forma sinusoidală. Fig. 4.18 prezintă curbele comparative încărcare-deplasare laterală la mijlocul deschiderii pentru diferite lungimi ale barei și diferite rapoarte ale înălțimilor secțiunilor transversale de capăt și după cum se poate observa metoda propusă este capabilă să prezică cu exactitate răspunsul neliniar elasto-plastic, curbele generate cu proqramul EPASS fiind foarte apropiate de cele obținute cu M.E.F.

În Fig. 4.19 sunt prezentate variațiile combinației de eforturi (N,M) în secțiunea "A" pentru toate cazurile tratate, cu includerea sau nu a imperfecțiunilor geometrice inițiale și se constată respectarea curbei de interacțiune plastică după plastificarea integrală a secțiunii. De asemenea, în Fig. 4.20 sunt prezentate variațiile combinației de eforturi (N,M), fără includerea imperfecțiunilor geometrice, în secțiunea "A" și în cuprinsul barei în secțiunea monitorizată în care se depășește limita elastică și se poate observa atingerea încărcării ultime (formarea mecanismului) în momentul dezvoltării articulației plastice în cuprinsul barei (când vârful vectorului atinge curba de interacțiune, care este diferită în funcție de caracteristicile geometrice a secțiunii transversale).

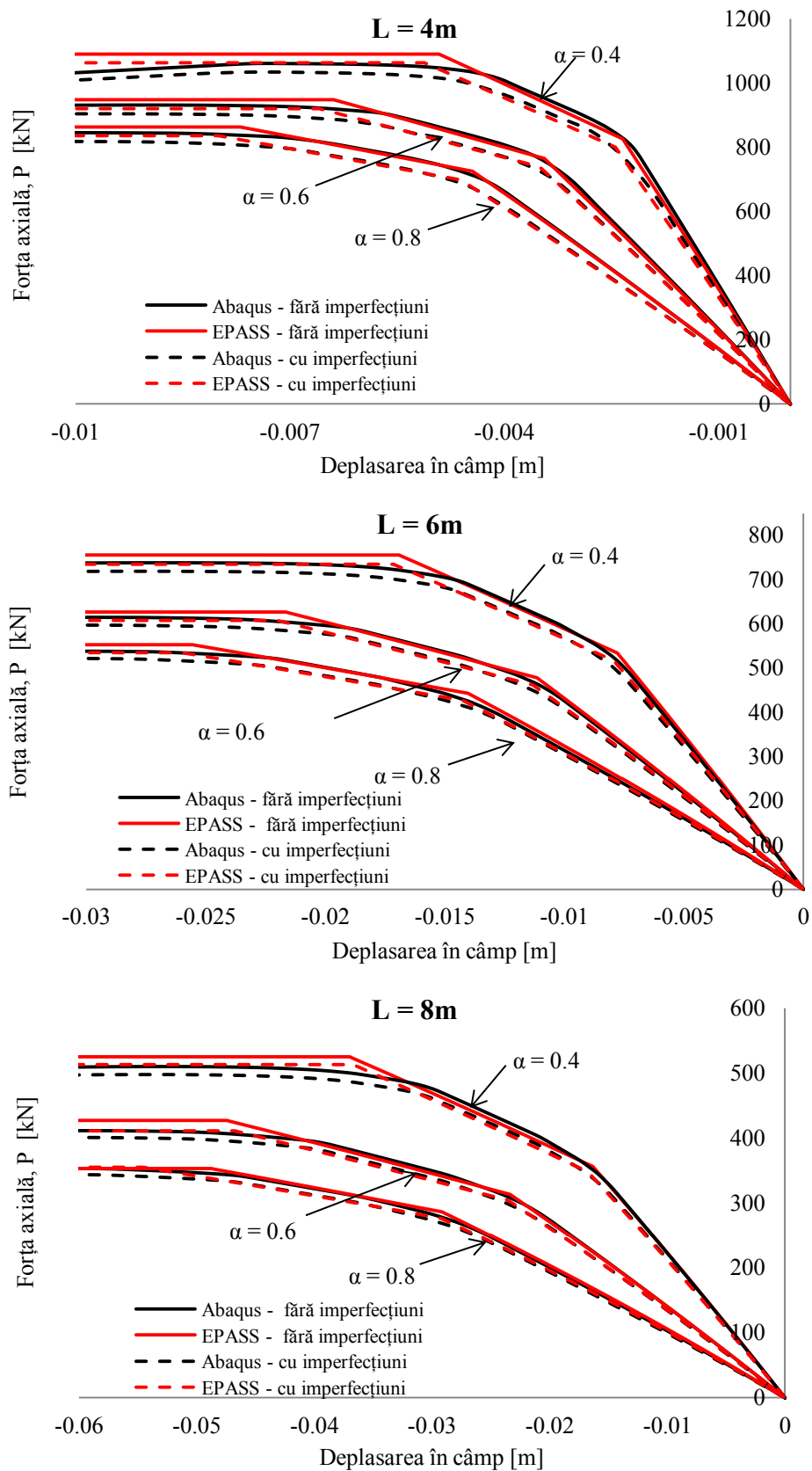


Fig. 4.18 Curbe comparative încărcare – deplasare maximă în câmp

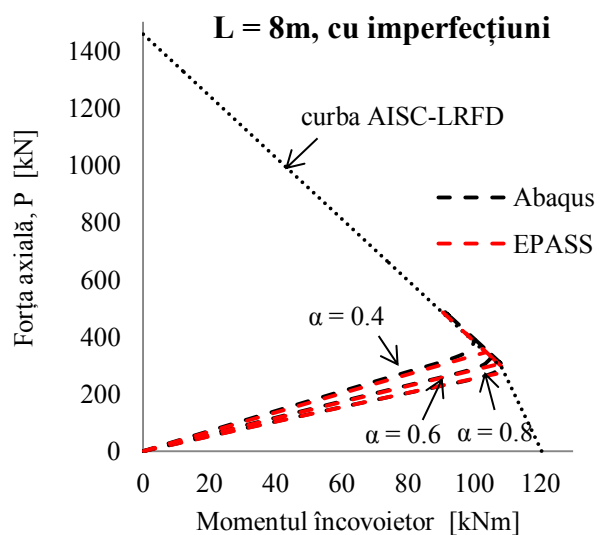
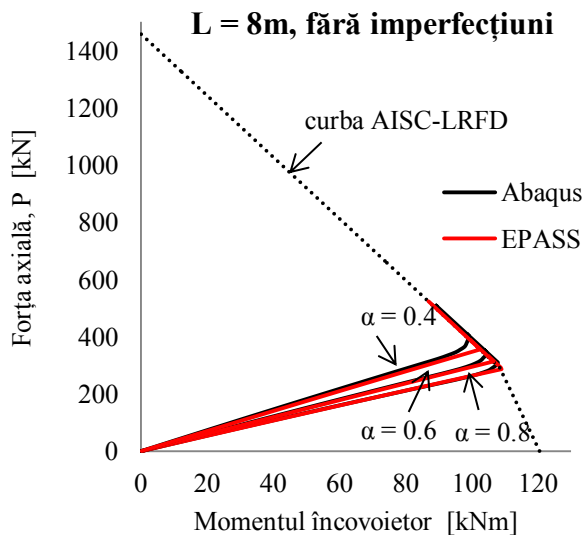
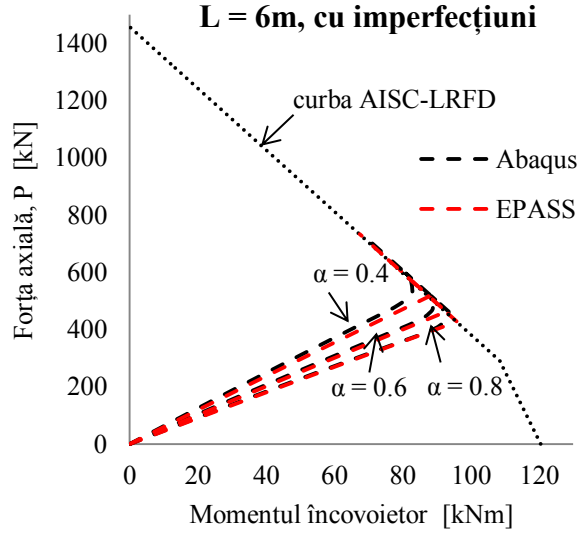
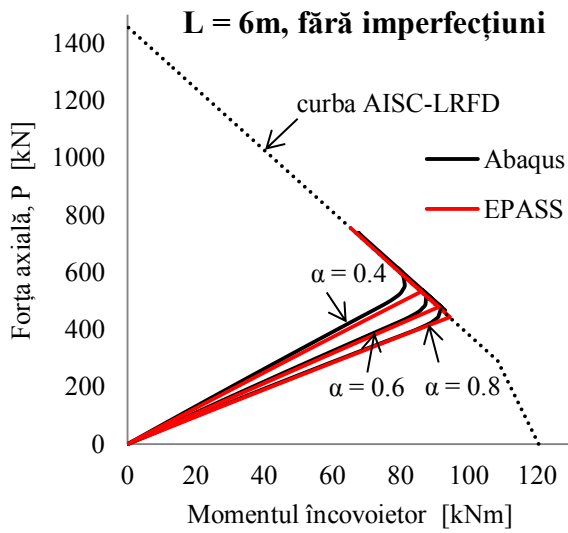
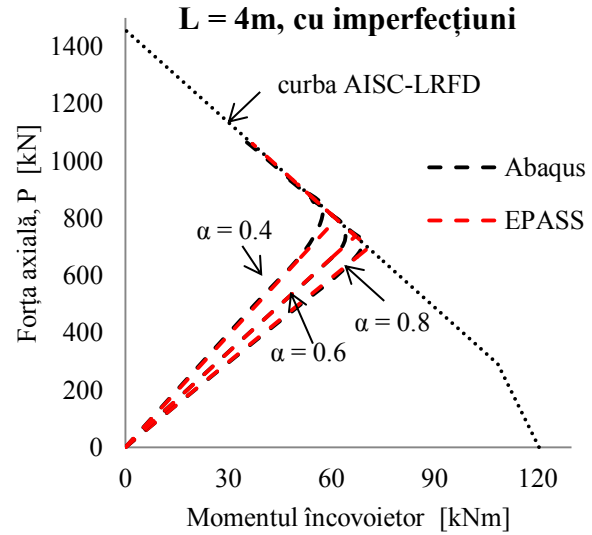
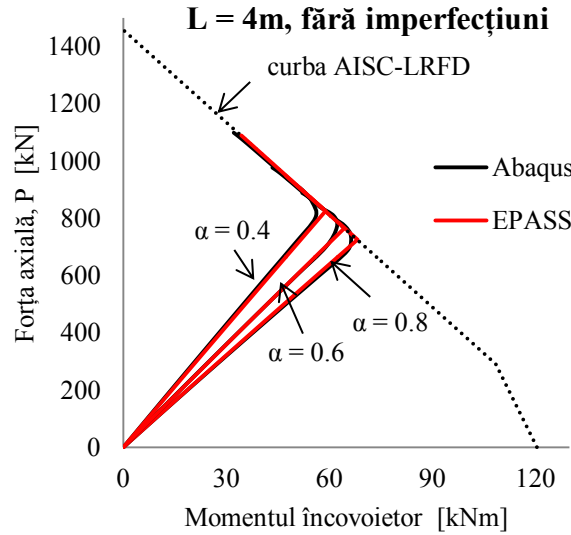


Fig. 4.19 Variația combinației de eforturi în bază, cu și fără considerare imperfecțiunilor geometrice inițiale



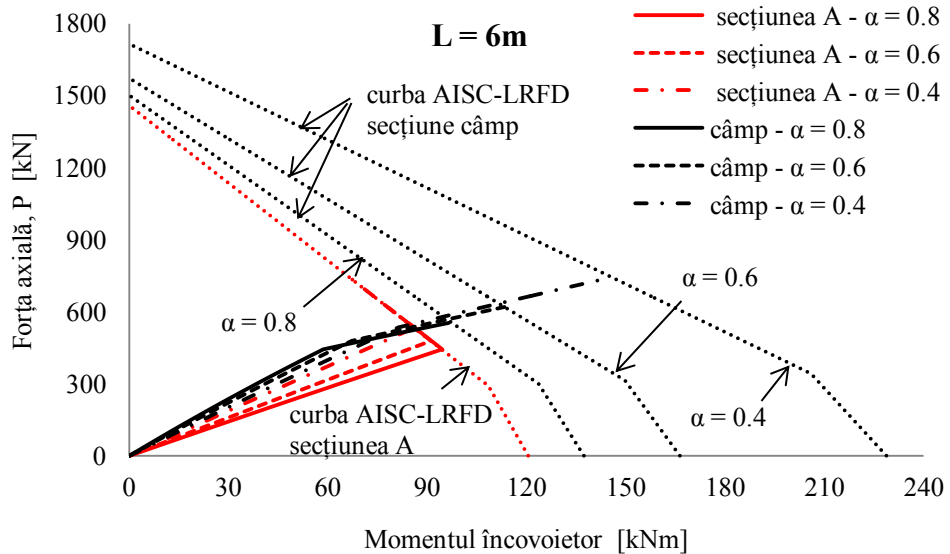
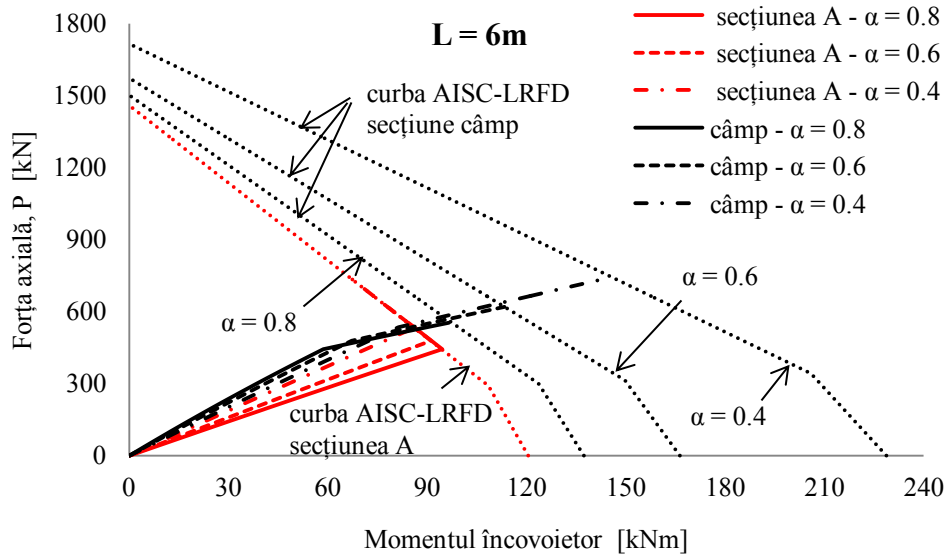
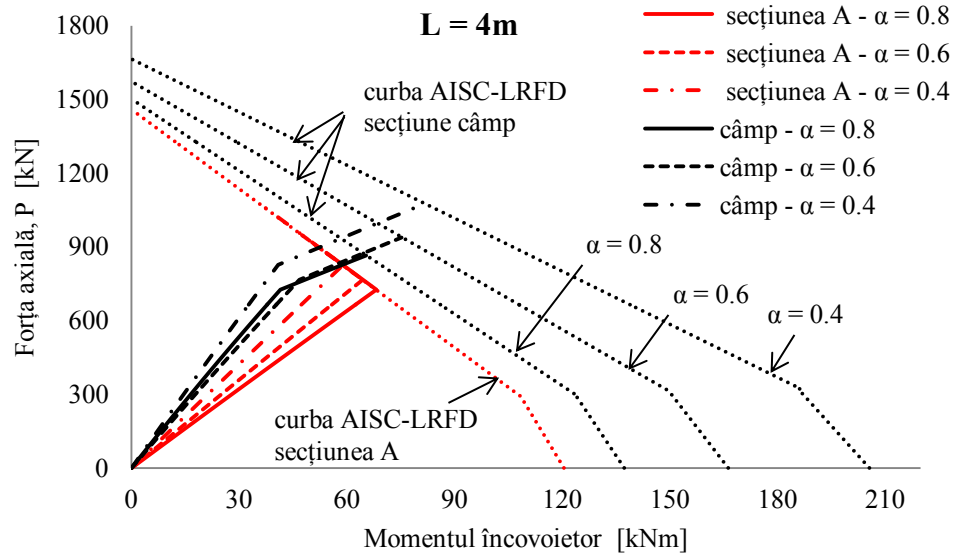


Fig. 4.20 Variația combinației de eforturi în secțiunile plastificate

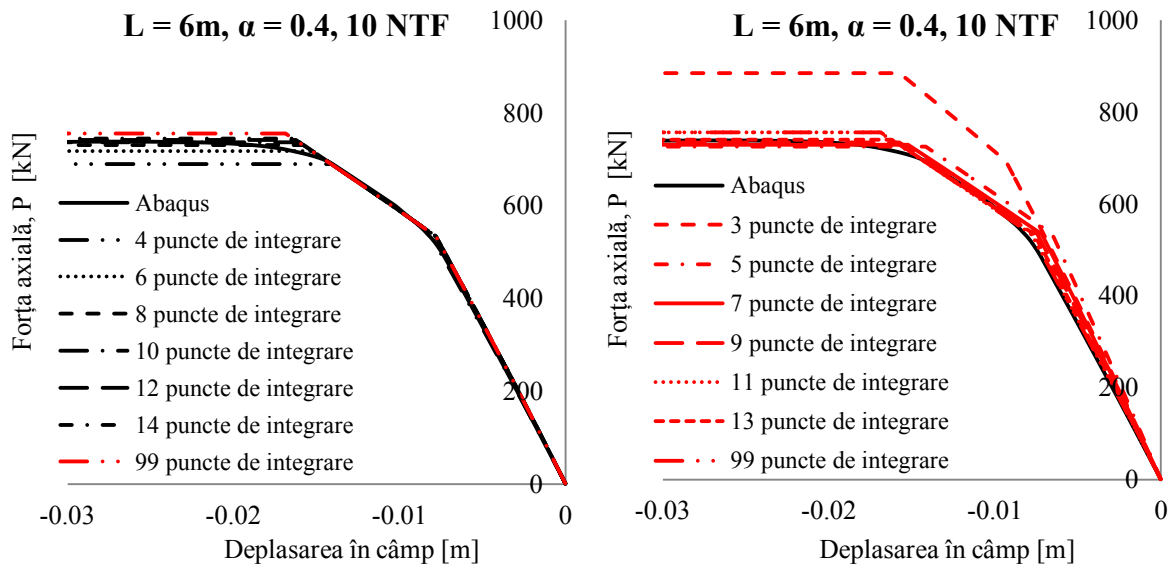


Fig. 4.21 Curbe comparative încărcare-deplasare laterală: influența numărului de puncte de integrare

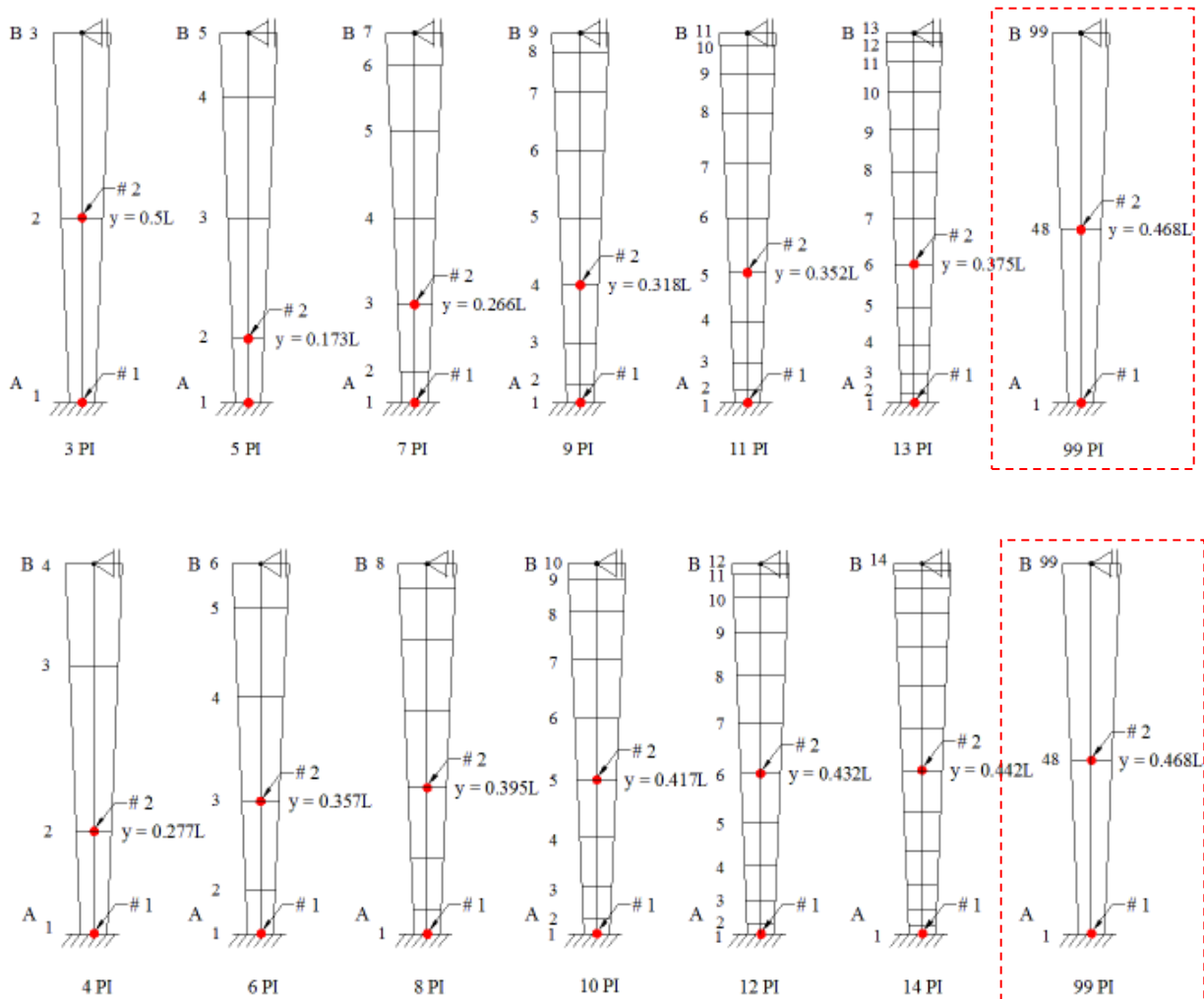


Fig. 4.22 Poziția articulațiilor plastice în cuprinsul barei în funcție de schema de integrare

După cum s-a menționat anterior, numărul și poziția punctelor de integrare influențează acuratețea evaluării numerice a coeficienților matricei de rigiditate a elementului, precum și detectarea corectă a secțiunii plastificate în cuprinsul barei. În acest sens, s-a efectuat un studiu de sensibilitate prin creșterea succesivă a numărului de puncte de integrare Gauss-Lobatto. Fig. 4.21 prezintă curbele comparative încărcare-deplasare laterală pentru cazul  $L=6\text{m}$  și  $\alpha=0.4$  variind numărul punctelor de integrare iar în Fig. 4.22 se pot vizualiza poziția articulației plastice în cuprinsul barei, în funcție de numărul secțiunilor monitorizate. După cum se poate observa, unsprezece puncte de integrare sunt suficiente pentru a obține rezultate cu precizie satisfăcătoare, iar prin creșterea numărului de secțiuni monitorizate se pot obține rezultate mai exacte.

#### 4.5.5 Bară cu secțiune variabilă încărcată excentric.

În următorul exemplu se studiază răspunsul geometric neliniar al barelor cu secțiune variabilă încărcate excentric. Proprietățile geometrice, de material și încărcările aplicate sunt prezentate în Fig. 4.23.

Acest exemplu de calcul a fost propus de Raftoyiannis & Ermopoulos (2005), unde o formulare analitică a fost dedusă pe baza soluției exacte a ecuației diferențiale de echilibru de ordinul al IV-lea pentru flambajul elementelor verticale, asociate unor forme particulare a secțiunii transversale. Momentul de inerție este descris de următoarea ecuație  $I(x) = I_0(x/a)^2$ , unde  $I_0$  corespunde punctului A și  $a$  este distanța OA (Fig. 4.23). Pentru includerea imperfecțiunilor geometrice inițiale se consideră o formă parabolică, conform prevederilor din (EN 1993-1-1), având amplitudinea maximă  $a_0$  la mijlocul deschiderii. Forța axială este aplicată excentric barei AB la distanța  $e$ .

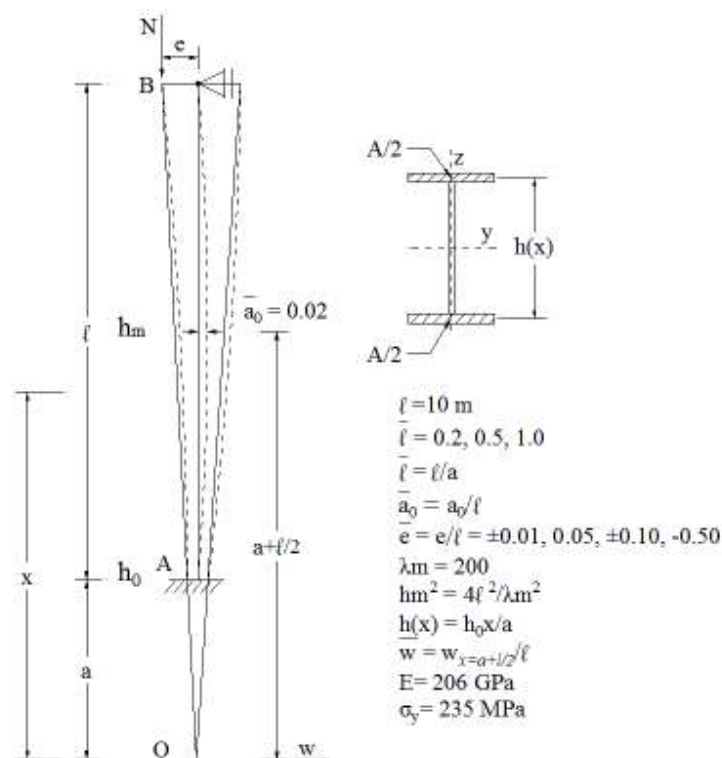


Fig. 4.23 Bară cu secțiune variabilă și imperfecțiuni geometrice inițiale

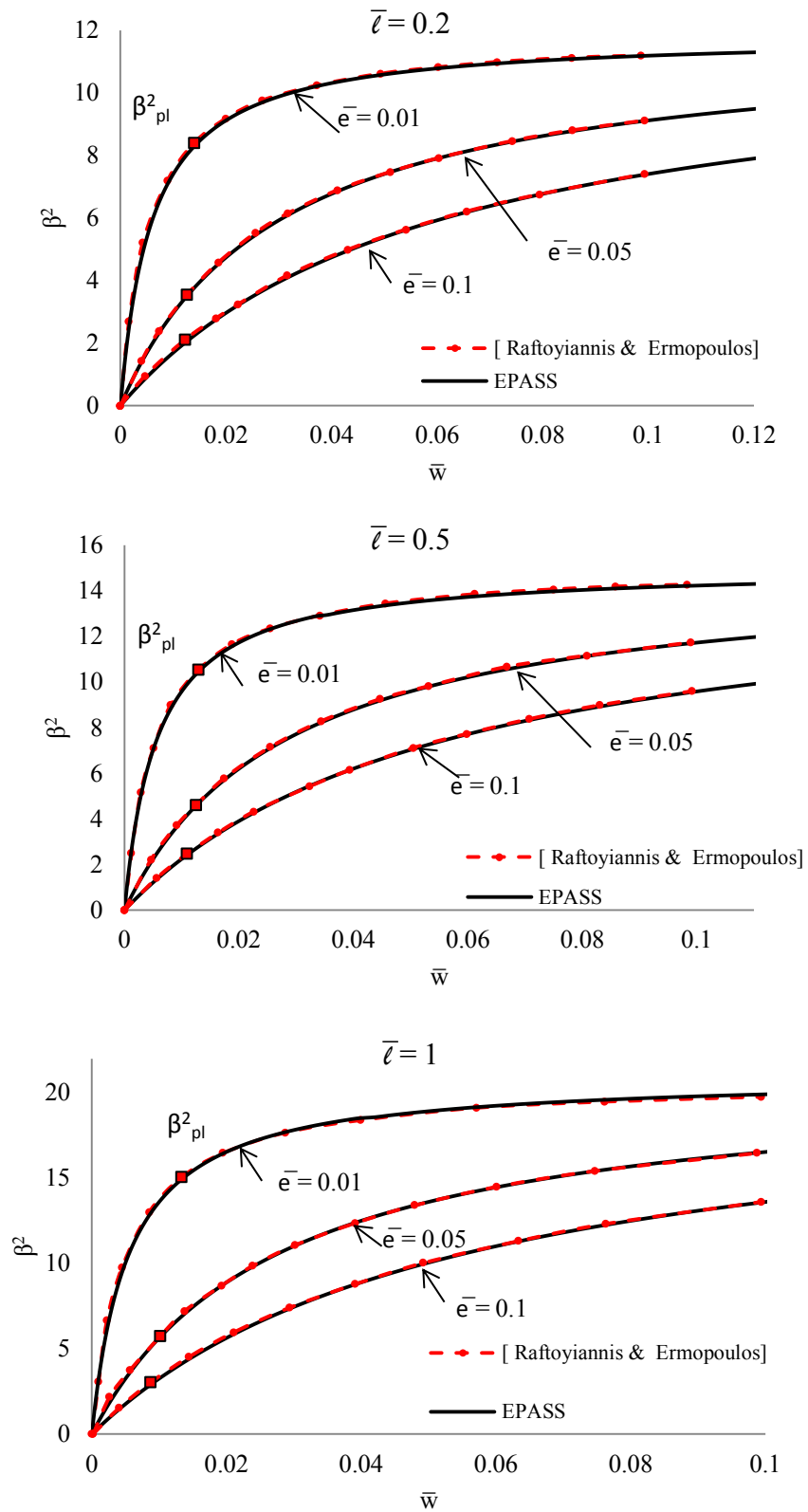


Fig. 4.24 Curbe comparative încărcare-deplasare pentru axa maximă de inerție fără includerea efectului imperfecțiunilor geometrice inițiale

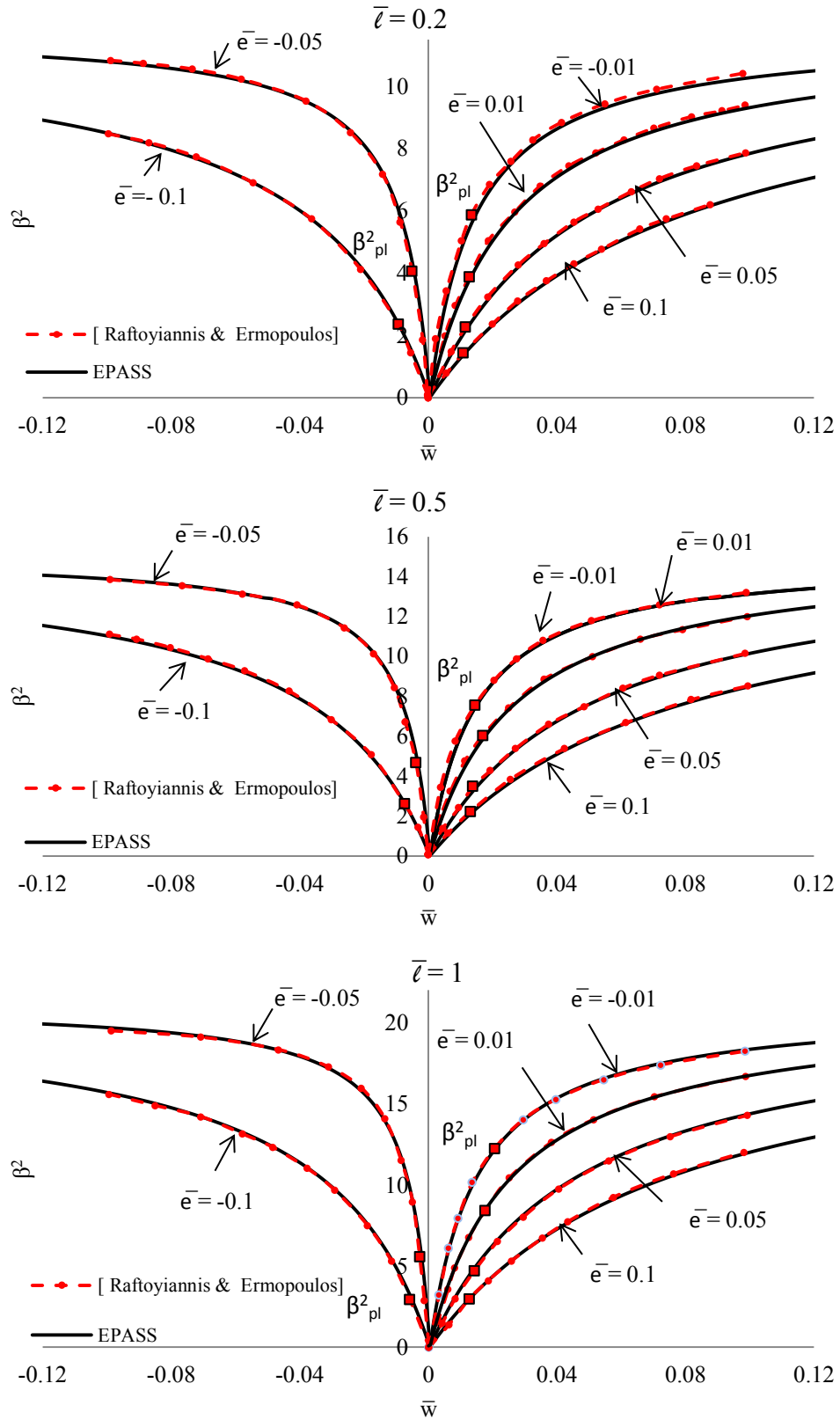


Fig. 4.25 Curbe comparative încărcare-deplasare pentru axa maximă de inerție, cu includereaefectului imperfecțiunilor geometrice inițiale

Fig. 4.24 prezintă curbele normalizate încărcare-deplasare, considerând coeficientul de zveltețe  $\bar{\lambda}_m = 200$  și  $\bar{a}_0 = 0$  (fără imperfecțiuni inițiale), pentru diferite rapoarte ale lungimii  $\bar{l} = l/a$  și excentricității  $\bar{e} = e/l$ , unde deplasarea normalizată este  $\bar{w} = \bar{w}_{x=a+l/2}/l$  iar factorul de încărcare adimensional este  $\beta^2 = \frac{Nl^2}{EI_0}$ . În Fig. 4.25 se pot vizualiza curbele normalizate încărcare-deplasare laterală  $(\bar{w}, \beta^2)$  pentru coeficientul de zveltețe  $\bar{\lambda}_m = 200$  și  $\bar{a}_0 = 0.02$  (cu imperfecțiuni inițiale), pentru diferite rapoarte ale lungimii  $\bar{l}$  și excentricității  $\bar{e}$ . Coeficientul de zveltețe mediu este calculat la mijlocul înălțimii elementului  $x = a + l/2$ , considerând  $I = Ah^2/4$ ,  $\bar{\lambda}_m^2 = 4l^2/h_m^2$  (Fig. 4.23). În abordarea propusă zece termeni au fost luați în considerare în seria de puteri pentru a rezolva ecuația diferențială de ordinul al II-lea având ca necunoscută momentul încovoietor și șapte puncte de integrare au fost considerate pentru a evalua coeficienții matricei de rigiditate. După cum se poate observa în Fig. 4.24 și Fig. 4.25, formularea propusă este capabilă să surprindă cu exactitate răspunsul geometric neliniar al barelor cu secțiune variabilă, cu includerea sau nu a imperfecțiunilor geometrice inițiale, se poate constata o foarte bună concordanță între curbele de răspuns furnizate de programul EPASS și cele de referință (Raftoyiannis & Ermopoulos, 2005).

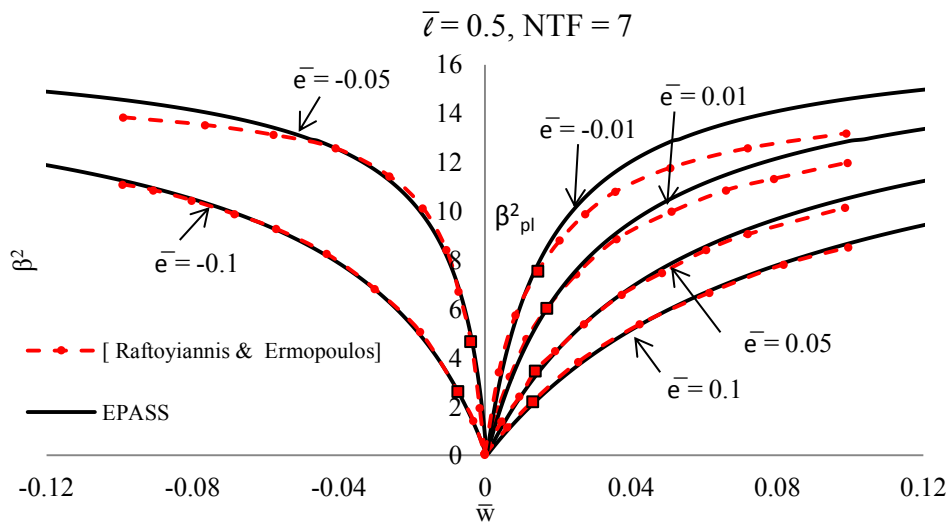


Fig. 4.26 Influența numărului de termeni asupra curbe încărcare-deplasare, cu includerea efectului imperfecțiunilor geometrice inițiale

O ușoară subestimare a deplasărilor poate fi observată, în abordarea propusă, pentru valori mari ale factorilor de încărcare aplicată, când un număr de doar 7 termeni au fost considerați pentru rezolvarea ecuației diferențiale de echilibru, Fig. 4.26. Cu toate acestea, după cum se menționează în (Raftoyiannis & Ermopoulos, 2005), astfel de situații nu vor apărea niciodată în practică datorită caracteristicilor geometrice și de material ale elementelor datorită cedării materialului pentru valori mult mai mici ale forței axiale de compresiune  $N$ . Factorii ultimi de încărcare (marcați cu pătrățele roșii) sunt determinați în (Raftoyiannis & Ermopoulos, 2005), pentru fiecare caz, și corespund plastificării integrale a secțiunii transversale pentru o rezistență  $f_y$  specificată. Se poate observa că pentru forțe axiale mai mici decât încărcarea ultimă

care ar produce cedarea materialului, curbele încărcare-deplasare sunt în strânsă concordanță cu cele obținute în mod analitic, chiar și pentru situația când se consideră doar șapte termeni. Acest exemplu demonstrează că, pentru aplicații practice, puțini termeni sunt necesari în formularea propusă pentru a obține rezultate cu o precizie bună.

În Fig. 4.27 se prezintă comparativ efectele conexiunilor flexibile, în varianta comportării liniare, asupra răspunsului barei cu secțiune variabilă, pentru bara cu lungimea  $\bar{l} = 0.5$  și trei cazuri ale excentricității,  $\bar{e} = 0.01, 0.05$  și  $0.1$ . Pentru calibrarea formulării cu conexiuni flexibile, s-a efectuat un studiu considerând coeficientul de fixare  $g_i = 1$  (corespunzător unei îmbinări perfect rigide) și se poate observa o foarte bună corelație între rezultatele obținute cu programul EPASS și cele menționate în (Raftoyiannis & Ermopoulos, 2005). Studiile au fost, apoi, efectuate considerând conexiunea flexibilă în secțiunea "A" pentru trei cazuri de fixare  $g_i = 0.6, 0.3, 0.1$  (1 fiind o conexiune perfect rigidă iar 0 o conexiune perfect articulată). Bara a fost modelată, în abordarea propusă, considerând un singur element cu șapte puncte de integrare Gauss Lobatto și utilizând un număr de zece termeni în seria de puteri în rezolvarea ecuației diferențiale de echilibru. Rigiditățile inițiale ale nodului au fost evaluate astfel:

$$R_{i/j} = \frac{4EI_{i/j}}{L} \cdot \frac{3g_{i/j}}{4(1 - g_{i/j})}$$

unde  $EI_{i/j}$  este rigiditate la încovoiere în nodul în care s-a introdus conexiunea semi-rigidă iar  $L$  este lungimea barei. Din analizele întreprinse se constată "flexibilitatea barei" pe măsură ce îmbinarea se apropie de o conexiune perfect articulate.

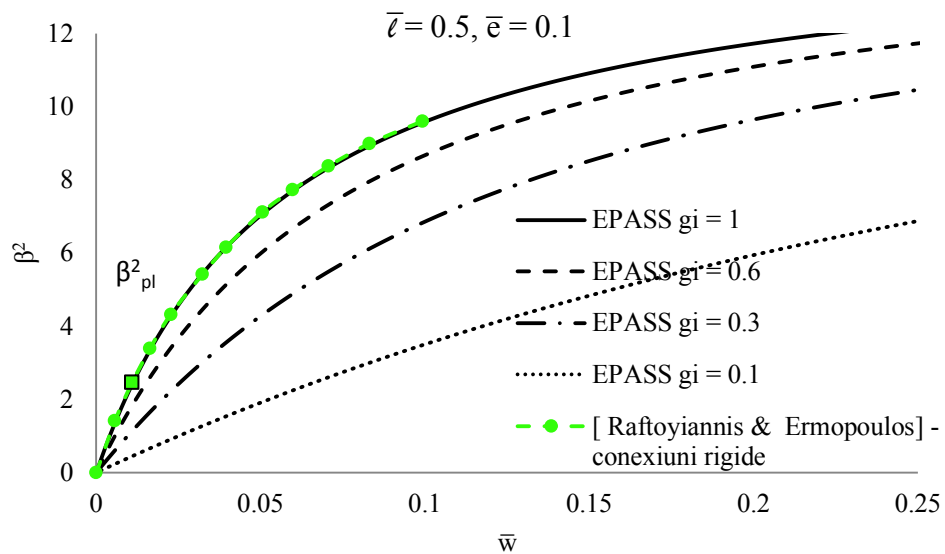
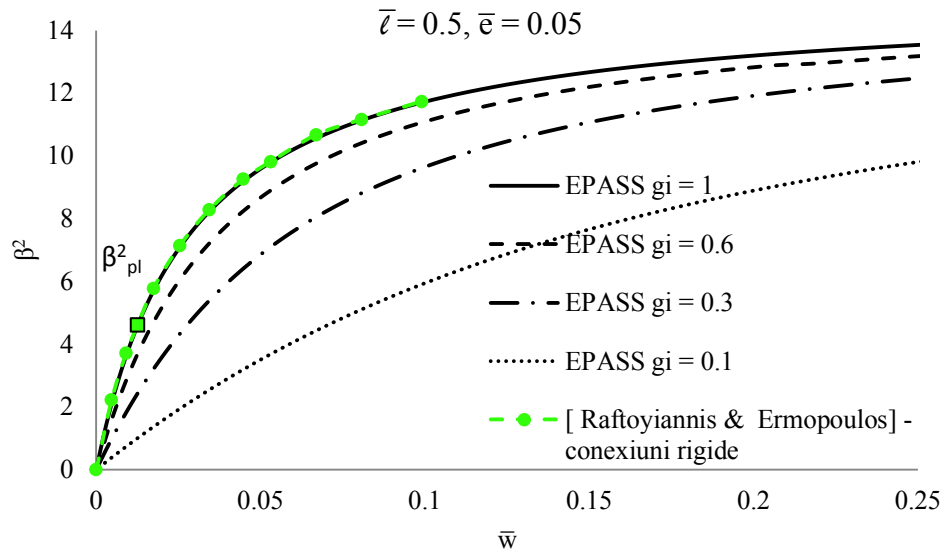
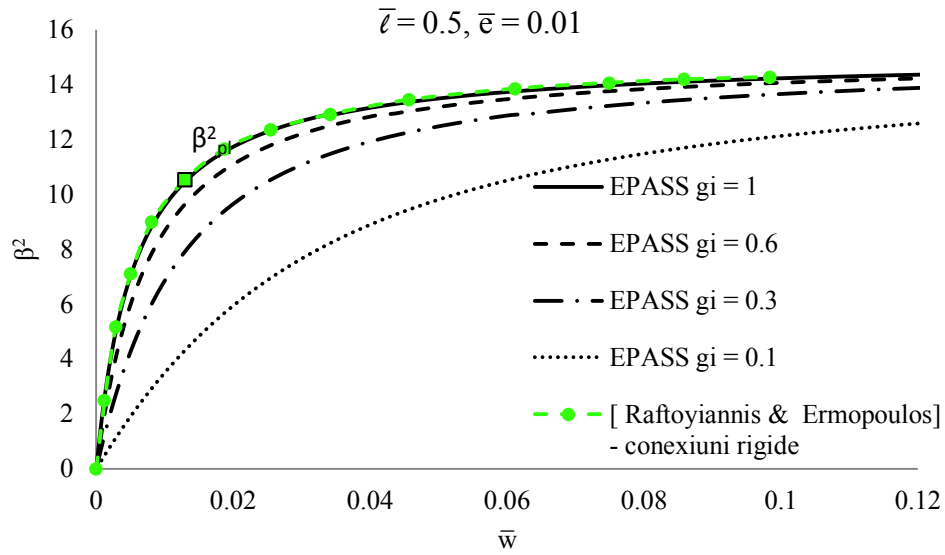


Fig. 4.27 Efectul conexiunilor flexibile asupra curbelor încărcare-deplasare laterală



## 4.6 Concluzii preliminarii

Validarea și calibrarea programului de calcul s-a făcut prin efectuarea unor analize la nivel de element și compararea rezultatelor cu cele din literatura de specialitate și cele furnizate de programul de element finit Abaqus (2011) și Mastan2 (2000). În urma acestor studii putem formula următoarele observații cu privire la performanțele modelului de calcul elaborat:

- Pentru toate exemplele studiate în acest capitol, se observă o bună concordanță între curbele de răspuns obținute cu programul EPASS și cu programul de element finit Abaqus și Mastan2 precum și cu cele din literatura de specialitate.
- Un aspect foarte important la modelul de analiză abordat în programul EPASS este de remarcat, și anume respectarea curbelor de interacțiune plastică, odată ce într-o secțiune transversală s-a depășit limita elastică, nefiind necesară divizarea barei în mai multe segmente pentru captarea și monitorizarea funcționării articulațiilor plastice.
- Suprinderea cu acuratețe a efectului imperfecțiunilor geometrice inițiale asupra răspunsului neliniar al barelor, în special într-un calcul geometric neliniar.

## Cap. 5      Exemple numerice pentru validarea și calibrarea programului de analiză neliniară pentru structurile în cadre.

---

În capitolele precedente a fost descris modelul matematic implementat în programul de analiză statică neliniară de ordinul al II-lea (EPASS) pentru analiza cadrelor plane din oțel alcătuite din bare prismatice sau non-prismatice. Formularea abordată își propune să rafineze metoda clasică bazată pe conceptul de articulație plastică punctuală cu formare instantanee și are scopul de a evalua cât mai corect comportamentul real al structurii cu bare prismatice sau non-prismatice. Chiar dacă, în literatura de specialitate, se găsesc numeroase metode pe elaborate pe baza conceptului de articulație plastică, acestea prezintă diferite neajunsuri, cum ar fi: ignorarea efectelor imperfecțiunilor geometrice inițiale și/sau ale tensiunilor reziduale; ale deformațiilor de lunare din forța tăietoare, neconsiderarea încărcărilor în cuprinsul barei; necesitatea divizării barei, odată cu apariția unei articulații plastice în cuprinsul ei; neinclusiunea conexiunilor flexibile; ignorarea efectului plastificării graduale, toate acestea putând conduce la o estimare greșită a capacității ultime de rezistență și deformabilitate.

Scopul acestui capitol este de a oferi suficiente rezultate care să confirme eficiența și evidențiind, totodată, caracterul practic al metodei propuse. Astfel, pentru calibrarea programului, s-au efectuat analize pe structuri considerate standard, iar rezultatele au fost comparate cu cele obținute cu alte programe ce vizează calculul neliniar al structurilor, Mastan2 (2000), un program de element finit Abaqus (2011), și alte rezultate din literatura de specialitate, care au fost la dispoziția autorului. Pentru selectarea structurilor de calibrare s-a ținut cont de gradul de nedeterminare statică și s-au considerat atât elemente cât și cadre portale sensibile în prezența diferitelor efecte neliniare. Toate analizele efectuate sunt static neliniare, în domeniul elastic sau elasto-plastic, efectele pierderii stabilității locale, atât flambajul local, cât și flambajul din torsiune, fiind neglijate în analiză. Pentru determinarea răspunsului structurii, s-a utilizat metoda simplu incrementală cu control în forțe, surprinderea comportării post critice nefiind posibilă.

Pentru evaluarea factorului ultim de încărcare, în cazul structurilor care au în componență bare cu secțiune variabilă, s-au efectuat analize static neliniare în domeniul elastic pentru cadrele portale studiate de Karabalis & Beskos (1983) și Saffari și al. (2008). Studiile au fost extinse în domeniul elasto-plastic și cu includerea efectului imperfecțiunilor geometrice inițiale sau a conexiunilor flexibile. De asemenea, cadrele portale propuse de Hayalioglu & Saka (1992) și Li&Li (2007), au fost analizate în domeniul elasto-plastic. Efectele plastificării graduale au fost studiate pentru cadrele sensibile la dezvoltarea zonelor plastice, propuse de El-Zanaty (1980) și Vogel (1985). Pentru evaluarea răspunsului structurii, ținând cont de efectele imperfecțiunilor geometrice inițiale, cadrele portale propuse de Galambos&Ketter (1959) și Liu și al. (2014) au fost analizate. Surprinderea plastificării secțiunii transversale, atât la capetele elementelor cât și în câmp, și “funcționarea” articulației plastice (respectarea curbei de interacțiune plastică) a fost urmărită la cadrele propuse de Ziemian (1992), Vogel (1985) și cadrul cu un nivel și două deschideri, propus în această lucrare, în secțiunea 5.10. Efectele conexiunilor flexibile asupra curbei de capacitate a structurii au fost studiate pentru cadrele propuse de Liew (1992) și cadrul portal și cel cu 6 niveluri propuse de Vogel (1985).

## 5.1 Cadrul portal Karabalis

În Fig. 5.1 se pot vizualiza caracteristicile geometrice, secționale și de material ale cadrului portal propus de Karabalis & Beskos (1983). Cadrul este încărcat cu două forțe axiale verticale, stâlpii fiind articulați în bază iar conexiunile de prindere în noduri ale elementelor se consideră rigide. Cadrul a fost analizat de diferiți cercetători (Bazeos & Karabalis, 2006), (Saffari, Rahgozar, & Jahanshahi, 2008), (Valipour & Bradford, 2012), (Soltani & Mohri, 2014) pentru calibrarea metodelor de analiză la stabilitate a structurilor cu elemente cu secțiune variabilă.

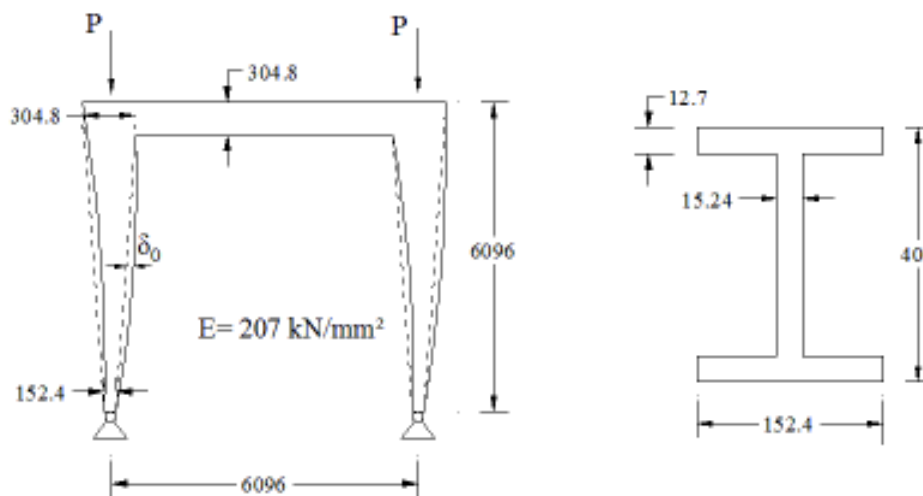


Fig. 5.1 Cadrul portal Karabalis

Karabalis & Beskos (1983) propun o metodă pentru evaluarea matricei de rigiditate tangentă a barelor cu tălpi egale și variație liniară a înălțimii secțiunii transversale, prin integrare directă a ecuațiilor de echilibru. Numărul elementelor utilizate pentru discretizarea stâlpilor este 4. Bazeos & Karabalis (Bazeos & Karabalis, 2006) propun o serie de diagrame adimensionale pentru evaluarea forței axiale critice a cadrelor cu profile I având înălțimea secțiunii transversale liniar variabilă, ținând cont de gradul de variație al secțiunilor transversale de capăt, precum și condițiile de rezemare. Saffari și al. (2008) utilizează o metodă similară pentru determinarea forței axiale critice. Valipour & Bradford (2012) dezvoltă o serie de relații utilizând principiul lucrului mecanic virtual și interpolarea forțelor, pentru determinarea funcțiilor de formă, care vor fi incluse, ulterior, în matricea de rigiditate. Mai recent, Soltani & Mohri (Soltani & Mohri, 2014) rezolvă ecuația diferențială de ordinul al IV-lea, având ca necunoscută deplasarea, prin dezvoltare în serii de puteri, obținând funcțiile de formă pentru elementul cu secțiune variabilă. În abordarea propusă un singur element a fost utilizat pentru modelarea barelor, considerând zece puncte de integrare Gauss Lobatto în lungul elementului și zece termeni în seriile de puteri pentru rezolvarea ecuației diferențiale de echilibru.

Rezultatele analizelor au fost centralizate în Tabel 5.1. Se constată o bună concordanță între rezultatele obținute cu metoda propusă și rezultatele din literatura de specialitate, de remarcat este eficiența în ceea ce privește numărul de elemente utilizate de programul EPASS (1

element/bară) în comparație cu 4 elemente necesare pentru modelarea stâlpilor cu metoda propusă de Karabalis & Beskos (1983) supraestimând forța axială critică cu doar 0,076 %.

Pentru a demonstra caracterul practic al metodei propuse, studiile au fost extinse prin includerea efectului imperfecțiunilor geometrice inițiale la stâlpi având o amplitudine maximă egală cu  $L/500$  la mijlocul deschiderii. Pentru calibrarea modelului, s-au efectuat analize de tip “Static Riks” în programul de element finit Abaqus (2011). Barele cu secțiuni variabilă au fost divizate în 60 de elemente liniare cu secțiuni constantă, discretizate în elemente de tip “beam” B33 cu dimensiunea de 100 mm. Imperfecțiunile geometrice inițiale au fost incluse în mod direct prin modificarea poziției inițiale a nodurilor considerând configurația deformată. În abordarea propusă s-a utilizat un singur element pentru modelarea barelor cu zece puncte de integrare Gauss Lobatto și 10 termeni în seriile de puteri. Curbele comparative încărcare-deplasare laterală se pot vizualiza în Fig. 5.2 iar rezultatele obținute demonstrează eficiența metodei propuse.

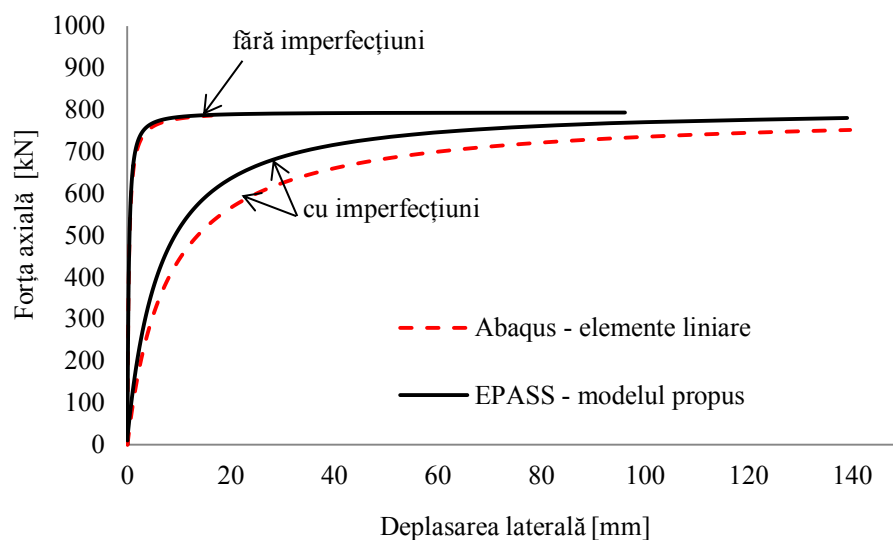


Fig. 5.2 Curbe comparative încărcare-deplasare laterală cadrul portal Karabalis: fără imperfecțiuni geometrice inițiale, respectiv cu imperfecțiuni geometrice inițiale

Tabel 5.1 Forța axială critică pentru cadrul portal Karabalis

Metoda	Forța axială critică [kN]	Eroarea [%]
(Karabalis & Beskos, 1983)	792	-
(Valipour & Bradford, 2012)	786	-0.76
( Saffari, Rahgozar, & Jahanshahi, 2008)	779	-1.16
(Soltani & Mohri, 2014)	792.3	+0.03
EPASS – modelul propus	792.6	+0.075

### Calcul elasto-plastic – cadru Karabalis încastrat în bază

Pentru a demonstra eficiența abordării propuse, autorul extinde studiile efectuate și în domeniul elasto-plastic. Se propune cadrul încastrat la baza stâlpilor, caracteristicile geometrice, secționale și de încărcare fiind prezentate în Fig. 5.3, iar proprietățile de material sunt următoarele: modulul lui Young  $E = 207 \text{ GPa}$  iar tensiunea de curgere  $\sigma_y = 235 \text{ MPa}$ . În analizele efectuate cu metoda propusă, barele au fost modelate considerând un singur element cu 10 puncte de integrare Gauss Lobatto, iar în expresia momentului încovoietor au fost considerați 10 termeni. Neliniaritatea de material este modelată prin conceptul de articulație plastică punctuală cu formare instantanee, zonele potențial plastifice fiind considerate la capetele elementului, precum și în cuprinsul lui. Imperfecțiunile geometrice inițiale se consideră a avea o formă sinusoidală cu o amplitudine inițială la mijlocul deschiderii de  $L/500$ . Pentru calibrarea modelului de analiză s-au efectuat analize "Static Riks" în programul de element finit Abaqus, neliniaritatea de material fiind modelată în ipoteza formării zonelor plastice. Modelarea cadrului s-a făcut prin divizarea stâlpilor în 60 de elemente liniare de tip "beam" B33 cu dimensiunea de 50mm. Imperfecțiunilor geometrice inițiale au fost incluse în analiză prin modificarea configurației geometrice a barei conform formei sinusoidale având amplitudinea de  $L/500$  la mijlocul barei. Rezultatele au fost centralizate în Fig. 5.4 și se poate observa o bună concordanță între rezultatele obținute cu programul EPASS și cele furnizate de Abaqus. De asemenea, un aspect important, se constată respectarea curbei de interacțiune plastică, odată cu apariția articulațiilor plastice în baza stâlpilor, Fig. 5.5 și Fig. 5.6

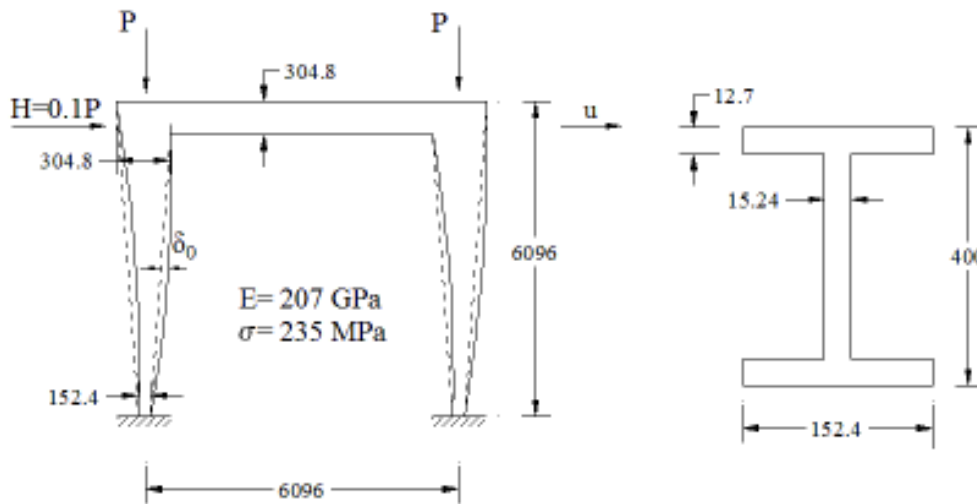


Fig. 5.3 Cadrul portal Karabalis încastrat în bază

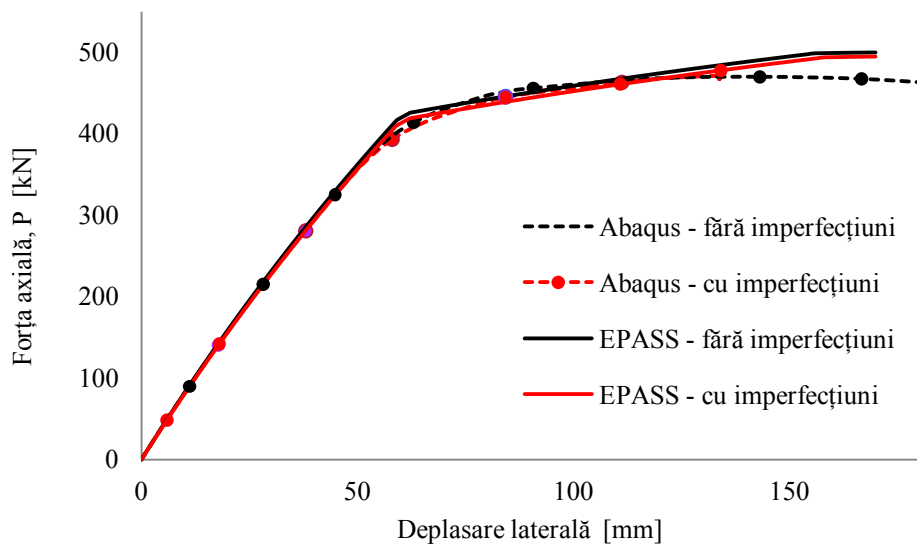


Fig. 5.4 Curbe comparative încărcare-deplasare laterală cadrul portal Karabalis încastrat în bază – calcul elasto-plastic

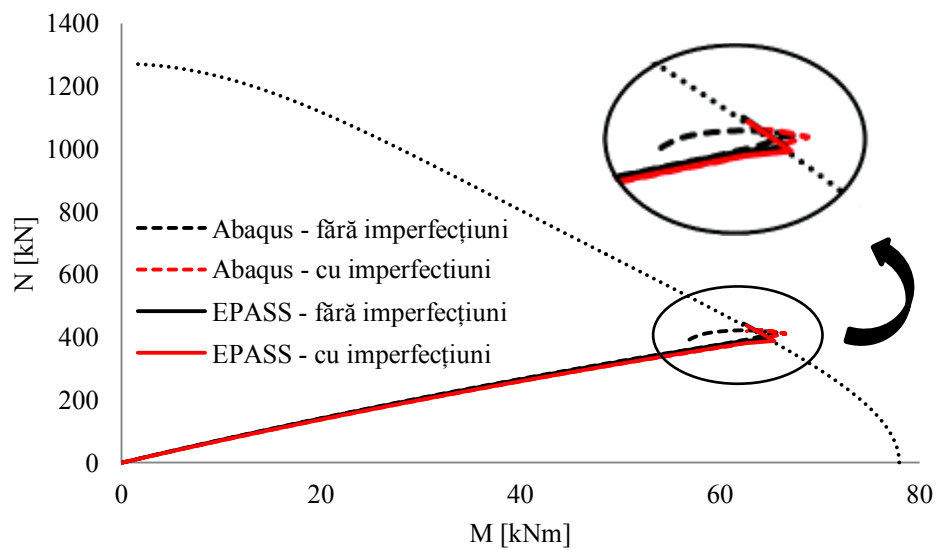


Fig. 5.5 Variația combinației de eforturi la baza stâlpului 1

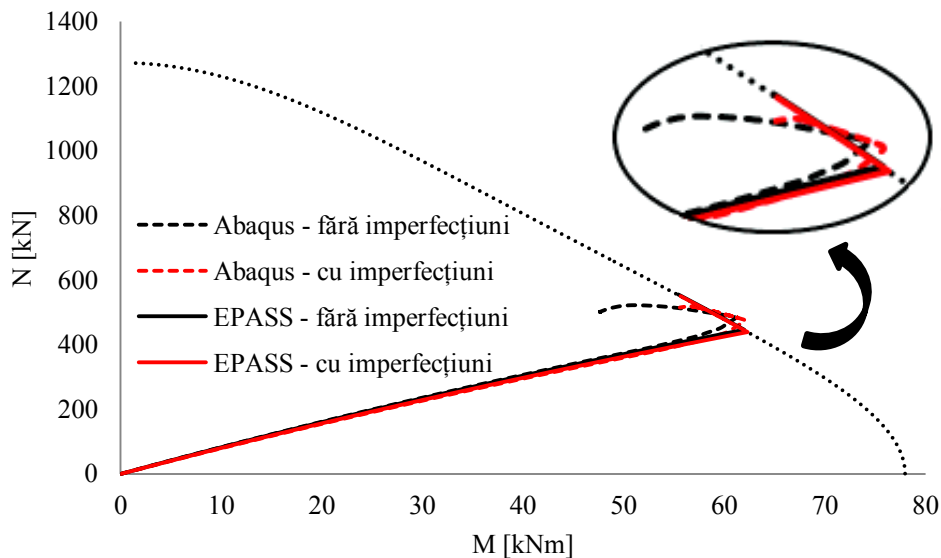


Fig. 5.6 Variația combinației de eforturi la baza stâlpului 2

## 5.2 Cadrul portal Saffari

Cadrul portal din Fig. 5.7 a fost studiat de Saffari și al. (2008) și, ulterior, de Rezaiee-Pajand și al. (2015) și Soltani & Mohri (2014) pentru calibrarea modelelor de analiză la stabilitate a structurilor având bare cu secțiune variabilă. Caracteristicile geometrice, secționale și de material se pot vizualiza în Fig. 5.7, conexiunile de prindere ale barelor sunt rigide iar stâlpii se consideră articulați în bază. Cadrul este încărcat cu două forțe axiale verticale concentrate în axul stâlpilor. Momentul de inerție al elementelor se consideră că variază după următoarea funcție parabolică:

$$I(x) = I_f \left( \frac{x}{a} \right)^2, \quad a = \frac{\sqrt{I_f / I_e}}{1 - \sqrt{I_f / I_e}} L \quad (5.1)$$

unde  $I_f$  și  $I_e$  sunt momentele de inerție la capetele elementului iar  $I(x)$  este momentul de inerție la distanța  $x$  de la punctul  $O$ . Saffari și colab. (2008) rezolvă ecuația diferențială de echilibru de ordinul al II-lea pentru bara Bernoulli-Euler, considerând o funcție particulară pentru variația momentului de inerție, dată de ecuația (5.1) și derivând apoi relațiile forță-deplasare la nivel de element evidențiind matricea de rigiditate a elementală. O abordare similară este propusă de Rezaiee-Pajand și colab. (2015) prin rezolvarea analitică a ecuației diferențiale de echilibru de ordinul al IV-lea, presupunând aceeași variație parabolică a momentului de inerție, și rezolvând, apoi, matricea de stabilitate pentru cadrul portal cu elemente cu secțiune variabilă. Soltani & Mohri (2014) derivează funcțiile de formă pentru bara cu secțiune variabilă prin abordarea în serii de puteri rezolvând ecuația diferențială de echilibru cu necunoscută în deplasare. În abordarea propusă încărcările sunt aplicate incremental până matricea de rigiditate globală devine negativă. Tabel 5.2 prezintă forța axială critică de flambaj ( $P_{cr}$ ) obținută cu diferite formulări. Valorile obținute demonstrează acuratețea rezultatelor obținute cu metoda propusă, chiar și atunci când un număr mic de termeni se utilizează în seria de puteri. În toate cazurile studiate modelarea

**Pagină eliminată din conținutul electronic al acestei lucrări.**



Fig. 5.8 se pot vizualiza caracteristicile geometrice, secționale, de material și de încărcare ale cadrului. Stâlpii se consideră articulați în bază iar conexiunile de prindere în noduri ale elementelor sunt rigide. Cadrul a fost studiat anterior în Li&Li (2007), unde două analize au fost efectuate: una utilizând o metodă bazată pe conceptul de zone plastice (propusă de Chen (2000b)) iar a doua utilizând o metodă bazată pe dezvoltare în serii de puteri (cu rezolvarea ecuației diferențiale de echilibru având ca necunoscută deplasarea), referitor la numărul termenilor utilizați în expresia polinomială nu s-au găsit informații în literatura de specialitate, avută la dispoziție. În abordarea propusă cadrul a fost modelat considerând 4 elemente pe grindă (fiind divizată în punctul de aplicare al forțelor concentrate) și 2 elemente/stâlp, s-au considerat 15 puncte de integrare Gauss Lobatto și 15 termeni în dezvoltarea seriilor de puteri. Modelarea comportării elasto-plastice este la nivel de secțiune în baza conceptului de articulație plastică cu formare instantanee. Pentru calibrarea modelului de analiză s-a efectuat o analiză în programul de element finit Abaqus, în ipoteza dezvoltării zonelor plastice. Cadrul a fost modelat prin divizarea elementelor în elemente liniare cu secțiune constantă B23 (40 pentru grindă și 20 pentru stâlp). Efectul imperfecțiunilor geometrice inițiale, precum și al deformațiilor de lunecare au fost neglijate în analiză.

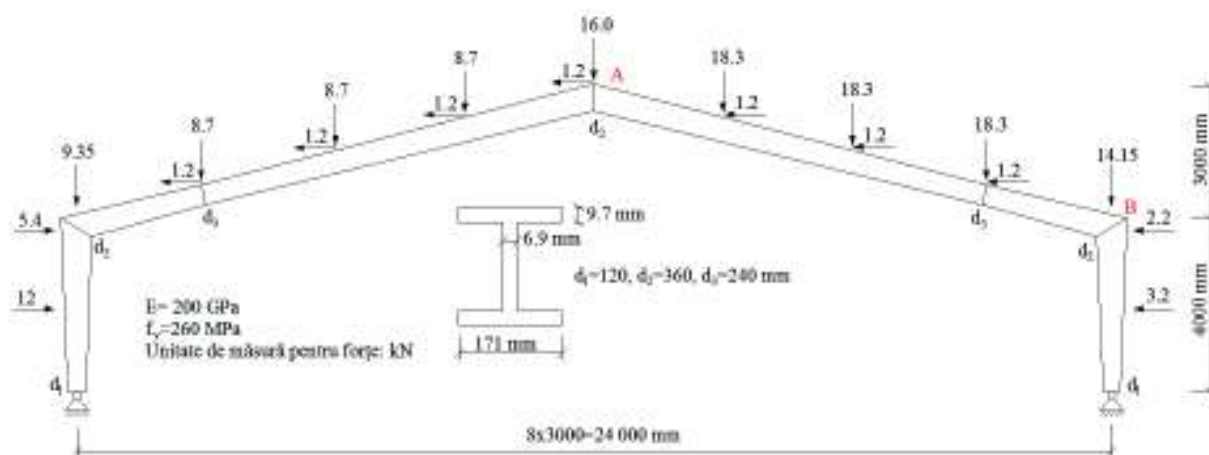


Fig. 5.8 Caracteristicile geometrice și de încărcare pentru cadrul portal Li&Li

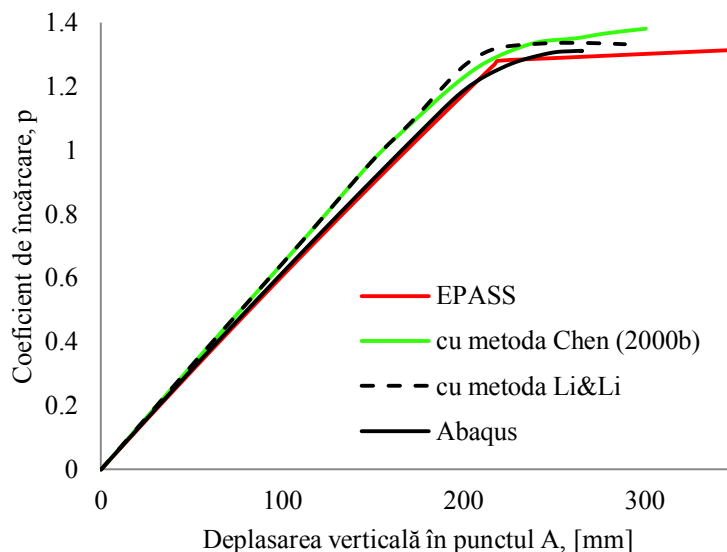


Fig. 5.9 Curbe comparative încărcare-deplasare

Curbele încărcare-deplasare laterală se pot vizualiza în Fig. 5.9. Se constată o bună concordanță între curbele obținute cu metoda propusă și cele obținute în Abaqus și cele furnizate de Li&Li (2007).

#### 5.4 Cadrul portal Hayalioglu & Saka

Următorul exemplu este un cadru portal studiat de Hayalioglu & Saka (1992) pentru optimizarea structurilor având bare cu secțiune variabilă. Hayalioglu & Saka (1992) consideră două variabile pentru fiecare element, și anume aria secțiunii transversale la un capăt, respectiv raportul secțiunilor transversale de la capetele elementului. Algoritmul de proiectare este obținut prin cuplarea criteriului optimal cu metoda de analiză elasto-plastică în domeniul marilor deplasări. Metoda criteriului optimal (optimality criteria method) este folosit pentru dezvoltarea unei relații recursive pentru determinarea variabilelor de proiectare considerate, impunând ca și restricții deplasările. Această relație impune un răspuns neliniar al structurii la fiecare pas de încărcare, care este evaluat în baza formulării Euler, incluzând și efectele neliniarității de material. În urma optimizării caracteristicilor geometrice a cadrului portal din Fig. 5.10, Hayalioglu & Saka (1992) determină curba încărcare-deplasare verticală pentru cadrul optimizat, având următoarele caracteristici:  $b = 200\text{mm}$ ,  $t_w = 30\text{mm}$ ,  $t_f = 48\text{mm}$ ,  $k_2 = 3.68$ ,  $A_{11} = 162.08\text{cm}^2$  și  $n_1 = 1.327$  pentru grinzi iar  $A_{12} = 155.89\text{cm}^2$  și  $n_2 = 1.302$  pentru stâlpi, care, după dezvoltarea relațiilor s-au considerat următoarele proprietăți:  $h_1 = 270\text{mm}$ ,  $h_2 = 445\text{mm}$  pentru grinzi, respectiv  $h_1 = 245\text{mm}$ ,  $h_2 = 405\text{mm}$  pentru stâlpi. Pentru modelarea cadrului, Hayalioglu & Saka (1992) divizează stâlpii și grinzi în 20, respectiv 24 de elemente.

În abordarea propusă s-a utilizat un singur element pentru discretizarea stâlpilor și 4 pentru grinzi (în punctele de aplicare a forțelor), considerând 10 puncte de integrare Gauss Lobato în lungul barei și 10 termeni în dezvoltarea seriilor de puteri pentru rezolvarea ecuației diferențiale de echilibru. Efectul imperfecțiunilor geometrice inițiale, precum și al deformațiilor de lunecare au fost neglijate în analize. În Abaqus (2011), s-a efectuat o analiză “Static Riks”,

barele fiind modelate cu elemente liniare cu secțiune constantă, divizarea lor fiind identică cu cea considerată de Hayalioglu & Saka (1992), iar discretizarea cadrului s-a făcut cu elemente B31 de dimensiunea de 100mm. Curbele comparative încărcare-deplasare verticală și variația combinației de eforturi în al doilea stâlp se pot vizualiza în Fig. 5.11(a), respectiv Fig. 5.11(b). Se constată o bună concordanță între rezultatele obținute cu programul EPASS și Abaqus și cele furnizate de Hayalioglu & Saka (1992), în cele din urmă curba este trasată până la obținerea unei deplasări egale cu 100mm.

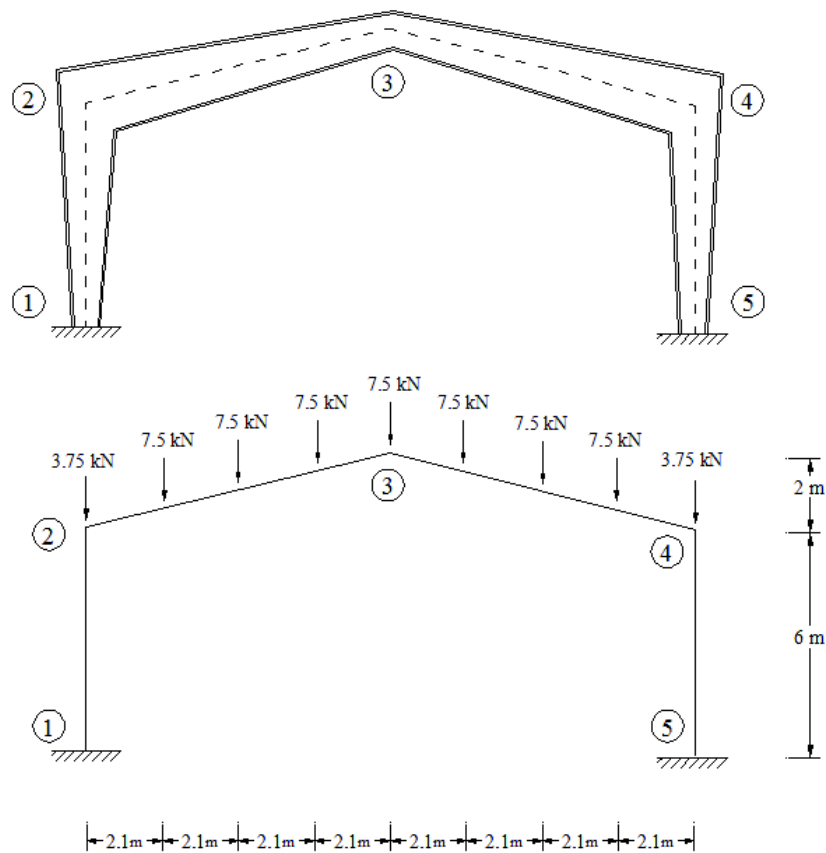


Fig. 5.10 Caracteristici geometrice cadru portal Hayalioglu & Saka

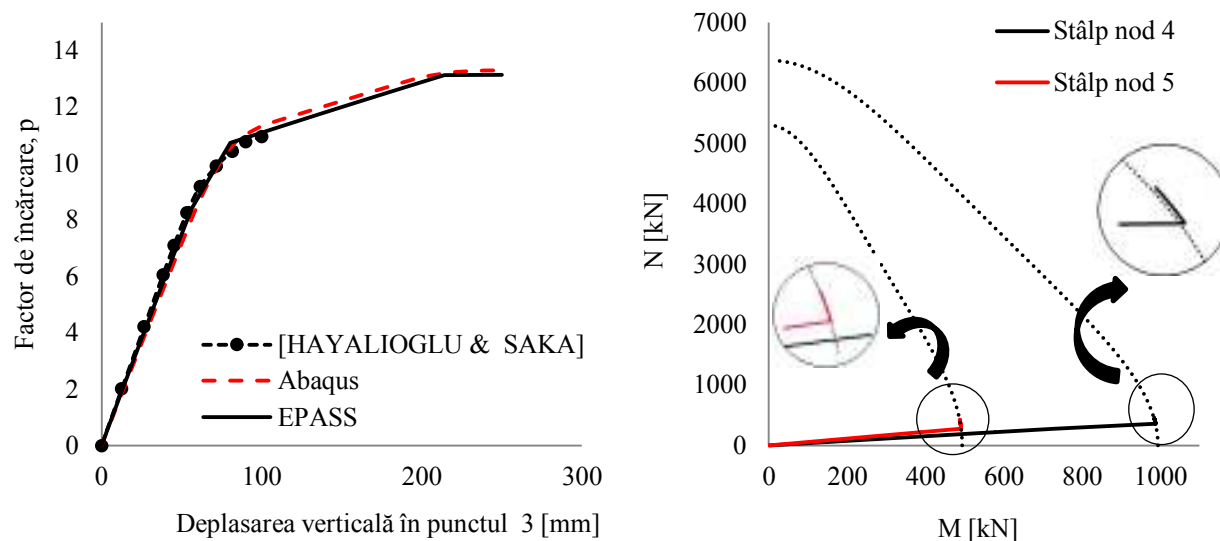


Fig. 5.11 (a) Curba încărcare – deplasare verticală, (b) Variaþia combinaþiei de eforturi

## 5.5 Cadrul portal El-Zanaty

Caracteristicile geometrice, de material și de încărcare ale cadrului portal propus de El-Zanaty (1980) se pot vizualiza în Fig. 5.12. Cadrul este considerat a fi foarte sensibil la efectele dezvoltării zonelor plastice în lungul barelor și a fost studiat, ulterior, de diferiți cercetători pentru calibrarea metodelor de analiză elasto-plastică de ordinul al II-lea (White, 1985), (King, White, & Chen, 1992), (Liew J. , Chen, Shanmugam, & Chen, 2000), (Jiang, Chen, & Liew, 2002), (Chiorean C. G., 2006), (Zubydan, 2010). Elementele au secþiunea transversală W8x31 iar dimensiunile cadrului sunt astfel alese încât să se respecte raportul  $L/r_x=40$ . Conexiunile de prindere în noduri ale elementelor se consideră rigide iar stâlpii sunt articulați în bază. Imperfecþiunile geometrice iniþiale și deformaþiile de lunecare nu sunt luate în considerare în modelul de analiză. Cadrul este încărcat incremental cu forþe gravitaþionale până la un anumit procent din forþa axială capabilă a stâlpilor ( $Pr=0.2$ ,  $Pr=0.4$ ,  $Pr=0.6$ ), după care forþele verticale sunt menþinute constante și este aplicată forþa laterală H până la cedarea structurii.

Modelarea neliniarității fizice, pentru analizele efectuate în EPASS, s-a făcut la nivel de secþiune în două ipoteze; în baza conceptului de articulație plastică punctuală cu formare instantanee, respectiv simularea dezvoltării zonelor plastice utilizând modulul de elasticitate tangent  $E_t$ , conform relaþiilor propuse de Zubydan (2010). Pentru discretizarea barelor cadrului s-a utilizat un singur element, pentru toate analizele efectuate în EPASS. Distribuþia tensiunilor reziduale, pentru modelul cu considerarea plastificării graduale, este cel prevăzut în ECCS.

Pentru testarea eficienþei programului EPASS, rezultatele obþinute au fost comparate cu altele furnizate din literatura de specialitate. White (1985) modelează neliniaritatea fizică la nivel de fibră, considerând 50 de elemente pentru discretizarea barelor, respectiv 200 de fibre pentru secþiunile transversale. Tensiunile reziduale considerate în modelul de analiză au valoarea de  $\sigma_r = 0,333\sigma_y$ . Liew (2000) modelează comportarea elasto-plastică la nivel de secþiune, pe baza conceptului de articulație plastică cu formare instantanee, utilizând un element pentru

discretizarea barelor structurii. Mai recent, Zubyan (2010) propune un set de relații empirice pentru determinarea modului de elasticitate tangent  $E_t$  sau secant  $E_s$  cu considerarea sau nu a tensiunilor reziduale. Barele cadrului sunt discretizate în câte 10 elemente liniare iar distribuția tensiunilor reziduale este cea prevăzută în ECCS.

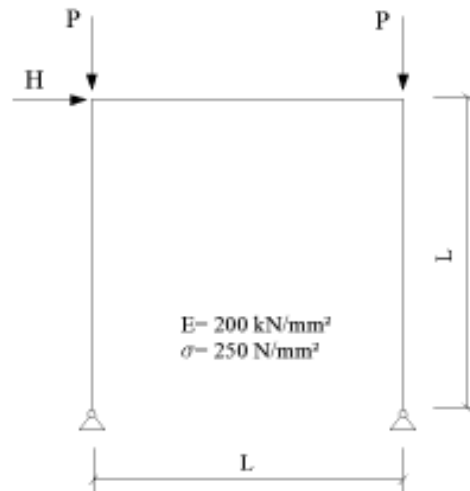


Fig. 5.12 Caracteristicile geometrice și de încărcare pentru cadrul portal El-Zanaty

Curbele încărcare-deplasare laterală se pot vizualiza în Fig. 5.13. Pentru modelul cu articulații plastice cu formare instantanee, se constată o corelație aproape perfectă între rezultatele obținute cu programul EPASS și cele furnizate de Liew. De asemenea, se constată o destul de bună concordanță între curbele obținute cu EPASS, în varianta dezvoltării zonelor plastice, cu cele date de White (1985), respectiv Zubyan (2010). Se remarcă eficiența programului EPASS, având în vedere utilizarea unui singur element pe bară, se atinge un nivel de acuratețe al rezultatelor comparabil.

Pentru calibrarea programului EPASS, cadrul este reanalizat sub acțiunea forțelor verticale și orizontale aplicate incremental, rezultatele fiind comparate cu cele ale lui Zubyan (2010). Barele au secțiunea transversală W6x20 iar deschiderea și înălțimea cadrului sunt astfel alese încât să se respecte raportul  $L/r_x=51.9$ . Se efectuează 4 analize, considerând ca și ipoteze de încărcare raportul forțelor aplicate  $H/P$ :  $P_r=0,02$ ,  $0,05$ ,  $0,1$  și  $0,2$ . Forțele sunt aplicate proporțional până la cedarea structurii. Cadrul se consideră fără imperfecțiuni geometrice iar distribuția tensiunilor reziduale este cea conform prevederilor ECCS. Zubyan (2010) consideră intensitatea tensiunilor reziduale  $\sigma_r = 0,5\sigma_y$ , însă cu privire la modul de discretizare al barelor nu se găsesc informații. Pentru compararea rezultatelor autorul a considerat necesară efectuarea unor analize cu programele Abaqus (2011), respectiv Mastan2 (2000). Programul Abaqus modelează neliniaritatea fizică la nivel de fibră utilizând criteriul de curgere von Mises. Barele au fost discretizate în elemente liniare B31 de dimensiunea de 20 mm. Includerea tensiunilor reziduale în modelul cu elemente liniare, după cunoștințele autorului, nu a fost posibilă. În programul Mastan2 comportarea elasto-plastică a secțiunilor s-a făcut considerând modulul de elasticitate tangent  $E_t$ , respectiv  $E_{tm}$  pentru includerea efectului tensiunilor reziduale. Discretizarea cadrului s-a făcut considerând 10 elemente pentru fiecare bară.

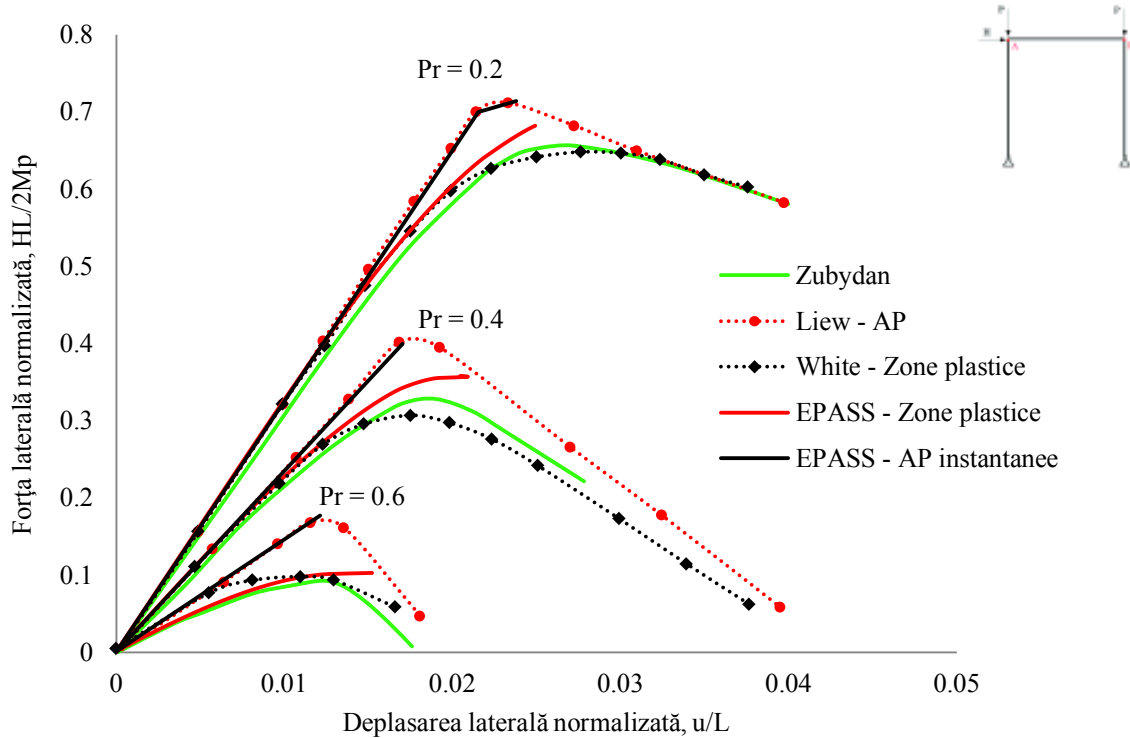


Fig. 5.13 Cadru portal, El-Zanaty, cu considerarea forțelor gravitaționale constante și aplicarea forțelor laterale incrementale, cu tensiuni reziduale.

În Fig. 5.14 și Fig. 5.15 sunt centralizate rezultatele analizelor. Se constată o foarte bună corelare a curbelor încărcare-deplasare laterală, precum și a factorilor limită de încărcare, în comparație cu rezultatele obținute în Abaqus și cele furnizate de Zubyan (2010). De asemenea, în figurile Fig. 5.16 și Fig. 5.17 se poate observa variația modului de elasticitate adimensional în funcție de momentul încovoietor adimensional și se remarcă o scădere mai bruscă în cazul ignorării efectului tensiunilor reziduale, respectiv mai “lină” în cazul considerării acestuia în modelul de analiză.

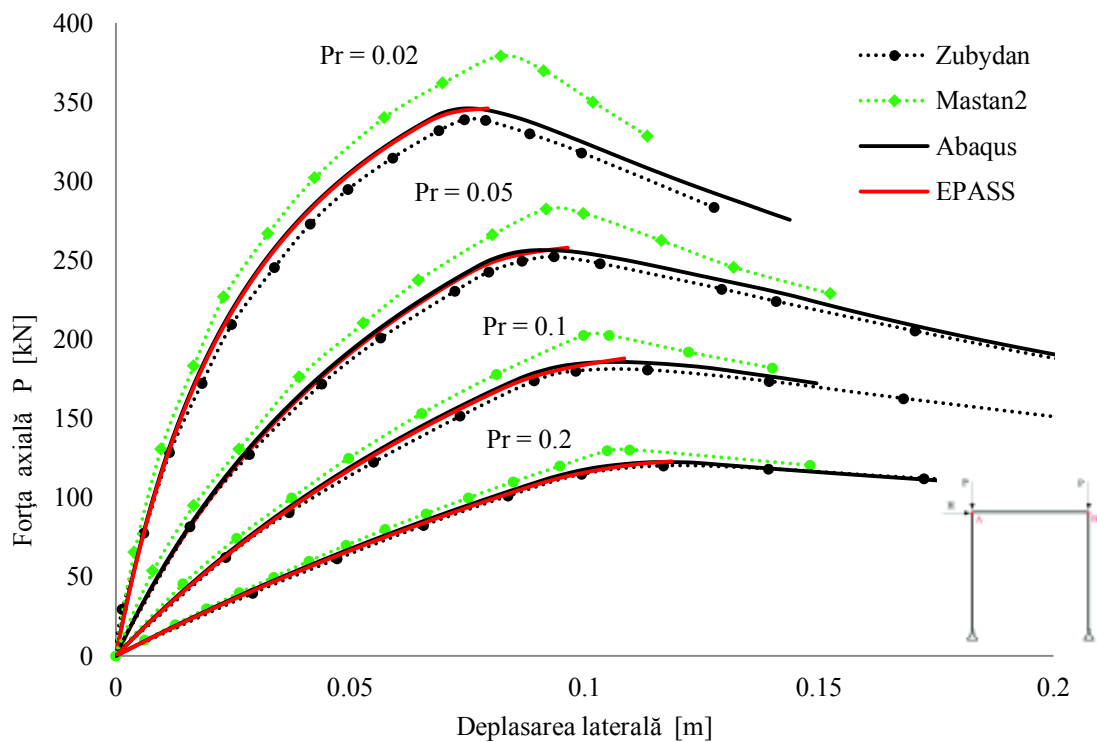


Fig. 5.14 Cadru portal, El-Zanaty, cu considerarea forțelor aplicate incremental, fără tensiuni reziduale.

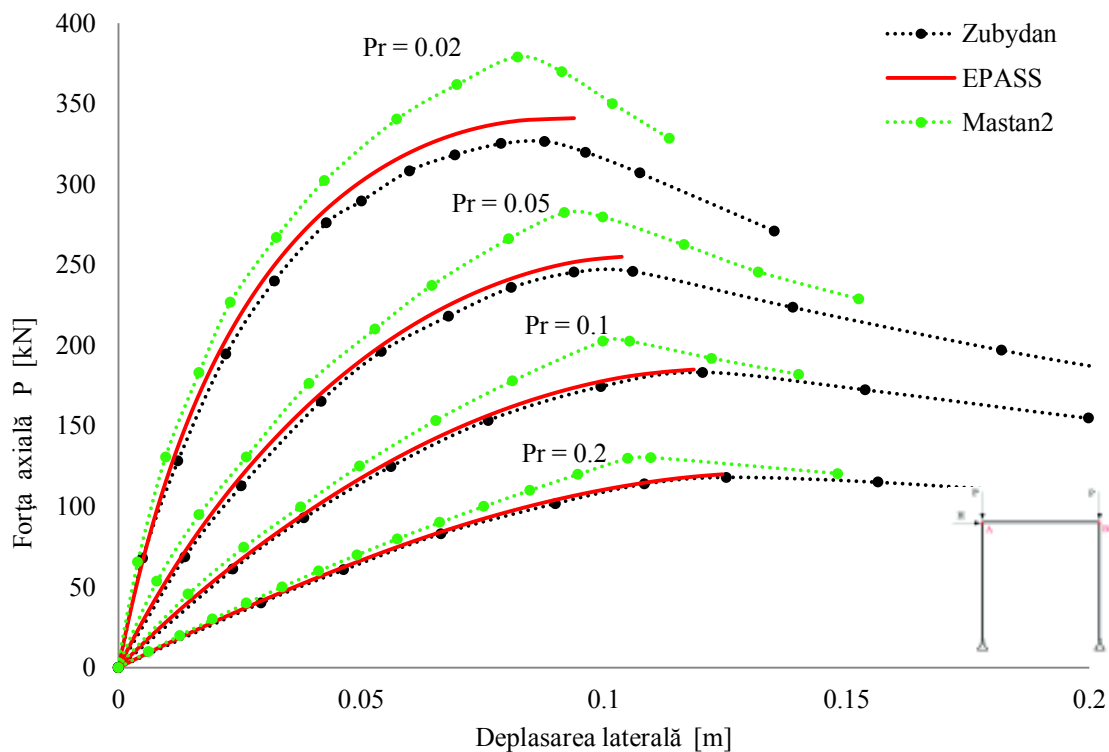


Fig. 5.15 Cadru portal, El-Zanaty, cu considerarea forțelor aplicate incremental, cu tensiuni reziduale.

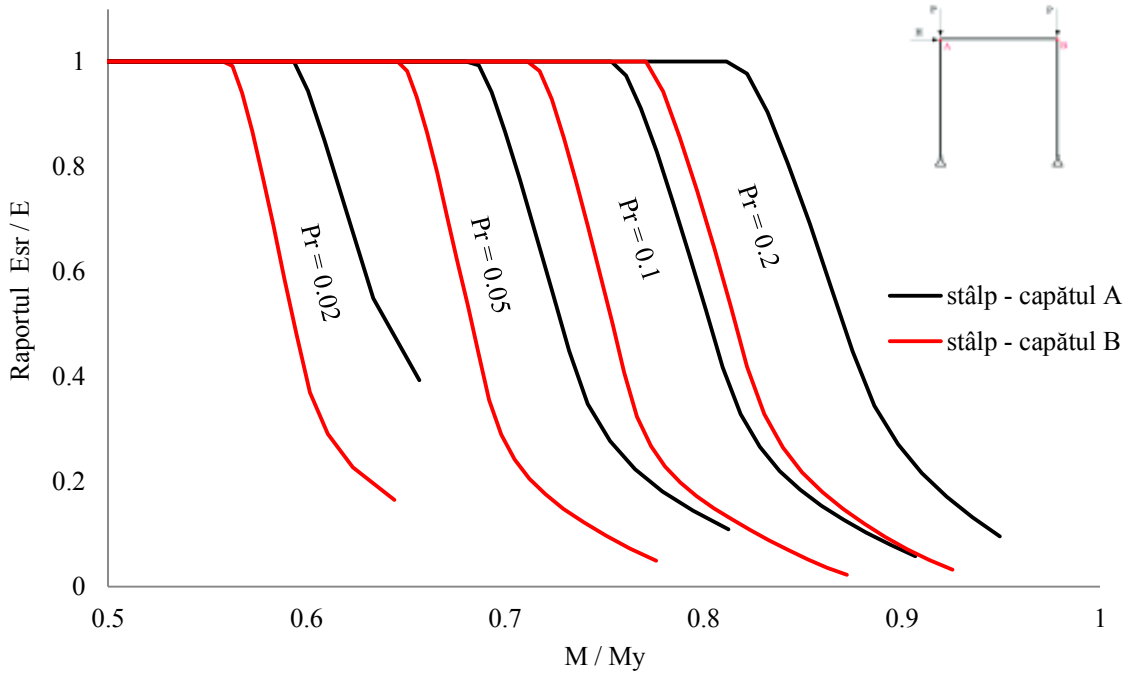


Fig. 5.16 Cadru portal, El-Zanaty, variația modului de elasticitate tangent în raport cu variația momentului încovoietor adimensional, diferite ipoteze de încărcare; fără tensiuni reziduale (încărcări aplicate incremental).

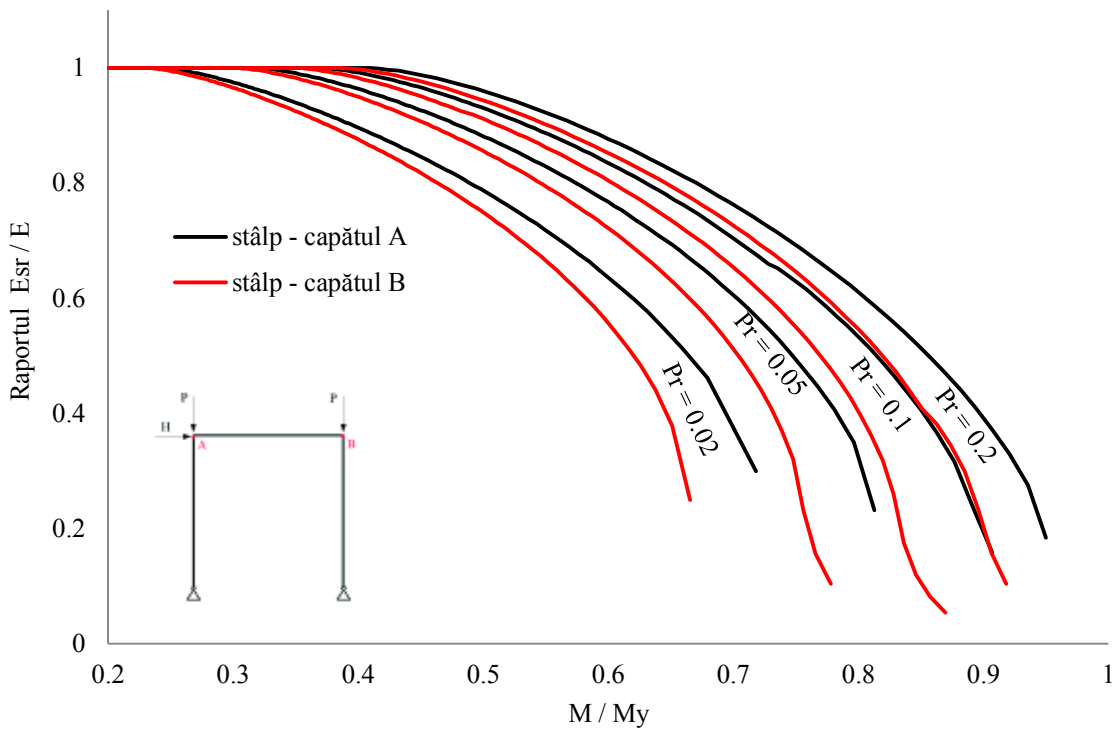


Fig. 5.17 Cadru portal, El-Zanaty, variația modului de elasticitate tangent în raport cu variația momentului încovoietor adimensional, diferite ipoteze de încărcare; cu tensiuni reziduale (încărcări aplicate incremental).



## 5.6 Cadrul portal Vogel

În Fig. 5.18 sunt prezentate caracteristicile geometrice și secționale pentru cadrul portal propus de Vogel (1985), și care a fost, ulterior, analizat de numeroși cercetători (Ziemian R. , 1992), (Chen & Kim, 1997), (Chiorean C. G., 2006), (Li & Li, Advanced Analysis and Design of Steel Frames, 2007), (Iu & Bradford, 2012), în vederea testării metodelor de analiză avansată a structurilor sensibile la efectele dezvoltării zonelor plastice, a tensiunilor reziduale și a conexiunilor flexibile. Cadrul este supus la încărcări axiale concentrate în noduri și o forță laterală concentrată, care sunt aplicate proporțional incremental până la cedare. Stâlpii sunt încastrați în bază iar îmbinările între elemente se consideră rigide. Imperfecțiunile geometrice globale se iau în considerare prin modificarea geometriei structurii în configurația inițială. Modelarea cadrului s-a făcut considerând un singur element pe bară, pentru toate analizele efectuate.

Pentru modelarea comportării elasto-plastice a secțiunilor elementelor, s-au considerat trei tipuri de analiză: plasticarea integrală și instantanee în secțiunile de bară din jurul combinațiilor de eforturi maxime; simularea dezvoltării zonelor plastice cu sau fără considerarea tensiunilor reziduale, conform relațiilor propuse de (Zubydan, 2010), detaliate în Subcap 2.4.1.2. Distribuția tensiunilor reziduale considerate este cea prevăzută în ECCS. În Fig. 5.19 se pot vizualiza curbele încărcare-deplasare laterală, precum și factorii limită de încărcare, pentru analizele efectuate, considerând două curbe de interacțiune plastică, cea propusă de codul american AISC-LRFD și cea propusă de Orbison. În Fig. 5.22 se poate urmări variația combinației de eforturi pentru secțiunea din baza stâlpului 2 și se observă respectarea curbei de interacțiune plastică, indiferent de relațiile utilizate în modelul de calcul, AISC-LRFD, Orbison sau Zubydan (2010). De asemenea, se constată faptul că curba de plasticarea considerată în analiză are o influență semnificativă asupra capacității ultime de rezistență a structurii. Variația modulului de elasticitate în funcție de momentul încovoietor adimensional, pentru stâlpi, se poate urmări în Fig. 5.23.

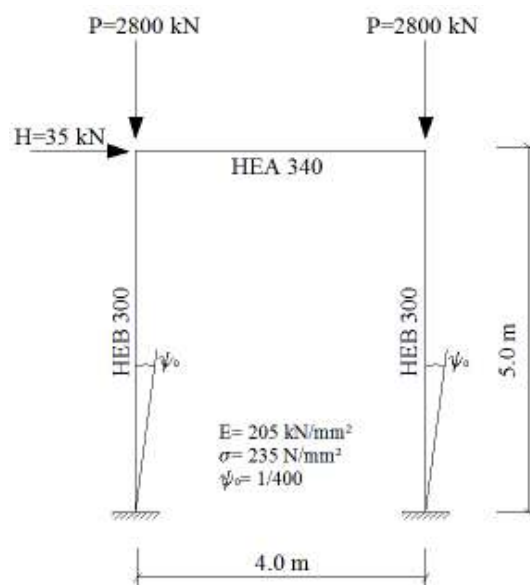


Fig. 5.18 Configurația geometrică și distribuția încărcărilor pentru cadru plan Vogel.

Pentru testarea performanțelor programului EPASS, rezultatele analizelor au fost comparate cu rezultatele obținute cu programele NEFCAD (Chiorean C. G., 2006), CU-SP2D, (Ziemian R. , 1992), respectiv cu rezultatele furnizate de Vogel (1985). În programul NEFCAD, neliniaritatea fizică a fost modelată la nivel de secțiune utilizând relațiile Ramberg-Osgood, cu următorii parametri de formă:  $a=1$ ,  $n=35$  (pentru simularea dezvoltării zonelor plastice), respectiv  $a=1$ ,  $n=400$  (pentru simularea formării articulațiilor plastice). Discretizarea cadrului s-a făcut în felul următor: două elemente de tip bară pentru stâlpi, respectiv unul pentru grindă. De asemenea, pentru testarea eficienței programului EPASS, rezultatele obținute au fost comparate și cu cele furnizate de programul NEFCAD, în varianta modelării neliniarității fizice la nivel de fibră. Relațiile constitutive neliniare  $\sigma$ - $\varepsilon$  considerate în modelul de analiză sunt cele prevăzute în (EN 1993-1-1) iar distribuția tensiunilor reziduale sunt cele propuse de AISC-LRFD și (EN 1993-1-1). Pentru determinarea caracteristicilor secționale de rigiditate s-a utilizat metoda de integrare Simpson cu o rețea de  $21 \times 21$  puncte pentru discretizarea tălpilor, respectiv ale inimilor; iar pentru monitorizarea stării de eforturi în lungul elementului s-a folosit metoda Gauss Lobatto, utilizând 7 puncte de integrare. Analiza efectuată de Ziemian (1992), în programul CU-SP2D, modelează neliniaritatea fizică la nivel de fibră, considerând 50 de elemente pentru discretizarea stâlpilor, respectiv 20 pentru discretizarea grinzii. Vogel (1985) consideră două modele pentru comportarea elasto-plastică a secțiunilor elementelor, ipoteza formării zonelor plastice, respectiv modelul formării articulațiilor plastice instantanee. Referitor la modelul de discretizare al cadrului nu s-au găsit informații în literatura de specialitate, avută la dispoziție. În analizele efectuate de Vogel și Ziemian, distribuția tensiunilor reziduale considerate este cea propusă de norma europeană (EN 1993-1-1). Rezultatele analizelor efectuate se pot vizualiza în Fig. 5.20 și Fig. 5.21, se observă o bună corelare a curbei obținute cu EPASS, în ipoteza formării instantanee a articulațiilor plastice ( $p_{lim}=1.044$ ), pentru considerarea curbei de interacțiune plastică propusă de normativul american AISC-LRFD, și curba obținută cu programul NEFCAD, în varianta modelării neliniarității fizice pe baza relațiilor Ramberg-Osgood cu parametri  $a=1$ ,  $n=400$  ( $p_{lim}=1.05$ ). De asemenea, se constată o foarte bună corelare între curba obținute cu programul EPASS, în varianta simulării dezvoltării zonelor plastice cu și fără considerarea tensiunilor reziduale ( $p_{lim}=1,04$ ;  $p_{lim}=1,03$ ), cu curbele analizelor la nivel de fibră obținute cu programul NEFCAD, considerând distribuția tensiunilor reziduale propusă în AISC-LRFD ( $p_{lim}=1,045$ ;  $p_{lim}=1,025$ ). De remarcat este precizia rezultatelor comparabilă cu cele din literatura de specialitate, având în vedere că se utilizează un singur element pentru discretizarea barelor.

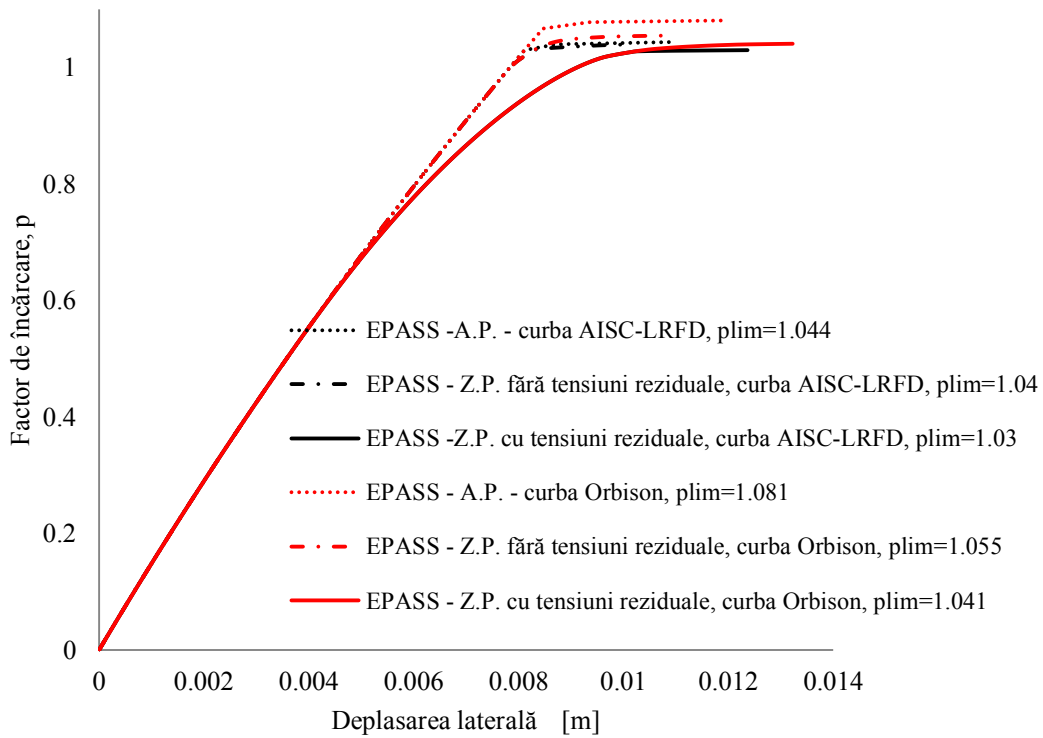


Fig. 5.19 Curbe comparative încărcare-deplasare laterală pentru diferite curbe de interacțiune plastică.

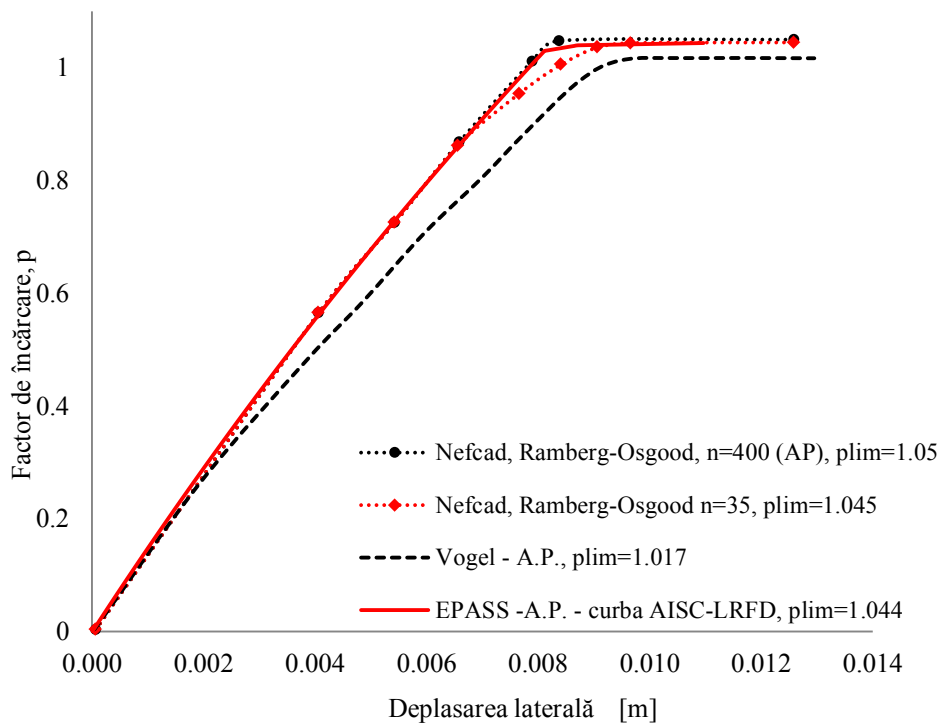


Fig. 5.20 Curbe încărcare-deplasare laterală pentru compararea cu modele bazate pe conceptul de articulație plastică

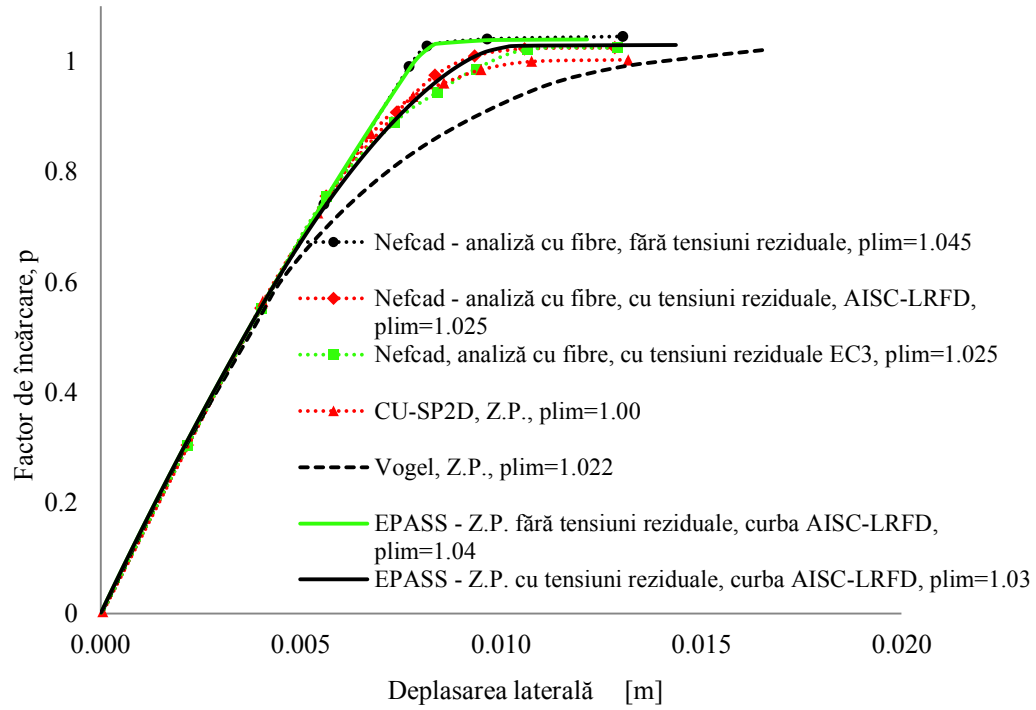


Fig. 5.21 Curbe încărcare-deplasare laterală pentru compararea cu modele bazate pe conceptul de zone plastice

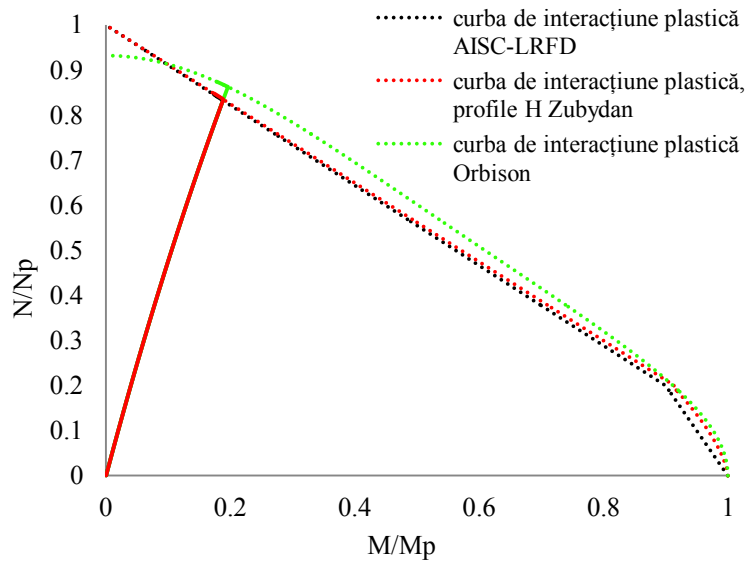


Fig. 5.22 Variația combinației de eforturi în stâlpul 2, în bază, pentru diferite curbe de plastificare.

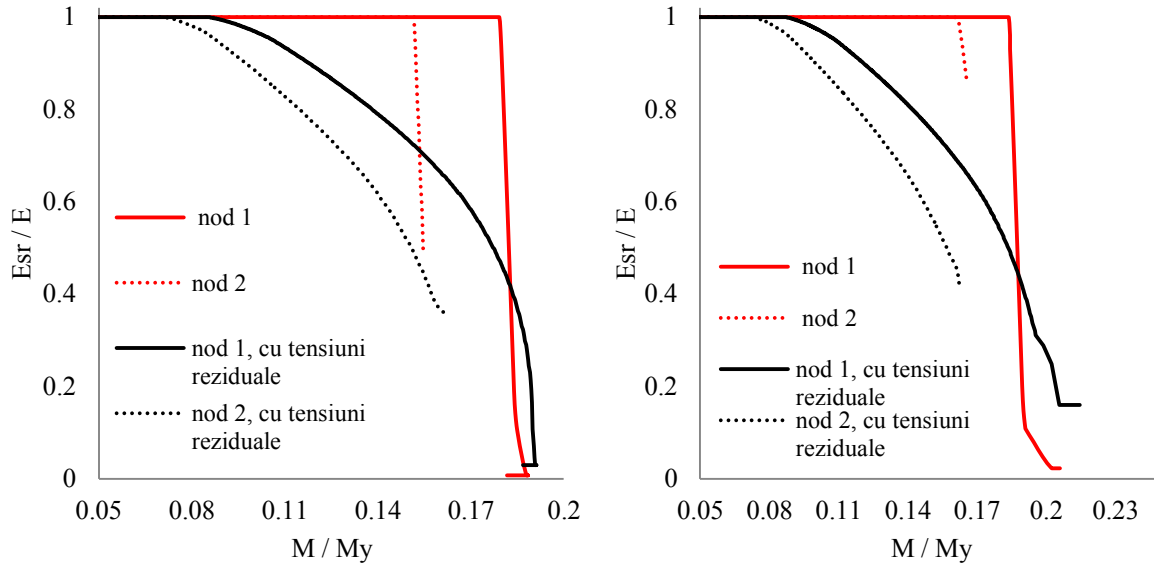


Fig. 5.23 Variația modului de elasticitate în funcție de momentul încovoietor adimensional (curba de plastificare Zubydan); a) stâlp 1, b) stâlp 2.

Comportarea conexiunilor flexibile ale grinzilor a fost studiată de Chen & Kim (1997) și apoi de Nguyen și al. (2011), considerând modelul celor trei parametri cu următoarele caracteristici:  $R_i = 280.000 \text{ kip} - \text{in}/\text{rad}$ ,  $M_u = 1.250 \text{ kip} - \text{in}$ ,  $n = 0,98$ . Neliniaritatea fizică a fost modelată la nivel de secțiune, în baza conceptului de articulație plastică, considerând curba de plastificare Orbison. În EPASS modelarea comportării elasto-plastice a secțiunilor s-a făcut utilizând conceptul de articulație plastică cu formare instantanee. În Fig. 5.24 se prezintă comparativ efectele conexiunilor semirigide asupra curbelor de comportare. Se observă o destul de bună corelare între curba obținută cu programul EPASS și curbele din literatura de specialitate.

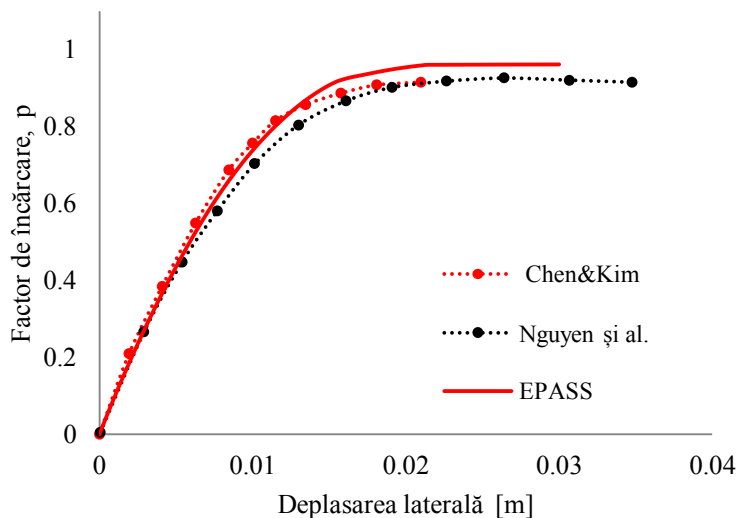


Fig. 5.24 Efectul conexiunilor semirigide asupra curbelor de comportare încărcare-deplasare laterală.

## 5.7 Cadrul portal cu imperfecțiuni geometrice inițiale locale și globale Galambos&Ketter

Caracteristicile geometrice, de material și de încărcare ale cadrului portal propus de Galambos&Ketter (1959) se pot vizualiza în Fig. 5.25. Cadrul a fost studiat, ulterior, de Alvarenga & Silveira (2009b) pentru a determina cea mai defavorabilă configurație privind combinarea efectelor imperfecțiunilor geometrice inițiale locale și globale. În Fig. 5.26 și Fig. 5.27 se pot urmări ipotezele de considerare a efectului imperfecțiunilor geometrice inițiale locale, respectiv globale, rezultând astfel 12 combinații, care se pot vizualiza în Fig. 5.28.

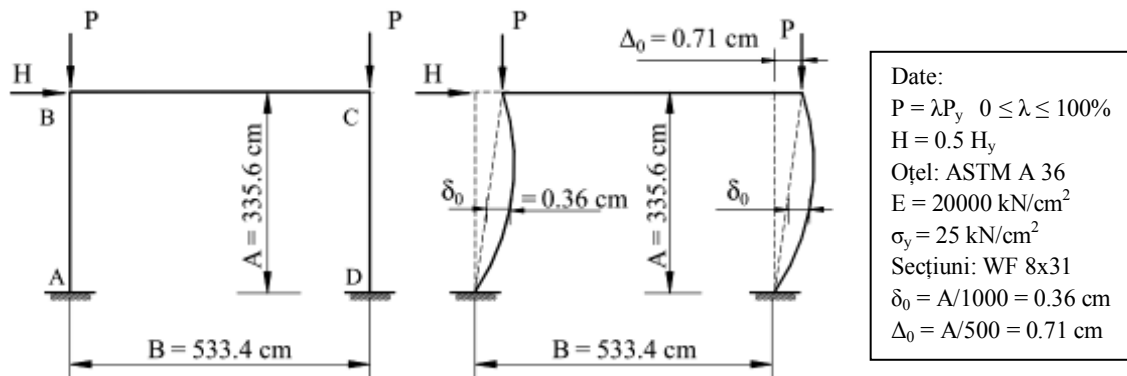


Fig. 5.25 Cadrul portal cu imperfecțiuni Galambos&Ketter (2009b)

Stâlpii sunt încastrați la bază iar conexiunile de prindere în noduri ale elementelor sunt rigide. Se consideră două ipoteze de încărcare, pentru fiecare configurație geometrică cu imperfecțiuni, și anume cu includerea sau nu a forței laterale  $H = 0.5H_y$  și se monitorizează factorul de încărcare corespunzător intrării în curgere a primei secțiuni  $\lambda_y$ , respectiv factorul de încărcare corespunzător producerii colapsului structurii  $\lambda_{col}$ . În cazul considerării forței laterale H în analiză, cadrul este încărcat incremental cu forța H, după care este menținută constantă și sunt aplicate forțele verticale  $P = \lambda P_y$  până la cedarea structurii.

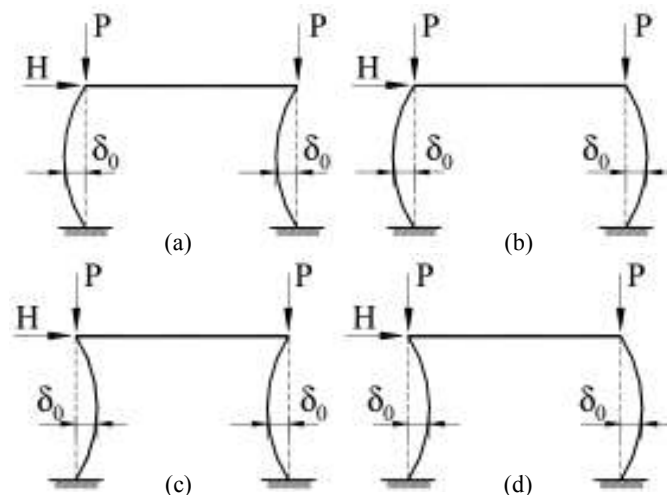


Fig. 5.26 Combinații imperfecțiuni geometrice locale (Alvarenga & Silveira, 2009b)

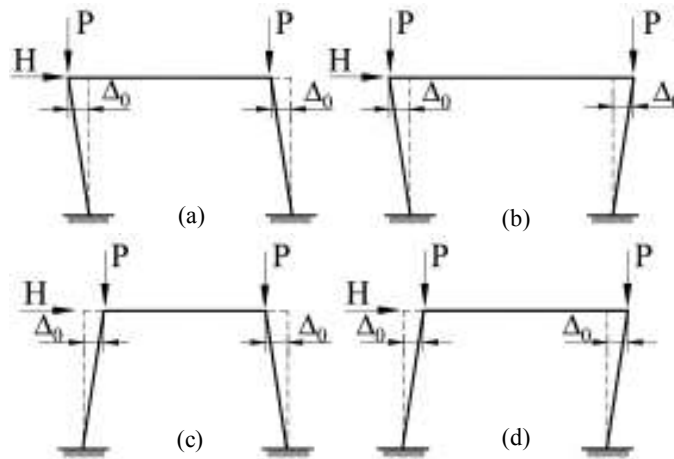


Fig. 5.27 Comparații imperfecțiuni geometrice globale (Alvarenga & Silveira, 2009b)

Compararea rezultatelor s-a făcut cu cele furnizate de Alvarenga & Silveira (2009b) și cu cele obținute cu programul de element finit Abaqus (2011). Alvarenga & Silveira (2009b) includ efectele imperfecțiunilor geometrice inițiale ținând cont de ordinea apariției (locale în urma procesului de fabricație, respectiv globale în urma procesului de asamblare, Fig. 2.8), utilizând o metodă bazată pe dezvoltarea zonelor plastice (2009a).

În programul Abaqus, s-au efectuat analize static neliniare, barele fiind modelate utilizând elemente liniare, iar pentru discretizare s-au folosit elemente finite de tipul B31 cu dimensiunea de 100mm. Neliniaritatea de material a fost considerată la nivel de fibră, utilizând criteriul de curgere von Mises. Imperfecțiunile geometrice au fost incluse în starea neîncărcată a structurii, cu modificarea geometriei inițiale a structurii, considerând amplitudinea maximă la mijlocul elementului, conform precizărilor date de Alvarenga & Silveira (2009b).

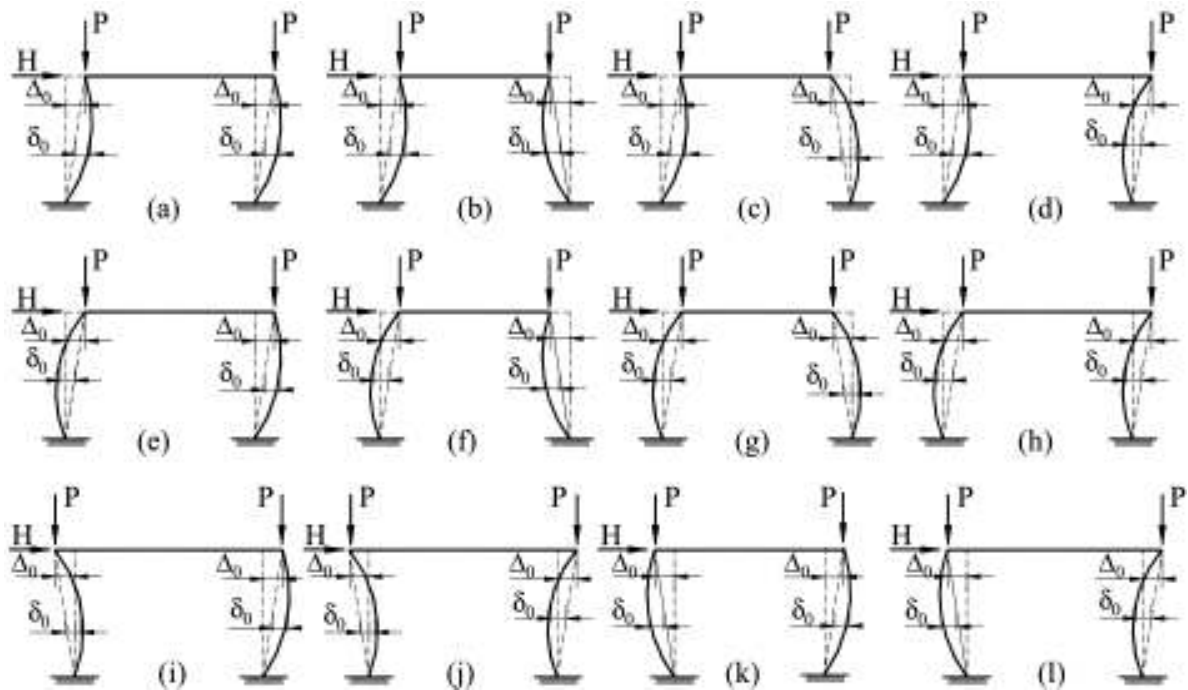


Fig. 5.28 Comparații imperfecțiuni geometrice locale și globale ale cadrului portal (Alvarenga & Silveira, 2009b)

În analizele întreprinse de autor, în EPASS, s-a considerat un singur element/bară iar modelarea comportării elasto-plastice a secțiunilor elementelor s-a făcut în baza conceptului de articulație plastică cu formare instantanee. Imperfecțiunile geometrice inițiale au modelate considerând o formă inițială sinusoidală cu amplitudinea maximă  $\delta_{01}$  (Fig. 5.29) la mijlocul deschiderii. Se precizează că, deși această suprapunere a efectelor nu este recomandată, Fig. 2.8 (Alvarenga & Silveira, 2009b), s-a constatat că pentru o deplasare globală  $\Delta_0 = L/500$ , rotirea  $\delta_{01} = \delta_0 \cos(\Delta_0 / L) = \delta_0 \cos(1/500) \approx \delta_0$ .

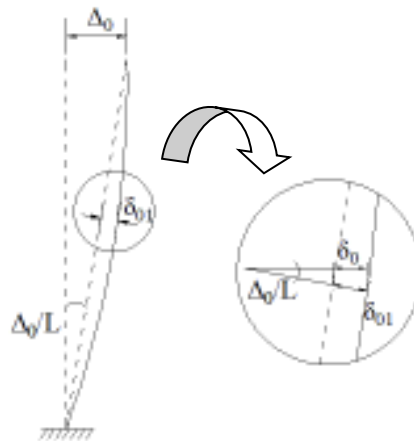


Fig. 5.29 Combinarea efectelor imperfecțiunilor geometrice inițiale locale și globale

Într-o primă fază se studiază configurația cea mai defavorabilă privind combinarea efectelor imperfecțiunilor geometrice inițiale locale și globale, rezultatele fiind centralizate în Tabel 5.3. Pentru ipoteza de încărcare cu  $\beta_H = 0$ , se înregistrează erori relative de până la 2.3% pentru  $\lambda_y$ , respectiv 2.75% pentru  $\lambda_{col}$ , în comparație cu rezultatele obținute în Abaqus; iar 7.9% pentru  $\lambda_y$ , respectiv 6.75% pentru  $\lambda_{col}$  în comparație cu rezultatele furnizate de Alvarenga & Silveira (2009b). Pentru ipoteza de încărcare cu  $\beta_H = 0.5$  se înregistrează erori relative de până la 11.36% pentru  $\lambda_y$ , respectiv 1.67% pentru  $\lambda_{col}$  în comparație cu rezultatele obținute în Abaqus; iar 21.93% pentru  $\lambda_y$ , respectiv 9.4% pentru  $\lambda_{col}$  în comparație cu rezultatele furnizate de Alvarenga & Silveira (2009b). Se constată că diferențele semnificative apar la coeficientul de încărcare corespunzător plastificării primei secțiuni, însă se justifică datorită gradului de precizie prin care se ia în considerare neliniaritatea de material (articulație plastică), față de metodele la care se raportează (Abaqus (2011) și (Alvarenga & Silveira, 2009a)) care modelează comportarea elasto-plastică prin dezvoltarea graduală a zonelor plastice. În Fig. 5.30 se prezintă comparativ curbele încărcare – deplasare laterală pentru configurația cea mai defavorabilă, pentru cele două ipoteze de încărcare,  $\beta_H = 0$  și  $\beta_H = 0.5$ . Se constată o destul de bună concordanță între curbele obținute cu programul EPASS și cele obținute cu programul Abaqus, efortul computațional fiind mult mai mic.



Tabel 5.3 Factor de încărcare pentru cadrul portal considerând diferite combinații ale imperfecțiunilor geometrice inițiale

Ipoteză de încărcare		Imp. locale + Imp. globale					
		EPASS		Abaqus		(Alvarenga & Silveira, 2009b)	
		$\beta_H = 0$	$\beta_H = 0.5$	$\beta_H = 0$	$\beta_H = 0.5$	$\beta_H = 0$	$\beta_H = 0.5$
a	$\lambda_y$	93.2	65.0	91.1	59.3	91.4	55.8
	$\lambda_{col}$	94.1	67.3	93.02	66.2	92.7	64.5
b	$\lambda_y$	96.9	68.4	96.05	61.42	89.8	56.1
	$\lambda_{col}$	99.7	71.0	97.11	70.2	93.4	64.9
c	$\lambda_y$	97.9	68.3	96.8	63.79	97.1	59.2
	$\lambda_{col}$	98.4	70.4	97.36	69.31	97.6	67.5
d	$\lambda_y$	91.9	65.3	90.17	60.02	95.8	59.2
	$\lambda_{col}$	94.2	67.8	93.7	67.00	97.4	68.0
e	$\lambda_y$	91.9	64.1	90.35	58.7	89.5	54.9
	$\lambda_{col}$	94.3	68.0	93.65	66.95	93.5	65.0
f	$\lambda_y$	97.8	70.3	95.93	65.57	97.1	61.5
	$\lambda_{col}$	98.4	71.8	97.21	71.00	97.6	68.5
g	$\lambda_y$	96.9	67.3	95.10	63.1	95.9	58.1
	$\lambda_{col}$	99.7	71.1	97.13	70.13	97.3	68.0
h	$\lambda_y$	94.1	66.8	93.56	61.8	92.4	57.9
	$\lambda_{col}$	94.7	68.5	94.21	67.74	93.8	65.4
i	$\lambda_y$	97.9	68.1	96.58	62.07	97.1	59.0
	$\lambda_{col}$	98.4	70.1	97.34	69.16	97.5	67.4
j	$\lambda_y$	96.9	68.3	96.05	64.4	95.9	59.1
	$\lambda_{col}$	99.8	70.7	97.13	70.04	97.4	67.8
k	$\lambda_y$	96.9	67.1	95.10	61.50	95.8	57.9
	$\lambda_{col}$	99.7	70.9	97.13	69.97	97.3	67.9
l	$\lambda_y$	97.9	70.1	96.97	66.1	97.1	61.3
	$\lambda_{col}$	98.4	71.5	97.34	70.84	97.5	68.3

Observații:

Notății: 1.  $\lambda_y$  - factorul de încărcare corespunzător apariției primei articulații plastice, 2.  $\lambda_{col}$  - factorul de încărcare corespunzător colapsului structurii, 3.  $\beta_H=0.5$  coeficientul de încărcare pentru forța laterală,  $H = \beta_H H_y$  unde  $H_y = 2M_p/L$ ,  $M_p$  fiind momentul plastic iar  $L$  lungimea elementului.

EPASS – articulație plastică

[Abaqus] – zone plastice

(Alvarenga & Silveira, 2009b) – zone plastice

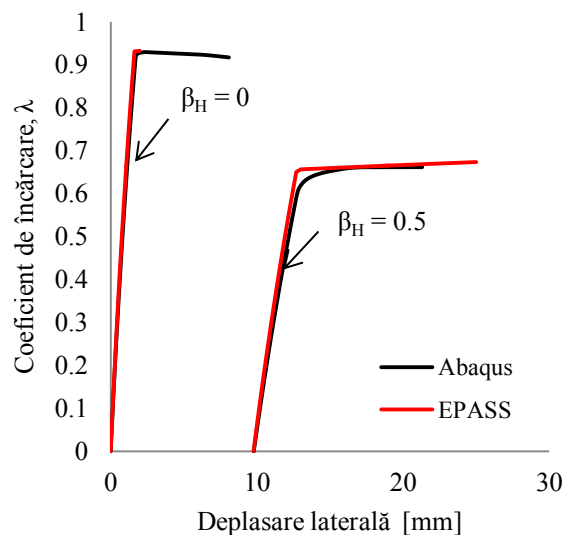


Fig. 5.30 Curbele încărcare deplasare laterală pentru cea mai defavorabilă combinație a efectelor imperfecțiunilor geometrice locale și globale

Tabel 5.4 Factor de încărcare pentru cadrul cu imperfecțiuni inițiale,  $\beta_H = 0$

Caz	Imperfecțiuni geometrice	Fig.	Factor de încărcare [%]	
			$\lambda_y^{(1)}$	$\lambda_{col}^{(2)}$
1	Fără imperfecțiuni		-	100.0 (100.0)
2	Imp. locale	Fig. 5.26 (a)	96.9	99.8
			[95.3] (95.9)	[97.27] (97.3)
3	Imp. globale	Fig. 5.27 (d)	94.4	94.7
			[93.34] (93.1)	[94.21] (94.2)
4	Imp. locale + globale	Fig. 5.28 (a)	93.2	94.3
			[91.58] (91.4)	[93.14] (92.7)

Observații:

Notații: 1.  $\lambda_y$  - factorul de încărcare corespunzător apariției primei articulații plastice, 2.  $\lambda_{col}$  - factorul de încărcare corespunzător colapsului structurii.

EPASS – articulație plastică

[Abaqus] – zone plastice

(Alvarenga & Silveira, 2009b) – zone plastice

De asemenea, se studiază efectul izolat al imperfecțiunilor geometrice locale și globale, respectiv efectul combinat al celor două asupra factorilor de încărcare  $\lambda_y$  și  $\lambda_{col}$ , prin compararea rezultatelor obținute în programul Abaqus și cele furnizate de Alvarenga & Silveira (2009b). Centralizarea datelor se poate vizualiza în Tabel 5.4 pentru ipoteza de încărcare cu  $\beta_H = 0$ , respectiv Tabel 5.5 pentru ipoteza de încărcare cu  $\beta_H = 0.5$ . Se constată o destul de bună concordanță dar cu un efort computațional mult mai mic.

Tabel 5.5 Factor de încărcare pentru cadrul cu imperfecțiuni inițiale,  $\beta_H = 0.5$

Caz	Imperfecțiuni geometrice	Fig.	Factor de încărcare [%]	
			$\lambda_y^{(1)}$	$\lambda_{col}^{(2)}$
1	Fără imperfecțiuni		68.8 [64.44] (60.2)	70.6 [70.51] (68.0)
2	Imp. locale	Fig. 5.26 (b)	70.2 [65.4] (59.1)	71.6 [71.096] (67.4)
3	Imp. globale	Fig. 5.27 (d)	65.5 [60.35] (56.9)	67.7 [67.4889] (65.0)
4	Imp. locale + globale	Fig. 5.28 (a)	65.0 [59.3] (55.8)	67.3 [66.2] (64.5)

Observații:  
 Notății: 1.  $\lambda_y$  - factorul de încărcare corespunzător apariției primei articulații plastice, 2.  $\lambda_{col}$  - factorul de încărcare corespunzător colapsului structurii.  
 EPASS – articulație plastică  
 [Abaqus] – zone plastice  
 (Alvarenga & Silveira, 2009b) – zone plastice

## 5.8 Cadrul portal cu imperfecțiuni geometrice inițiale locale

În Fig. 5.31 sunt prezentate caracteristicile geometrice și de încărcare ale cadrului portal propus de Liu și al. (2014) pentru calibrarea metodelor de analiză elasto-plastică, cu considerarea imperfecțiunilor geometrice inițiale. Conexiunile de prindere ale barelor sunt considerate rigide, iar legăturile stâlpilor cu terenul se realizează prin intermediul unor articulații. Cadrul este supus unor încărcări verticale (gravitaționale) și laterale. Toate elementele se consideră a avea imperfecțiuni geometrice inițiale în formă sinusoidală având o amplitudine maximă egală cu  $L/500$  în sensul aplicării forțelor exterioare. Neliniaritatea de material a fost modelată la nivel de secțiune în baza conceptului de articulație plastică cu formare instantanee, atât în programul EPASS cât și în programul Mastan2. Rezultatele au fost comparate cu cele obținute de Liu și al. (Liu, Liu, & Chan, 2014). Pentru modelarea barelor, Liu și al. (2014), propun un element finit liniar care este capabil să surprindă formarea articulației plastice în lungul elementului, fără a fi necesară divizarea barei. Comportarea articulației plastice este modelată introducând un spring în zonele potențial plastice, a cărui rigiditate scade gradual, pe măsură ce secțiunea se apropie de limita elastică. Matricea de rigiditate tangentă a elementului este dedusă prin derivarea de ordinul al II-lea a energiei potențiale de deformație. Efectul imperfecțiunilor geometrice inițiale este inclus în modelul de analiză considerând o formă sinusoidală cu o amplitudine egală cu  $L/500$ . A doua metodă presupune împărțirea barei în două elemente și modelând imperfecțiunile prin modificarea poziției nodului din câmp în starea inițială a structurii.

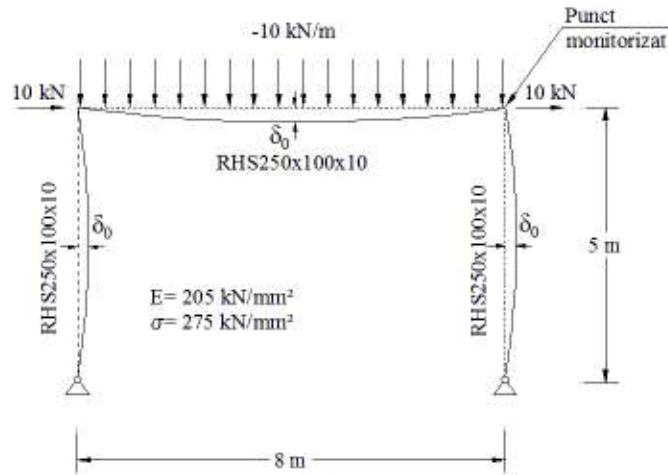


Fig. 5.31 Cadru portal cu imperfecțiuni geometrice inițiale

Autorul a efectuat trei tipuri de analize statice neliniare, una în Mastan2 și două în EPASS, ambele în ipoteza articulațiilor plastice cu formare instantanee. În Mastan2 s-au considerat 2 elemente finite/bară, imperfecțiunile geometrice fiind incluse în analiză prin modificarea poziției nodului din câmp în starea premergătoare încărcării structurii. În EPASS modelarea neliniarității de material s-a considerat la nivel de secțiune utilizând criteriul de plastificare liniar din codul american (AISC, 1999). Includerea imperfecțiunilor geometrice s-a făcut prin două metode: împărțind barele în două segmente și modificând poziția nodului din cuprinsul ei, respectiv utilizând un singur element/bară și introducând efectul imperfecțiunilor ca forțe nodale echivalente corespunzător etapei corector a metodei detaliate în capitolul precedent. Din graficele prezentate în Fig. 5.32 se poate observa o bună concordanță între rezultatele de referință și cele rezultate cu programul EPASS și Mastan2.

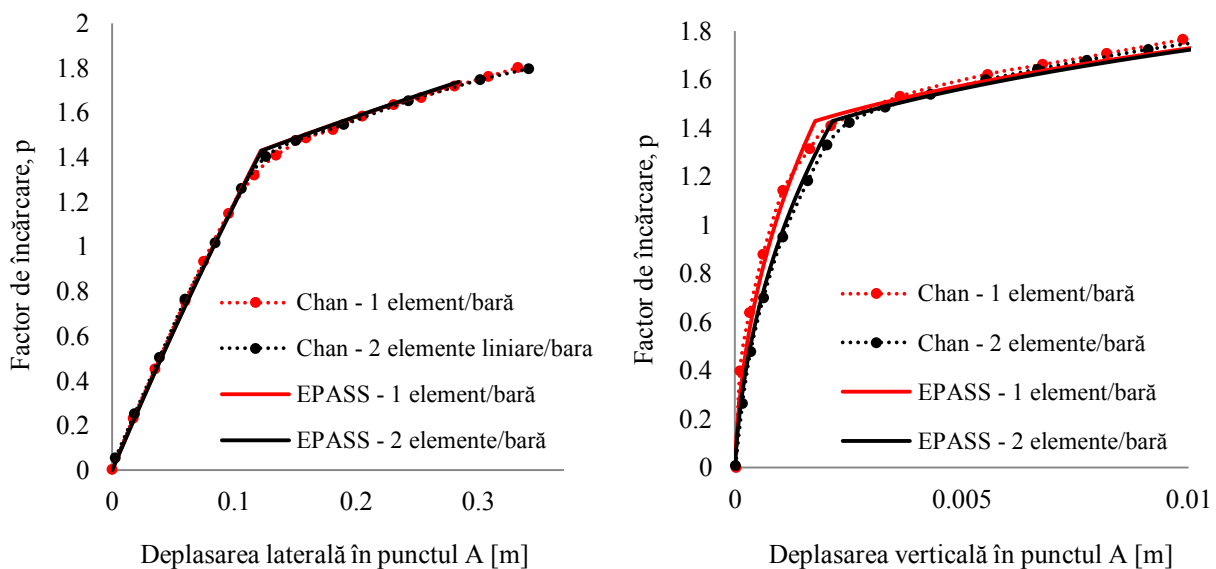


Fig. 5.32 Curbe comparative încărcare – deplasare pentru cadrul portal cu imperfecțiuni

De asemenea, pozițiile și ordinea de formare a articulațiilor plastice sunt prezentate în Fig. 5.33 (a), unde se remarcă o bună concordanță la dispunerea articulațiilor plastice în urma analizelor efectuate în EPASS. Se constată respectarea curbei de interacțiune plastică, odată cu plastificarea capătului doi al stâlpului doi, Fig. 5.33 (b).

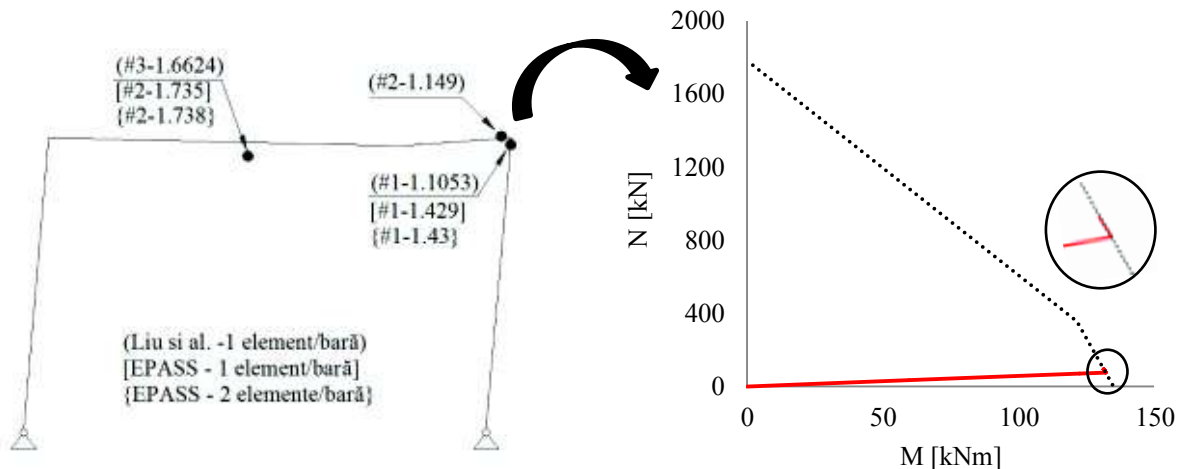


Fig. 5.33 (a) Pozițiile și ordinea de formare a articulațiilor plastice; (b) variația combinației de eforturi în stâlp în nodul monitorizat

## 5.9 Cadrul cu două niveluri Ziemian

Cadrul asimetric cu o deschidere și două niveluri, studiat de Iffland & Birnstiel (1982), a fost prezentat într-un raport asupra stabilității structurilor metalice în AISC (American Institute of Steel Construction). Caracteristicile geometrice, secționale și de material sunt prezentate în Fig. 5.34. Cadrul este supus doar unor forțe gravitaționale uniform distribuite care sunt aplicate incremental până la cedarea structurii. Conexiunile de prindere ale elementelor se consideră rigide iar stâlpii sunt articulați în bază. Efectele imperfecțiunilor geometrice inițiale, al deformațiilor de luncare, precum al tensiunilor reziduale sunt neglijate în analiză.

Cadrul a fost studiat de autor în programele EPASS, respectiv Mastan2. Analiza efectuată în EPASS s-a făcut pe baza conceptului de articulație plastică punctuală cu formare instantanee, secțiunile plastic potențiale fiind în jurul combinațiilor de eforturi maxime. Pentru discretizarea cadrului s-a utilizat un singur element pe bară. În Mastan2, modelarea comportării elasto-plastice a secțiunilor s-a făcut utilizând modulul de elasticitate tangent  $E_t$  iar pentru discretizarea cadrului s-au utilizat 4 elemente pentru grinzi și unul pentru stâlpi. În analiza efectuată cu programul CUSTAND (Ziemian R. , 1992), modelarea neliniarității de material s-a făcut în baza conceptului de articulație plastică punctuală și instantanee. Cadrul a fost modelat considerând 4 elemente pe grindă, respectiv 2 elemente pe stâlp; forțele uniform distribuite fiind transformate în forțe concentrate echivalente în nodurile adiționale generate în lungul grinzilor. În analizele efectuate de Iu & Bradford, plastificarea graduală a secțiunilor este modelată introducând un resort de rotație la capetele elementului, a cărui rigiditate scade în funcție de nivelul de solicitare, conform relațiilor propuse în (Iu & Bradford, 2012). Încărcările uniform distribuite vor fi echivalate cu forțe concentrate aplicate în nodurile generate în urma discretizării elementelor. Pentru modelarea grinzilor s-au utilizat 4 elemente iar pentru modelarea stâlpilor un singur element. Un

dezavantaj al acestei metode este introducerea unor grade de libertate în plus în matricea de rigiditate care, ulterior, va trebui condensată. De asemenea, ambele metode nu sunt capabile să surprindă formarea articulației în lungul elementului, fiind necesară divizarea barelor, ceea ce poate îngreuna procesul de execuție datorită datelor ce trebuie memorate. În NEFCAD modelarea neliniarității fizice s-a făcut la nivel de secțiune, pe baza relațiilor Ramberg-Osgood cu parametrii  $a=1$ ,  $n=600$ . Pentru discretizarea barelor s-a utilizat un singur element iar integrarea numerică în lungul elementelor s-a făcut cu metoda Simpson aplicată pe un număr crescător de intervale până la atingerea criteriului de convergență impus (Chiorean C. G., 2006).

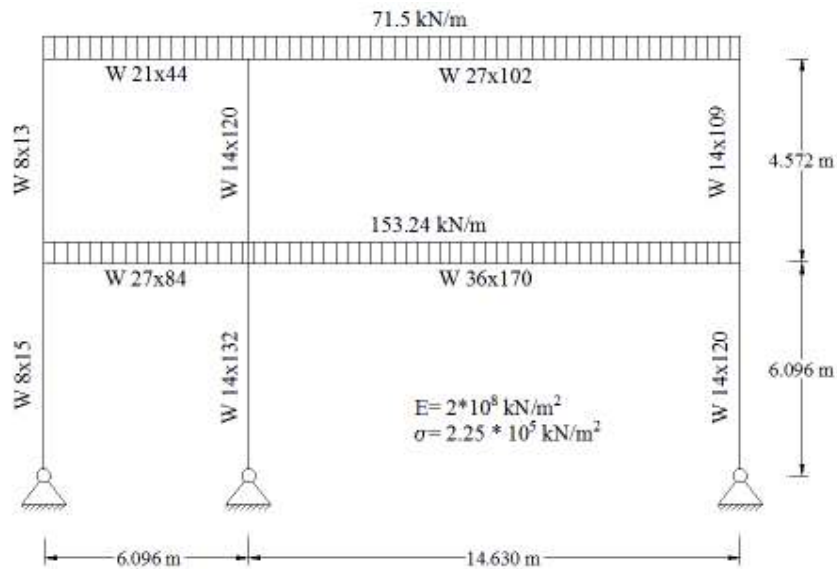


Fig. 5.34 Configurația geometrică și distribuția încărcărilor

Curbele încărcare-deplasare laterală pentru nivelul 1, respectiv nivelul 2 sunt prezentate în Fig. 5.35 și Fig. 5.36. Se constată o bună concordanță între curbele încărcare-deplasare laterală, precum și între factorii limită de încărcare obținuți cu programul EPASS ( $p_{lim}=0,983$ ) și programele CU-STAND ( $p_{lim}=1,11$ ), NEFCAD ( $p_{lim}=1,00$ ), Mastan2 ( $p_{lim}=1,01$ ) sau cel furnizat de Iu & Bradford ( $p_{lim}=0,99$ ). Se remarcă eficiența programului EPASS, care utilizând un singur element pentru discretizarea barelor, fiind capabil să surprindă formarea articulației plastice în lungul elementului, fără necesitatea divizării barei. În Fig. 5.37 sunt prezentate pozițiile și ordinea de formare a articulațiilor plastice, în urma analizelor efectuate, și se poate observa o foarte bună concordanță cu rezultatele din literatura de specialitate. De asemenea, din Fig. 5.38, se constată respectarea curbei de interacțiune plastică, odată ce într-o secțiune transversală o articulație plastică este formată.

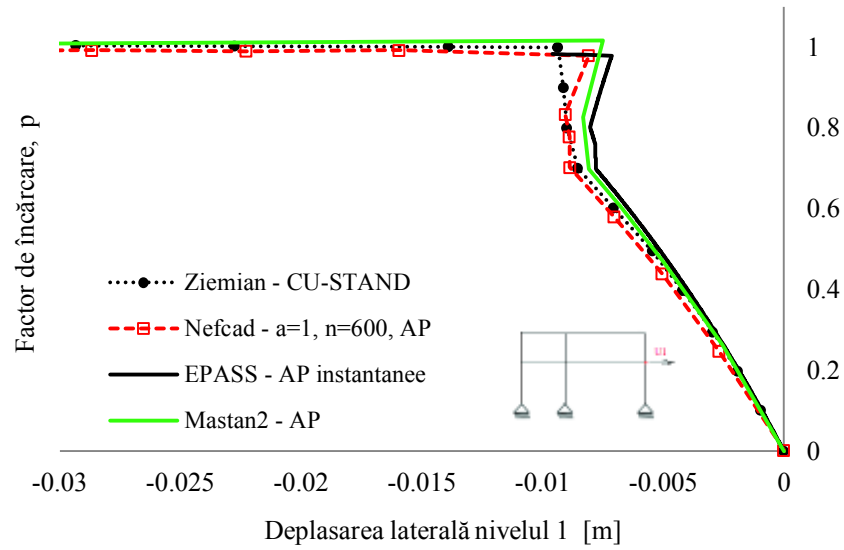


Fig. 5.35 Curba încărcare-deplasare laterală pentru nivelul 1

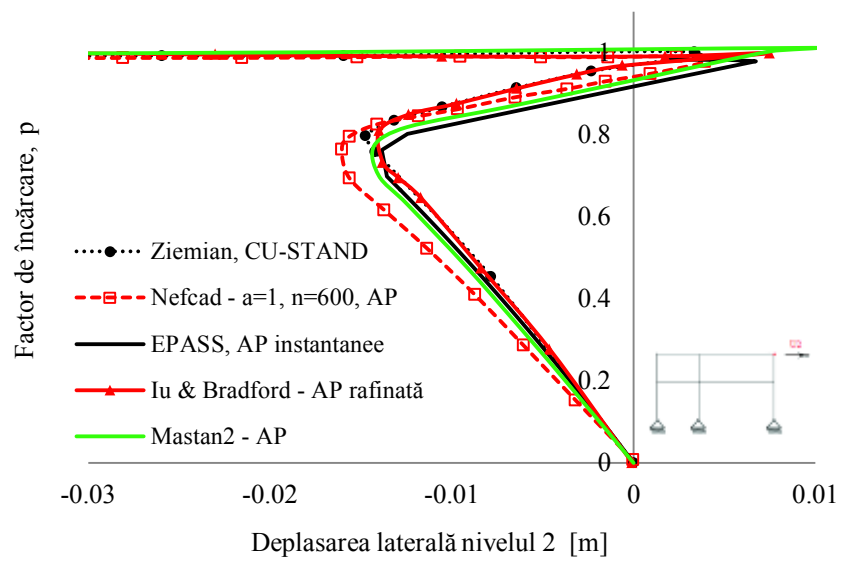


Fig. 5.36 Curba încărcare-deplasare laterală pentru nivelul 2

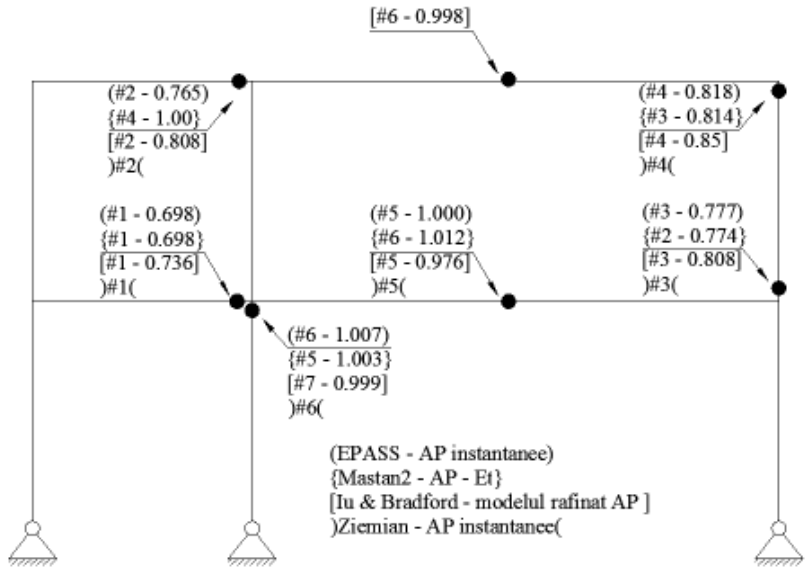


Fig. 5.37 Ordinea aparițiilor articulațiilor plastice.

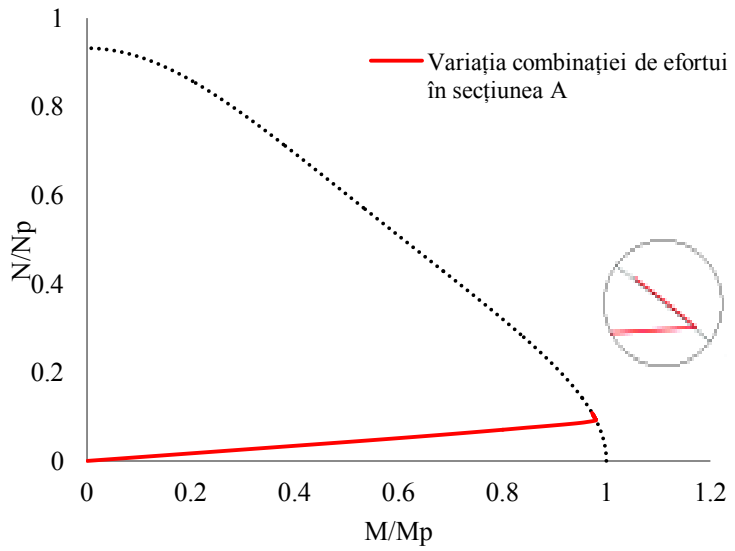


Fig. 5.38 Variația combinației de eforturi în secțiunea A.

### 5.10 Cadrul cu un nivel și două deschideri

Următorul cadru este propus cu scopul de a confirma performanțelor modelului de calcul abordat în surprinderea apariției articulației plastice în cuprinsul barei, fără a fi necesară divizarea elementului în mai multe segmente. Configurația geometrică și de încărcarea a cadrului propus s-a ales astfel încât monitorizarea stării de eforturi într-o secțiune plasticată în cuprinsul elementelor să fie posibilă. În acest scop, se studiază două tipuri de rezemare, și anume: noduri articulate în bază, respectiv încastrate în bază, considerând trei ipoteze de încărcare pentru forța laterală F: egală cu P/5, P/2, respectiv P. Pentru forțe laterale F mai mici decât P/5, s-a observat că apariția primei articulații plastice are loc la capătul 2 al stâlpului 2, iar formarea celei de a doua articulații plastice, la mijocul stâlpului 1, conduce la producerea unui mecanim local iar



monitorizarea stării de eforturi în cuprinsul barei nu mai este posibilă. Din aceste considerente, pentru studiile întreprinse nu s-au considerat forțe laterale  $F$  mai mici decât  $P/5$ .

Caracteristicile geometrice, secționale și de material, precum și încărcările aplicate pe structura propusă sunt prezentate în Fig. 5.39. Prinderile barelor în noduri se consideră rigide, iar încărcările exterioare sunt aplicate incremental proporțional până la cedarea structurii. Efectul imperfecțiunilor inițiale geometrice sau mecanice, precum și al deformațiilor de alunecare transversală, nu sunt luate în considerare.

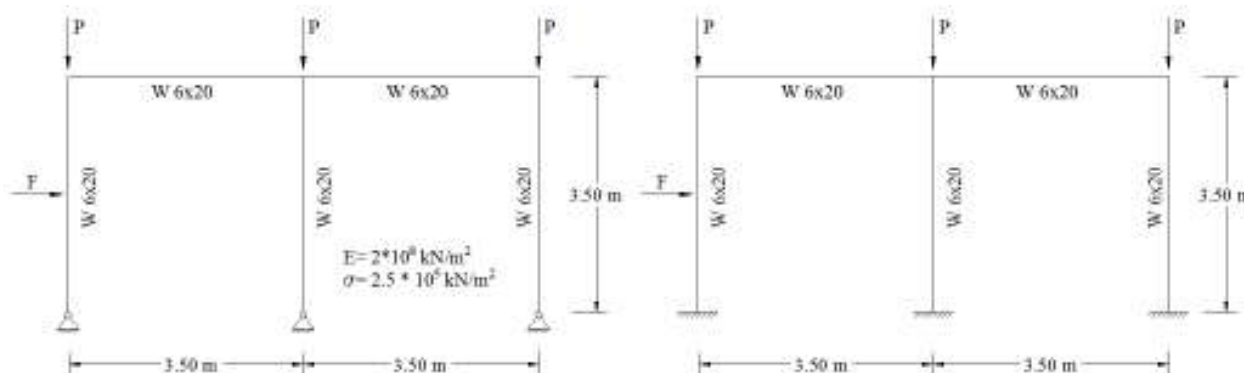


Fig. 5.39 Caracteristicile geometrice, secționale și de încărcare ale cadrului plan cu două deschideri

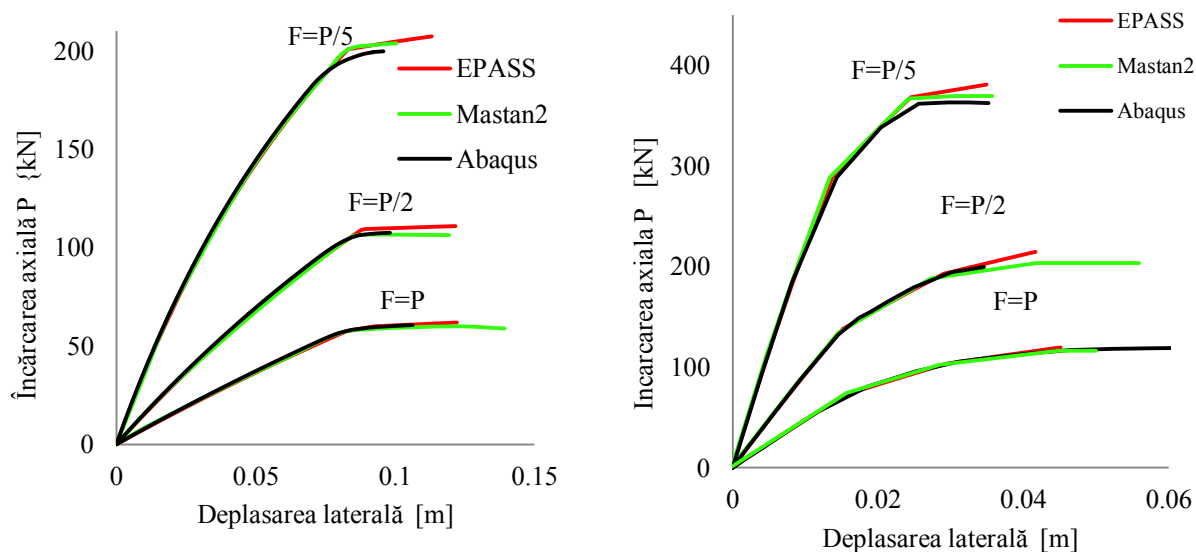


Fig. 5.40 Curbele forță axială  $P$ -deplasare laterală, pentru cele două configurații de rezemare considerate: (a) articulații în bază, (b) încastrări în bază.

Compararea și calibrarea rezultatelor programului EPASS s-a făcut cu rezultatele furnizate de programele Mastan2 (McGuire, Gallagher, & Ziemian, 2000) și Abaqus (Hibbitt, 2011). Modelarea comportării elasto-plastice s-a făcut în ipoteza formării articulației plastice instantanee, utilizând criteriul de plastificare Orbison în analizele efectuate în EPASS și Mastan2, respectiv modelarea neliniarității fizice la nivel de fibră, utilizând criteriul de curgere von Mises, în programul de element finit Abaqus. În programul dezvoltat de autor, EPASS, în toate analizele întreprinse, modelarea structurii s-a făcut considerând un singur element finit/bară. În programul Mastan2, modelarea structurii s-a făcut utilizând elemente liniare. Pentru a putea

surprinde formarea articulației plastice în cuprinsul elementelor, a fost necesară împărțirea stâlpilor în două segmente, grinzile fiind modelate utilizând un singur segment/bară. În programul Abaqus, s-a efectuat o analiză de tip Static General, barele fiind modelate utilizând elemente liniare, iar pentru discretizare s-au folosit elemente finite de tipul B31 cu dimensiunea de 100mm.

În Fig. 5.40 se prezintă comparativ curbele încărcare axială-deplasare laterală în punctul A, pentru cele două configurații de rezemare și cele trei ipoteze de încărcare. Se constată o foarte bună concordanță între curbele obținute cu programul EPASS și cele obținute cu programele Abaqus, respectiv Mastan2.

Pozițiile și ordinea de formare a articulațiilor plastice pentru cadrul plan cu două deschideri, pentru toate cazurile tratate, sunt prezentate în Fig. 5.41. Și în acest caz, se poate observa o foarte bună concordanță între programele EPASS și Mastan2.

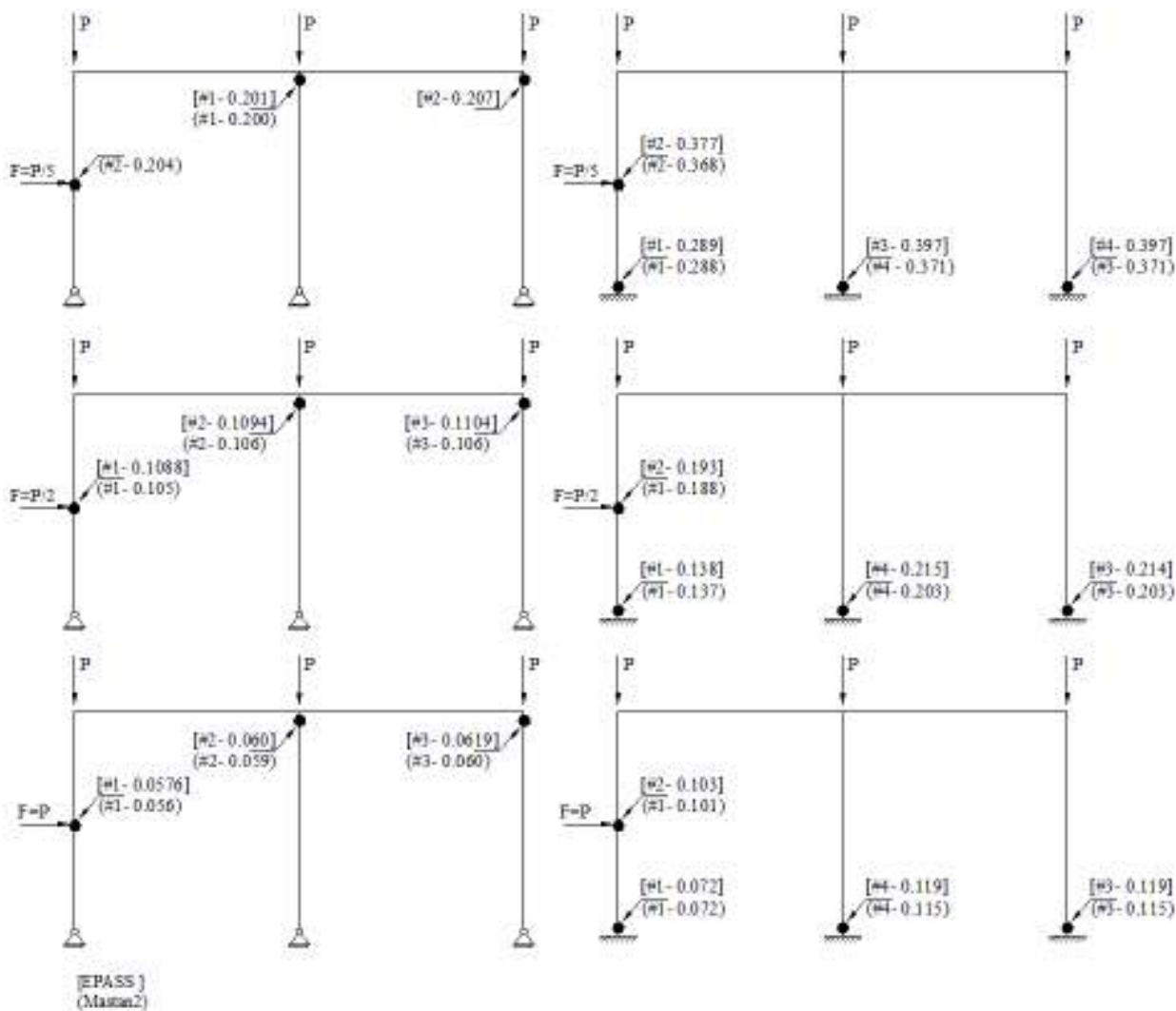


Fig. 5.41 Pozițiile și ordinea de formare a articulațiilor plastice pentru cadrul plan cu două deschideri

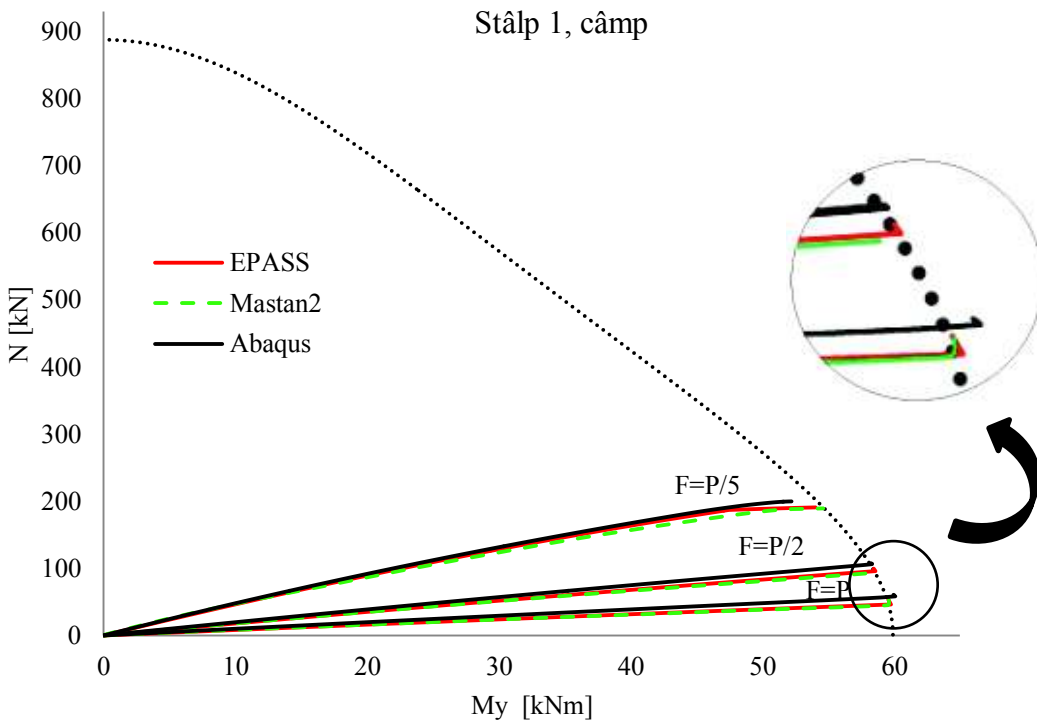


Fig. 5.42 Variația combinației de eforturi în secțiunea de la mijlocul stâlpului 1, pentru cadrul plan articulat în bază.

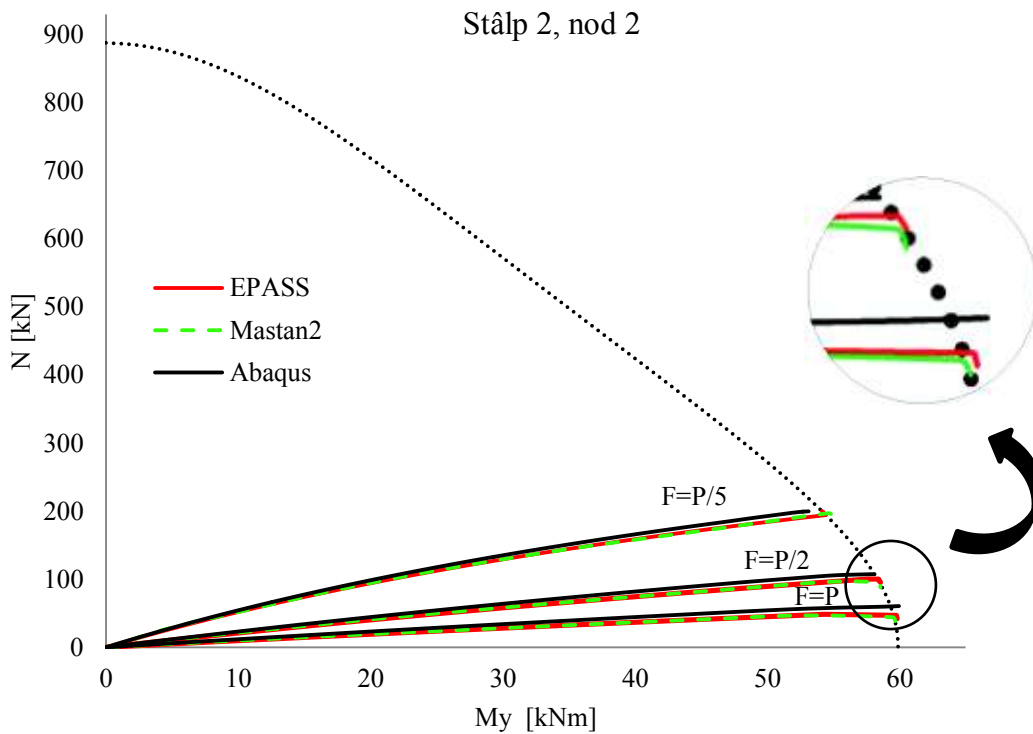


Fig. 5.43 Variația combinației de eforturi în secțiunea de la nodul 2 al stâlpului 2, pentru cadrul plan articulat în bază.

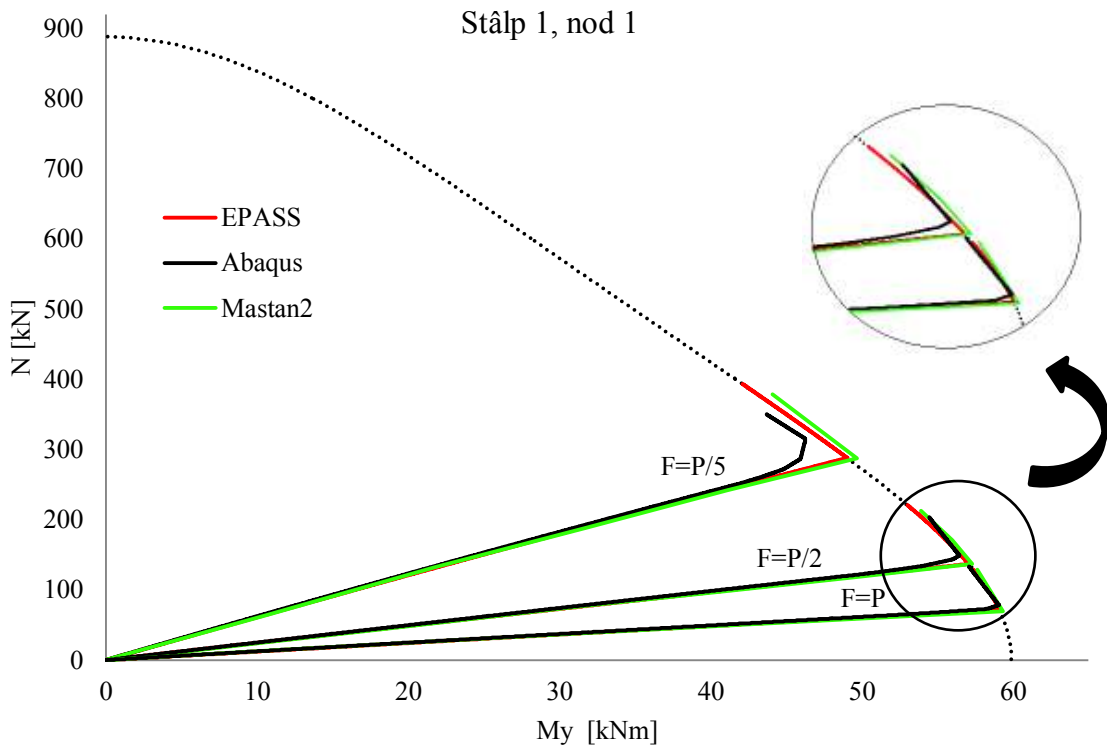


Fig. 5.44 Variația combinației de eforturi în secțiunea de la nodul 1 al stâlpului 1, pentru cadrul plan încastrat în bază.

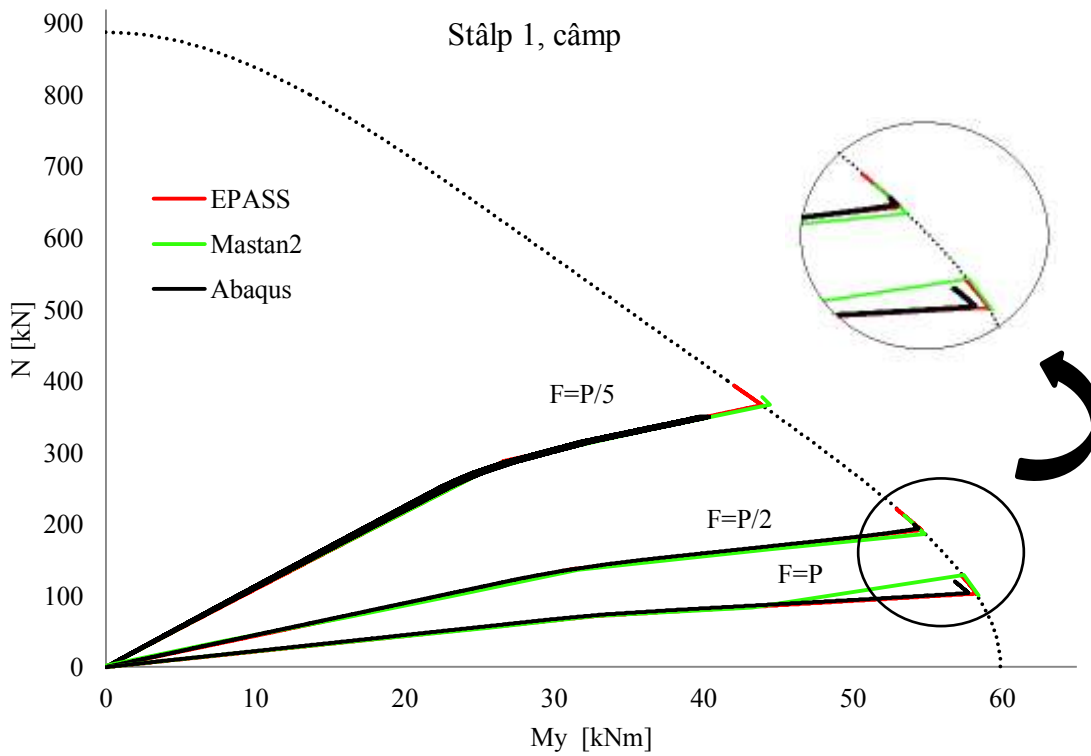


Fig. 5.45 Variația combinației de eforturi în secțiunea de la mijlocul stâlpului 1, pentru cadrul plan încastrat în bază.

În Fig. 5.42 - Fig. 5.45 sunt prezentate variațiile combinației de eforturi (N,M) pentru toate cazurile tratate, în secțiunile în care s-a depășit limita elastică și se constată respectarea curbei de interacțiune plastică după plastificarea integrală a secțiunii. Rezultatele obținute confirmă performanța modelului de calcul în suprinderea formării și monitorizarea funcționării articulației plastice în cuprinsul barei, fără a fi necesară divizarea barei în mai mult segmente.

### 5.11 Cadrul cu două niveluri și o deschidere, Liew

Cadrul plan cu două niveluri și o deschidere a fost propus de Liew (1992), și, ulterior, a fost analizat de diferiți cercetători (Chen, Goto, & Liew, 1996), (Barsan & Chiorean, 1999), (Chiorean C. G., 2006), pentru calibrarea programelor de analiză avansată a cadrelor cu noduri semirigide. În Fig. 5.46 sunt prezentate caracteristicile geometrice și de material. Cadrul este supus unor forțe uniforme distribuite gravitaționale, amplificate cu coeficientul 1.4 și aplicate incremental; iar stâlpii se consideră încastrați la bază. Imperfecțiunile geometrice globale sunt modelate în analiză prin înclinarea stâlpilor cu  $\psi_0 = 1/400$  în configurația geometrică inițială; imperfecțiunile geometrice locale fiind neglijate. Conexiunile de prindere ale grinzilor în noduri considerate sunt: C-3/4 ( $R_i = 107832,2$  kNm/rad,  $M_u = 200,4$  kNm,  $n = 0,8$ ) pentru nivelul 1, respectiv C-1/2 ( $R_i = 23275,59$  kNm/rad,  $M_u = 92,00$  kNm,  $n = 1,57$ ) pentru nivelul 2. Comportarea neliniară a conexiunilor flexibile a fost modelată considerând modelul propus de Liew și al. (1993b). Testarea programului EPASS, s-a făcut prin compararea rezultatelor obținute cu rezultatele programelor NEFCAD.

În programul NEFCAD, modelarea cadrului s-a făcut considerând un singur element pe bară iar încărcările gravitaționale au fost aplicate incremental uniform distribuite. Modelarea comportării elasto-plastice ale secțiunilor s-a făcut prin includerea modulului de rigiditate la încovoiere  $EI_t$  și a modulului de rigiditate axial  $EA_t$ , conform relațiilor prezentate în (Chiorean C. G., 2006). Mărimea tensiunilor reziduale considerate este  $\sigma_r = 0.333\sigma_y$ . În programul PHINGE (Liew J. Y., 1992) neliniaritatea de material este inclusă în modelul de analiză pe baza unor relații analitice, deduse prin calibrare, și care surprind plastificarea graduală, până la plastificarea integrală a unei secțiuni transversale. De asemenea, pentru a surprinde plastificarea distribuită în lungul elementului, modulul de elasticitate tangent  $E_t$ , conform CRC, este inclus în matricea de rigiditate. Cadrul a fost modelat considerând 4 elemente pe grindă iar forțele uniforme distribuite au fost transformate în forțe concentrate echivalente în nodurile adiționale generate în lungul grinzilor. În EPASS, barele au fost modelate utilizând un singur element/bară iar plastificare graduală a secțiunilor a fost luată în considerare prin modulul de elasticitate tangent  $E_t$ , conform relațiilor propuse de (Zubydan, 2010) și detaliate în Subcap. 2.4.1.2. Încărcările gravitaționale au fost aplicate incremental uniform distribuite. Pentru a lua în considerare efectul neliniarității geometrice locale, matricea de rigiditate se corectează prin intermediul funcțiilor de stabilitate, conform Subcap.4.2.3, care vor fi actualizate la fiecare pas de încărcare ținând cont de coeficientul de compresiune. Efectul neliniarității geometrice globale este inclus în modelul de analiză prin reactualizarea la fiecare pas incremental a coordonatelor geometrice ale nodurilor și lungimile elementelor. În figurile Fig. 5.48 și Fig. 5.49 se pot vizualiza curbele încărcare-deplasare laterală iar în Fig. 5.47 sunt prezentate diagramele de momente încovoietoare corespunzătoare conexiunilor considerate, la valoarea 1.0 a factorului de încărcare. Se poate

observa o bună concordanță între rezultatele obținute cu programul EPASS și cele furnizate de programele NEFCAD, respectiv PHINGE. Pozițiile și ordinea de formare a articulațiilor plastice, obținute cu programul EPASS, NEFCAD și PHINGE este prezentată în Fig. 5.47.

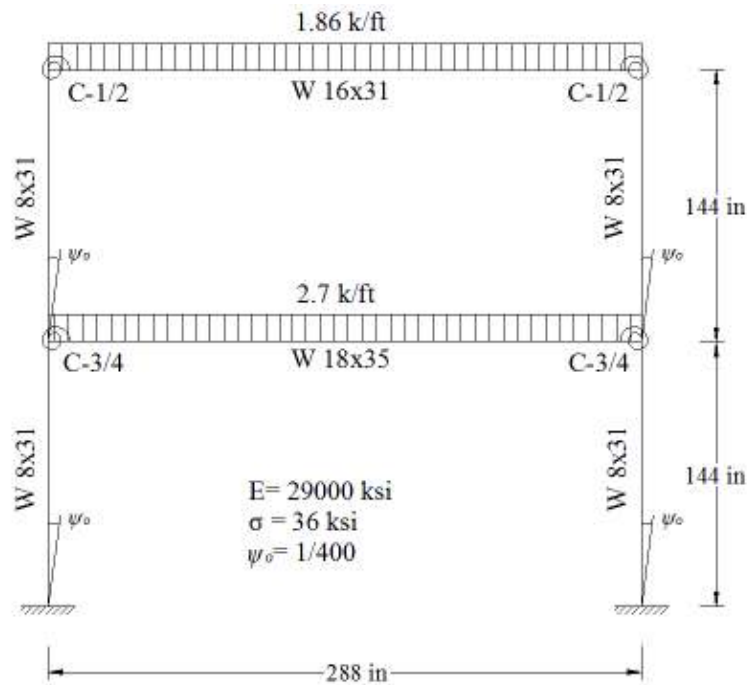


Fig. 5.46 Cadrul Liew cu noduri semirigide

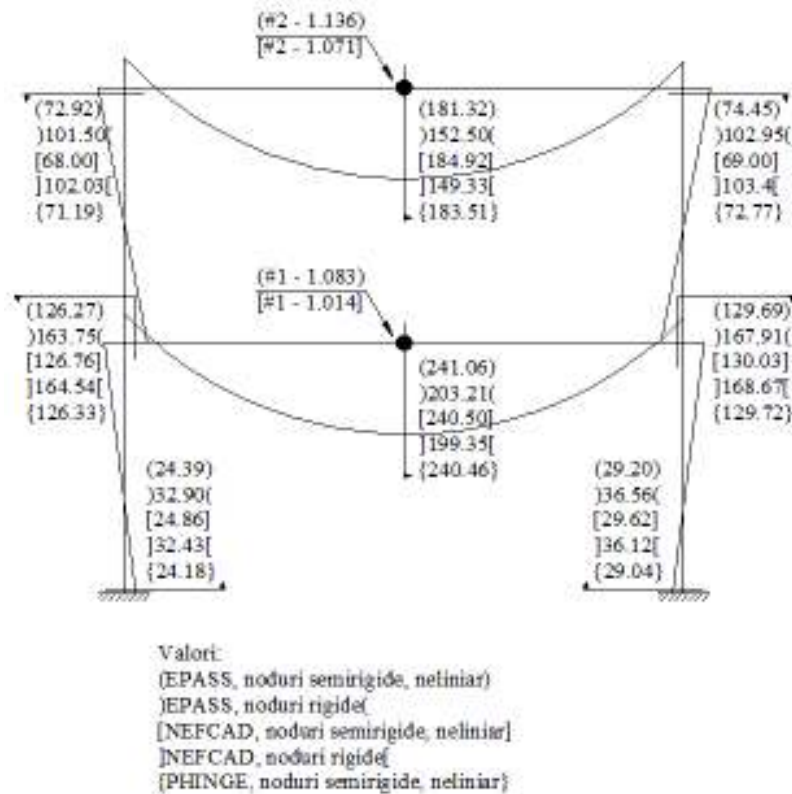


Fig. 5.47 Diagrama de momente încovoietoare la factorul de încărcare 1,0 (1.4x Încărcarea gravitațională)

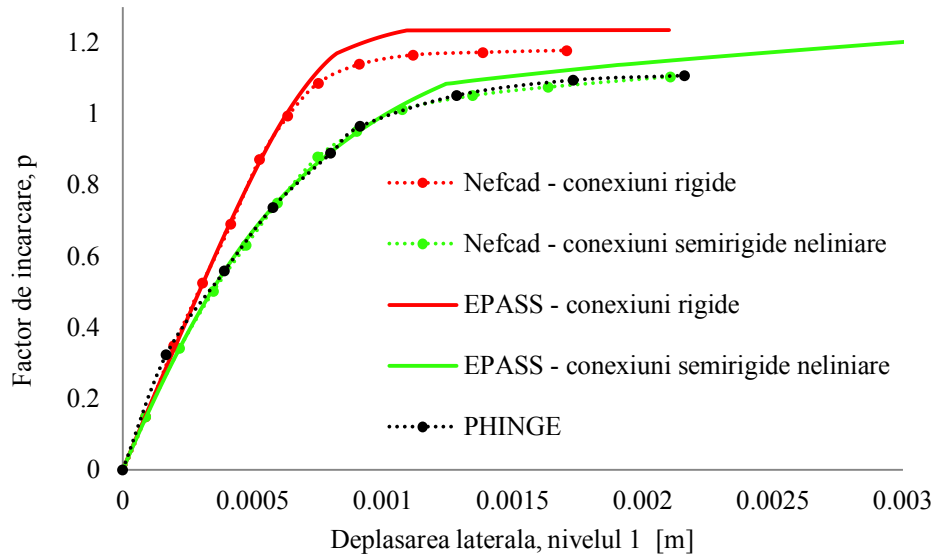


Fig. 5.48 Curba încărcare-deplasare laterală pentru nivelul 1

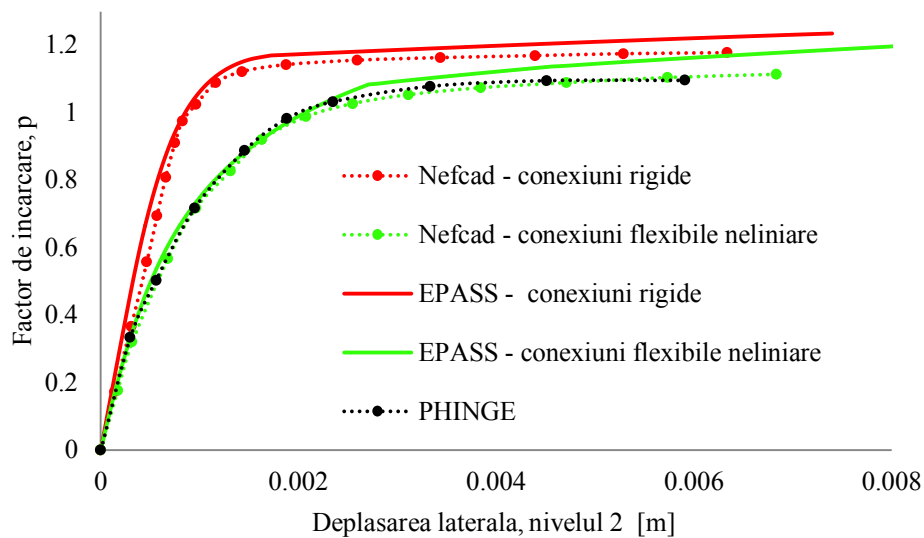


Fig. 5.49 Curba încărcare-deplasare laterală pentru nivelul 2

## 5.12 Cadrul cu șase niveluri Vogel

Unul dintre cele mai importante cadre de calibrare este structura cu șase niveluri propusă de Vogel (1985). Acest cadru este cunoscut ca fiind unul dintre cele mai sensibile la efectele combinate ale neliniarității fizice și geometrice și a fost studiat de numeroși cercetători (Vogel, 1985), (Ziemian R. , 1992), (Chen W. , 1993), (Chen & Kim, 1997), (Chan & Chui, 1997), (Avery, 1998), (Barsan & Chiorean, Influence of residual stress on the carrying-capacity of steel framed structures. Numerical investigation, 1999), (Avery & Mahendran, 2000), (Avery & Mahendran, 2000), (Li & Li, Advanced Analysis and Design of Steel Frames, 2007), (Kim & Choi, 2005), (Iu & Bradford, 2012) și alții, în vederea testării performanțelor programelor de analiză elasto-plastică de ordinul al II-lea. În Fig. 5.50 sunt prezentate caracteristicile

geometrice și de încărcare ale structurii analizate. Conexiunile de prindere ale barelor sunt considerate rigide, iar stâlpii sunt încastrați în bază. Cadrul este supus acțiunii combinate a încărcărilor gravitaționale uniforme distribuite pe grinzi și forțelor laterale care acționează concentrat la nivelul fiecărui etaj., conform Fig. 5.50. Cadrul se consideră a avea imperfecțiuni geometrice globale cu o înclinare a stâlpilor cu  $\psi_0 = 1/450$ , imperfecțiunile geometrice locale fiind neglijate. Imperfecțiunile geometrice globale au fost modelate în mod direct prin modificarea pozițiilor geometrice ale nodurilor în starea inițială.

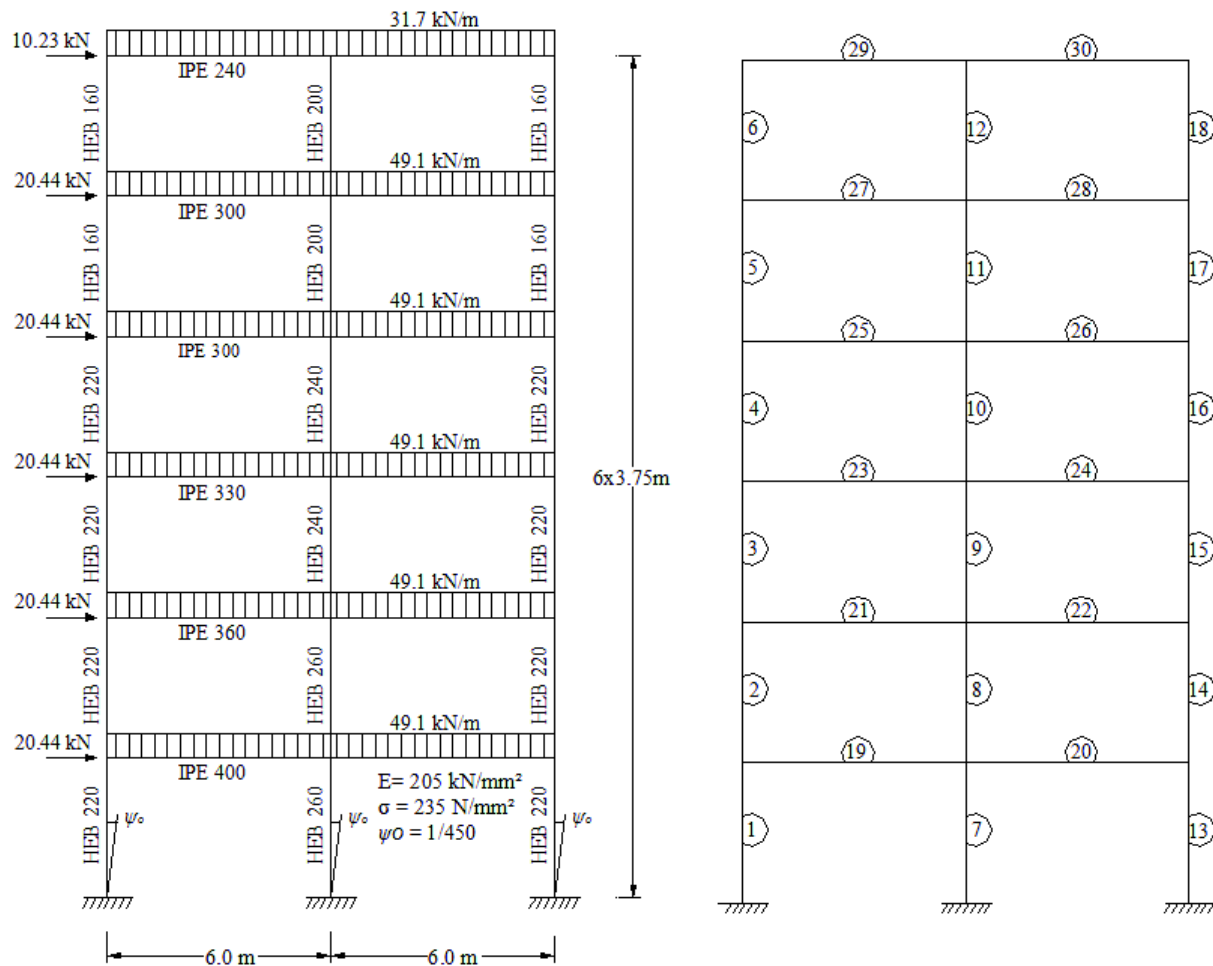


Fig. 5.50 Cadrul cu șase niveluri. Configurația geometrică și distribuția încărcărilor

În analizele efectuate cu programul EPASS, comportarea elasto-plastică s-a considerat în 2 ipoteze: conceptul formării articulației plastice instantanee, neglijându-se efectul tensiunilor reziduale ( $p_{lim}=1.13$ ) și dezvoltarea zonelor plastice neglijându-se efectul tensiunilor reziduale ( $p_{lim}=1.118$ ) sau considerând efectul tensiunilor reziduale conform ECCS ( $p_{lim}=1.111$ ). Barele au fost modelate utilizând un singur element/bară iar simularea dezvoltării zonelor plastice a fost luată în considerare prin degradarea rigidității barelor utilizând modulul de elasticitate tangent  $E_t$ , conform relațiilor lui Zubydan (2010). Curbele comparative încărcare-deplasare laterală pentru cele trei tipuri de analiză efectuate cu programul EPASS se pot vizualiza în Fig. 5.53. De asemenea, rezultatele analizelor au fost comparate cu altele din literatura de specialitate, figurile Fig. 5.51 și Fig. 5.52. În programul NEFCAD comportarea elasto-plastică a secțiunilor a fost



modelată utilizând relațiile Ramberg-Osgood cu următorii parametri  $a=1$ ,  $n=600$  ( $p_{lim}=1.14$ ), iar în programul CU-STAND (Ziemian R. , 1992) neliniaritatea de material a fost modelată în baza ipotezii formării articulațiilor plastice ( $p_{lim}=1.13$ ). În analizele efectuate de Vogel (1985) neliniaritatea de material a fost luată în considerare la nivel de fibră ( $p_{lim}=1.111$ ). De asemenea, diagramele de momente încovoietoare și eforturi axiale sunt date în Fig. 5.60. Se poate observa o foarte bună corelare între rezultatele analizelor efectuate cu programul EPASS și cele din literatură.

Un aspect care trebuie menționat este faptul că, la toate analizele efectuate, s-a folosit un singur element pentru discretizarea barelor. În acest context, metoda abordată permite surprinderea articulației în câmp fără a fi necesară divizarea barei. În Fig. 5.59 se pot observa pozițiile și ordinea de formarea a articulațiilor plastice pentru modelul articulațiilor plastice cu formare instantanee. Un alt aspect foarte important care se poate remarca în Fig. 5.54 este faptul că, după formarea articulației plastice într-o secțiune transversală, variația combinației de eforturi respectă curba de interacțiune plastică.

Variația modului de elasticitate în funcție de momentul încovoietor adimensional se poate urmări în Fig. 5.55 - Fig. 5.58 pentru modelul cu neglijarea, respectiv considerarea efectului tensiunilor reziduale. Și în acest caz se remarcă respectarea curbei de interacțiune plastică, odată ce într-o secțiune transversală este formată o articulație plastică. De asemenea, distribuția procentuală a secțiunilor plastificate se poate vizualiza în Fig. 5.59 și se constată o bună concordanță cu rezultatele din literatura de specialitate.

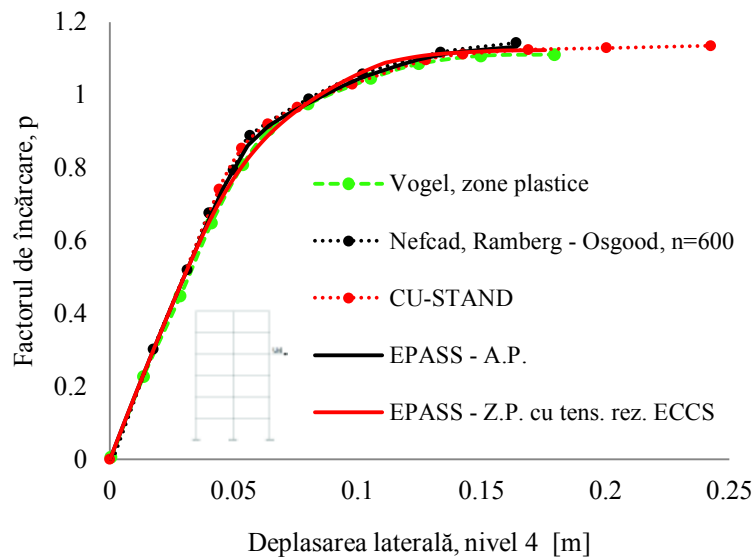


Fig. 5.51 Curba încărcare-deplasare laterală pentru nivelul 4.

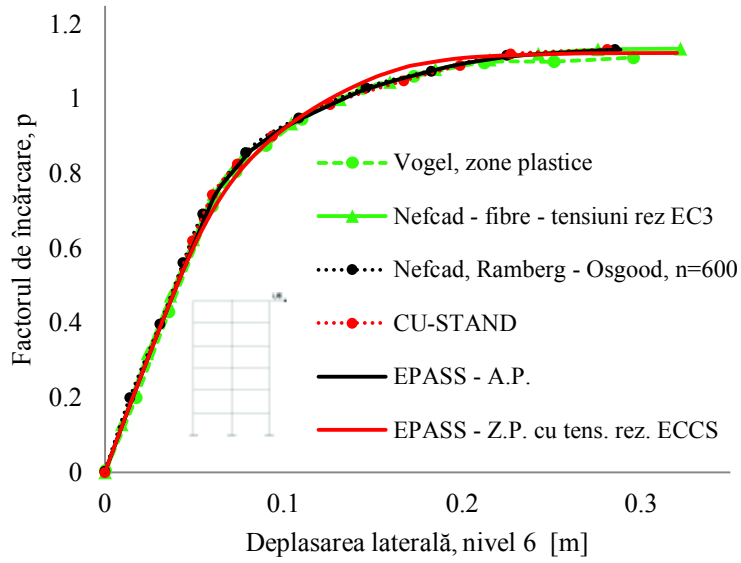


Fig. 5.52 Curba încărcare-deplasare laterală pentru nivelul 6.

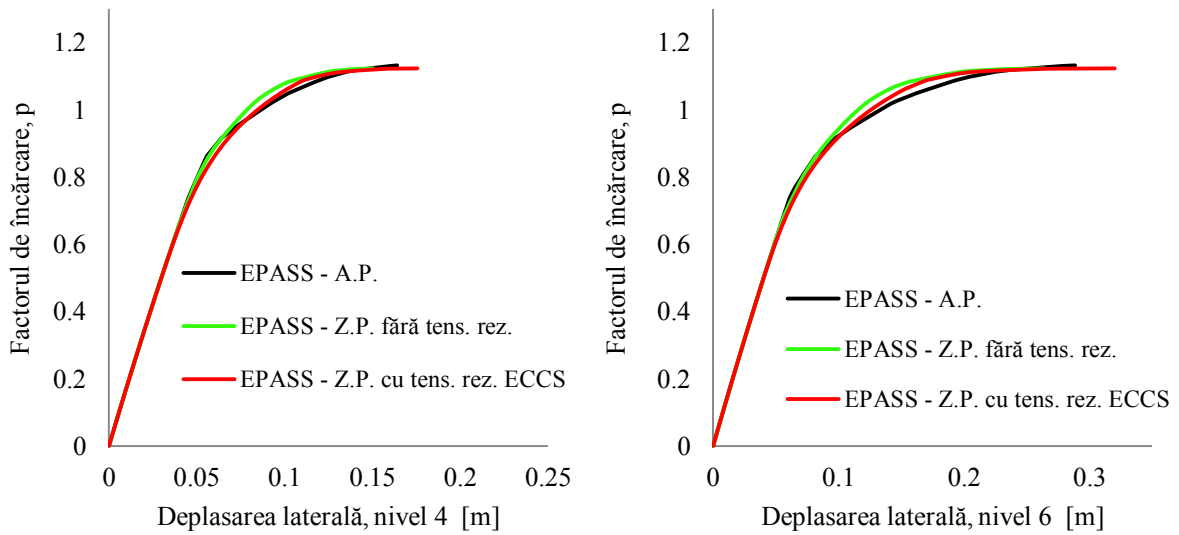


Fig. 5.53 Curba comparative încărcare-deplasare laterală pentru nivelurile 4 și 6.

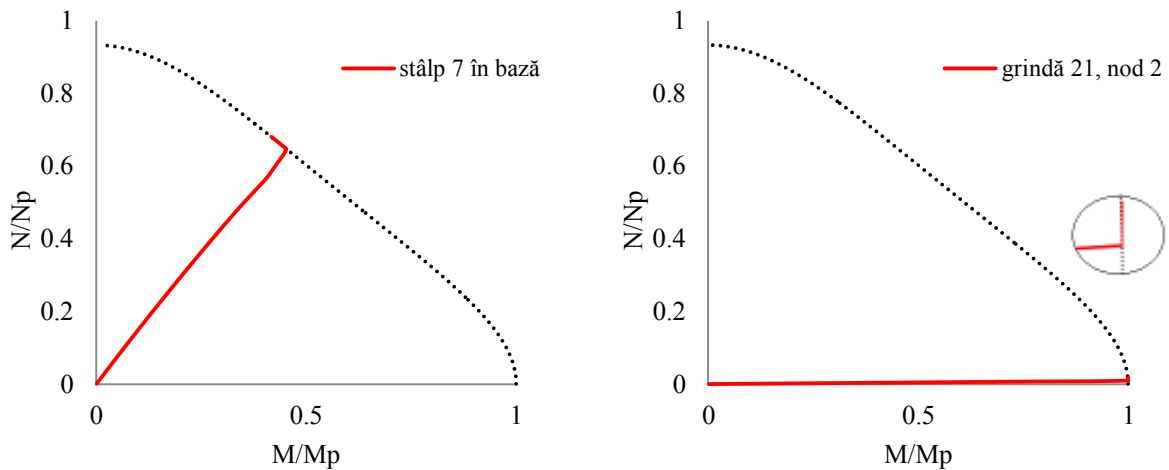


Fig. 5.54 Variația combinației de eforturi în secțiunile plastificate

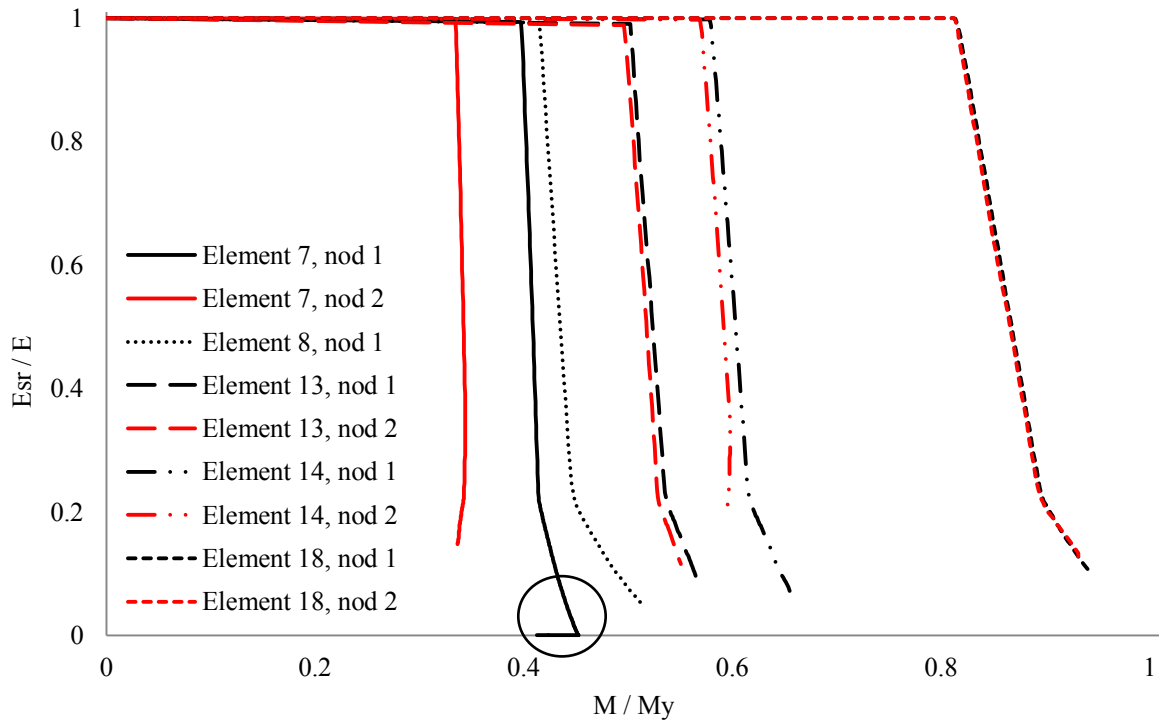


Fig. 5.55 Variația modului de elasticitate în funcție de momentul încovoietor adimensional fără considerarea tensiunilor reziduale; pentru stâlpi.

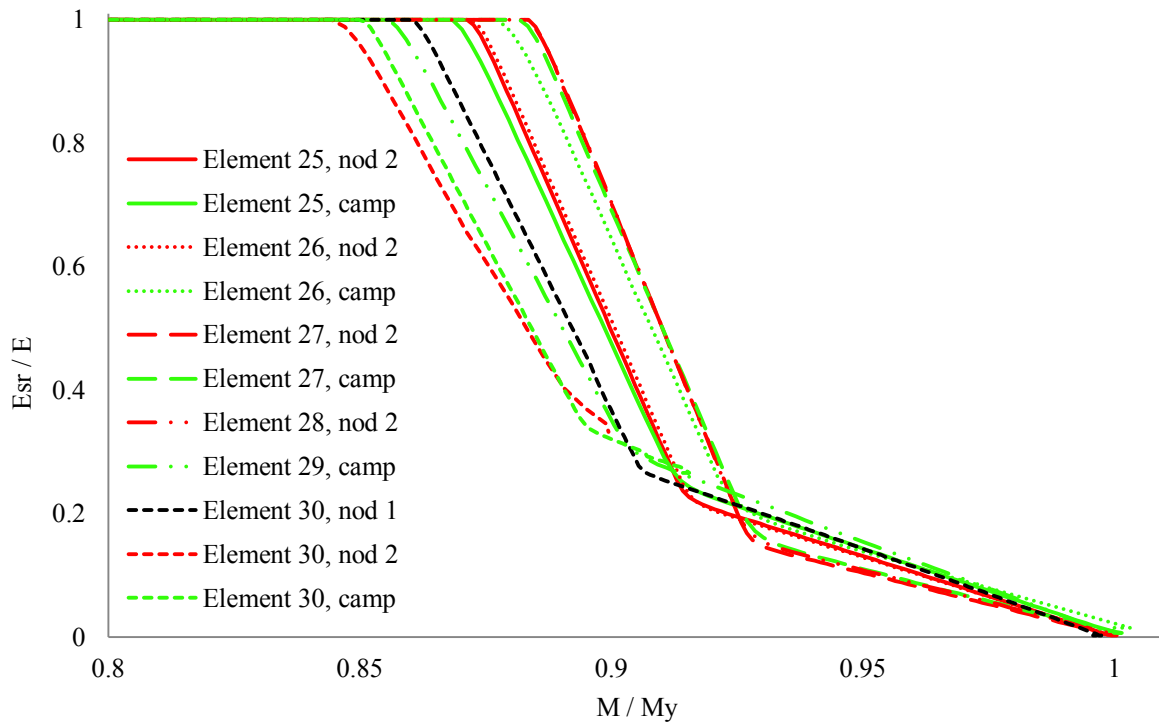


Fig. 5.56 Variația modului de elasticitate în funcție de momentul încovoietor adimensional fără considerarea tensiunilor reziduale; pentru grinzi.

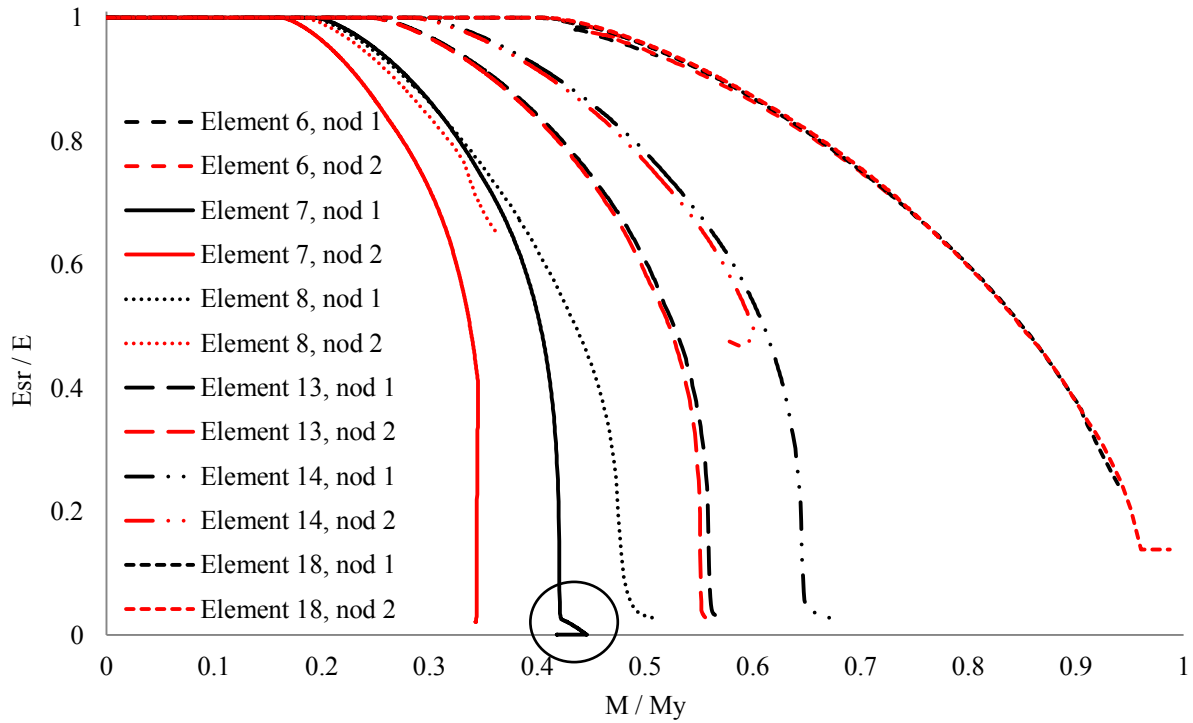


Fig. 5.57 Variația modului de elasticitate în funcție de momentul încovoiator adimensional cu considerarea tensiunilor reziduale conform ECCS; pentru stâlpi.

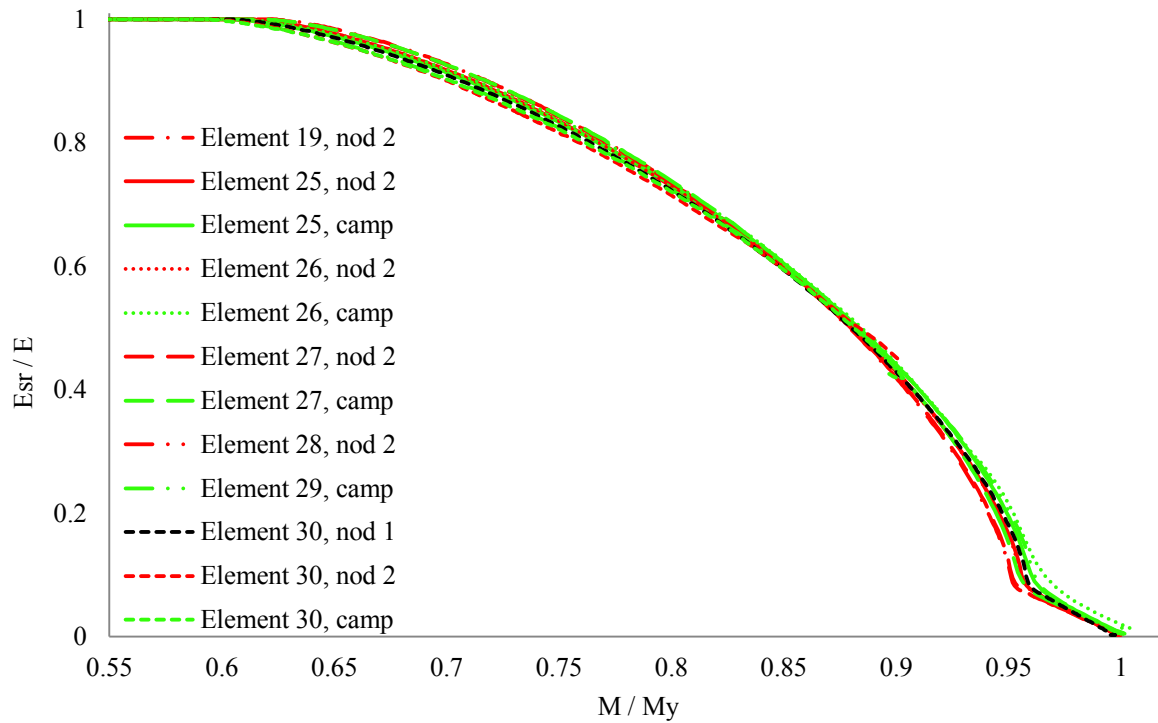
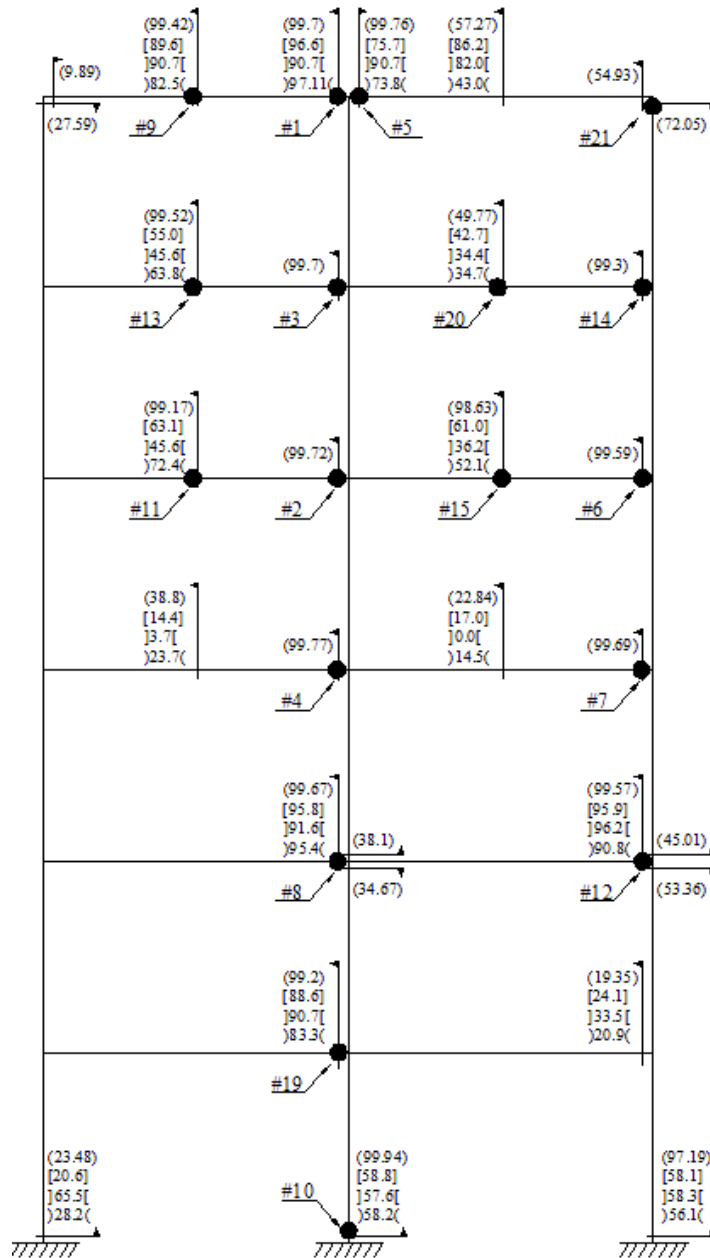


Fig. 5.58 Variația modului de elasticitate în funcție de momentul încovoiator adimensional cu considerarea tensiunilor reziduale conform ECCS; pentru grinzi.

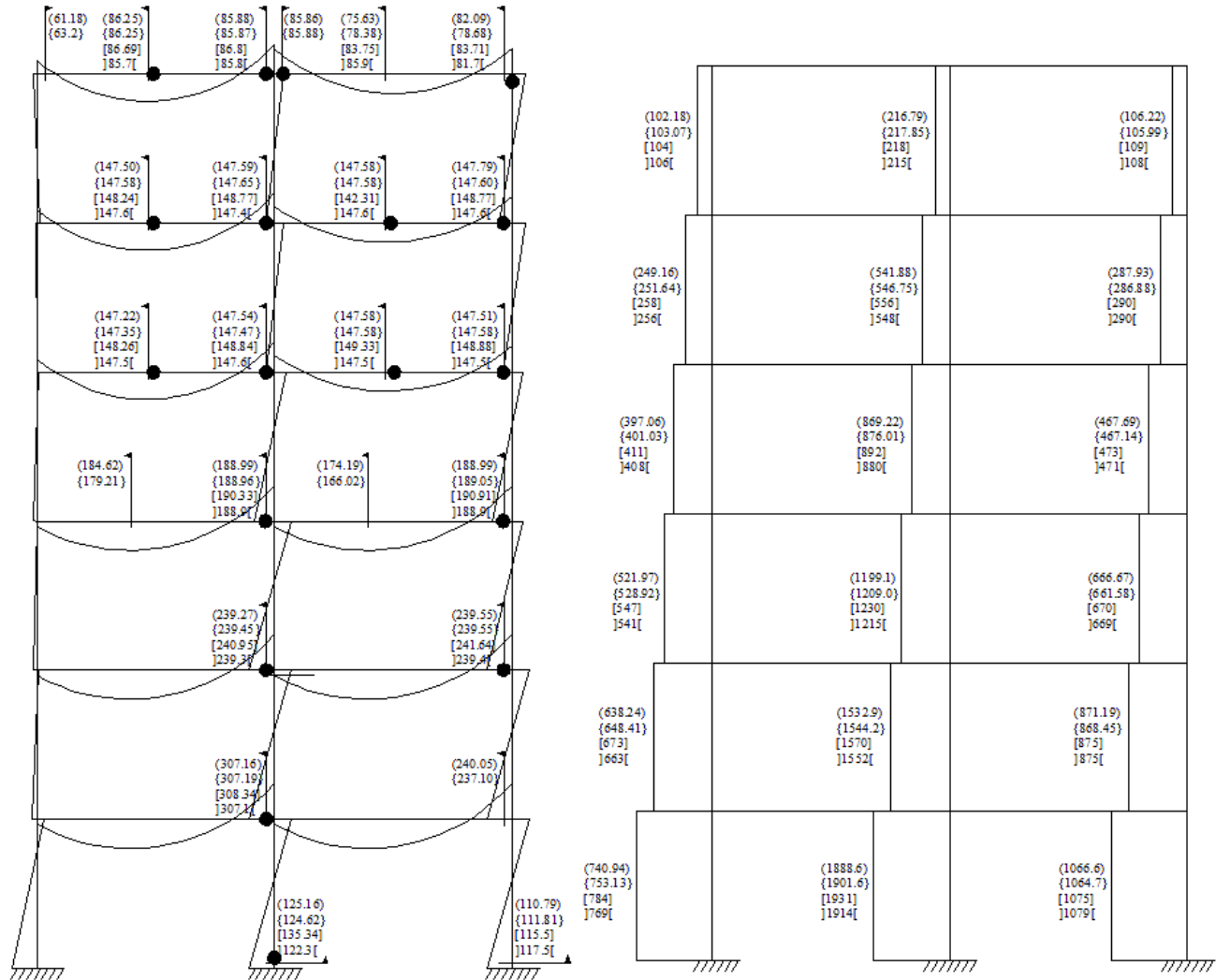


(EPASS - AP graduală - tensiuni reziduale ECCS)  
 [NEFCAD - fibre - tensiuni reziduale EC3 ]  
 ]CU-SP2D - zone plastice [  
 )Vogel - zone plastice (

Fig. 5.59 Distribuția procentuală a secțiunilor plastificate.

Pentru testarea și calibrarea programului EPASS, s-a studiat și efectele comportării conexiunilor semirigide ale grinzilor, tipurile de conexiuni considerate sunt C5/8 și au următoarele caracteristici (Liew & Chen, 1994):  $R_i = 47716.17 \text{ kNm/rad}$ ,  $M_u = 134.063 \text{ kNm}$ ,  $n = 0.8$ . S-au efectuat două analize, cu considerarea conexiunilor flexibile cu comportare liniară, respectiv neliniară (modelul celor trei parametri). Curbele comparative încărcare-deplasare laterală, pentru nivelurile 4 și 6 sunt prezentate în figurile Fig.

5.61 și Fig. 5.62. Rezultatele obținute sunt comparate cu rezultatele furnizate de programul NEFCAD (Chiorean C. G., 2006) și se constată o bună concordanță între curbele încărcare-deplasare laterală.



(EPASS - AP graduală - tensiuni reziduale ECCS)  
 {EPASS - AP graduală - fara tensiuni reziduale}  
 [NEFCAD - Ramberg Osgood, n = 600 ]  
 ]CU-STAND - zone plastice [

Fig. 5.60 Diagramele de momente încovoietoare și eforturi axiale.

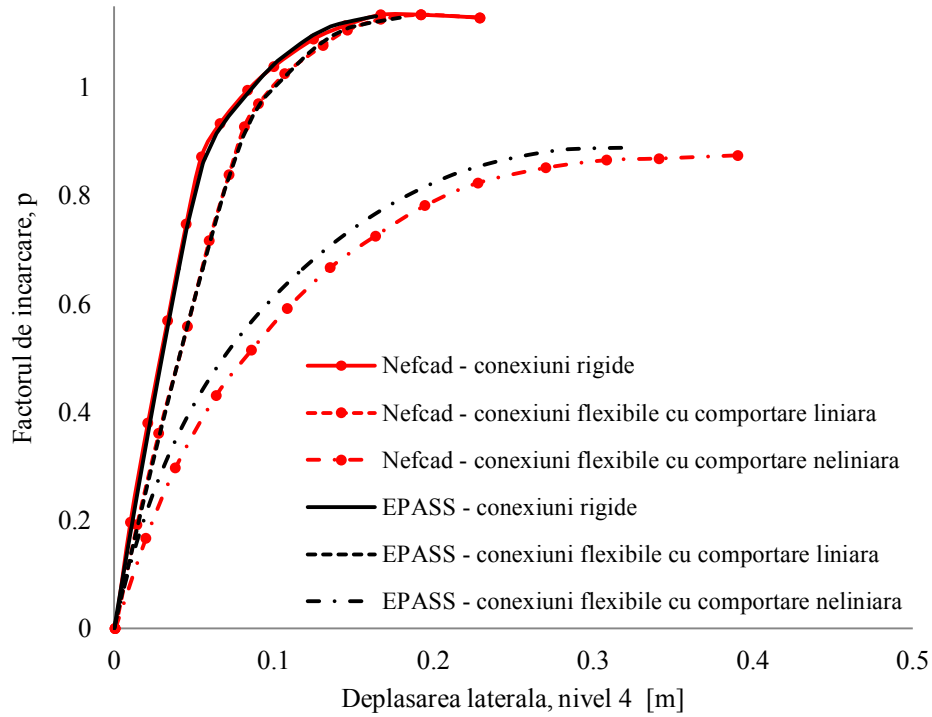


Fig. 5.61 Efectul conexiunilor semi-rigide asupra curbelor de comportare încărcare-deplasare laterală pentru nivelul 4

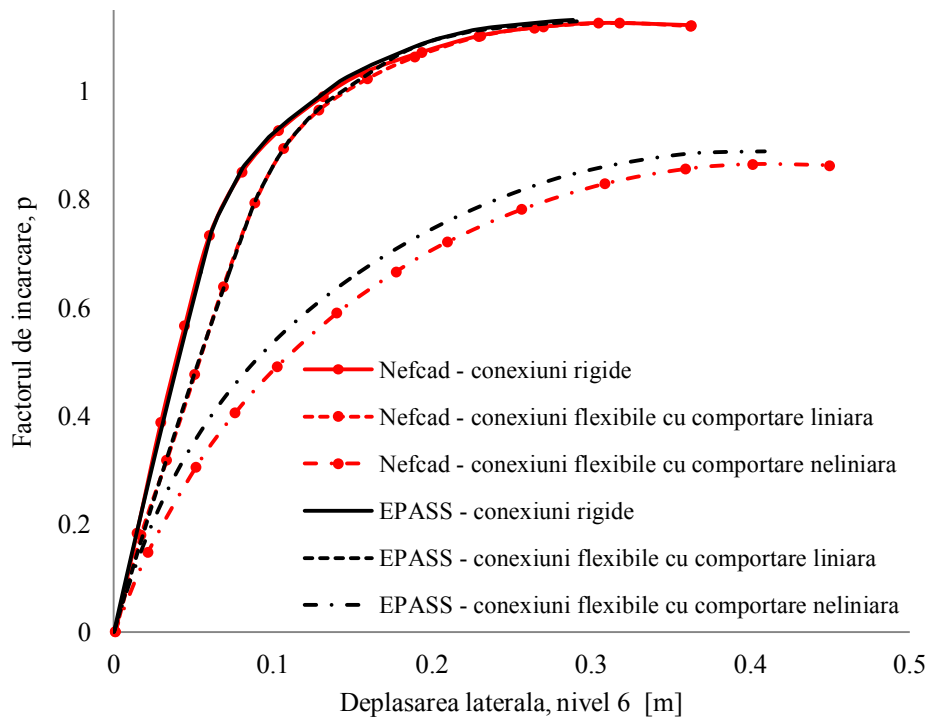


Fig. 5.62 Efectul conexiunilor semi-rigide asupra curbelor de comportare încărcare-deplasare laterală pentru nivelul 6

### 5.13 Concluzii preliminarii

Pentru a verifica eficiența și acuratețea programului de calcul s-au efectuat analize pe structuri considerate standard, care au fost abordate de numeroși cercetători în domeniu pentru calibrarea modelelor de analiză avansată sau alte structuri propuse de autor. Analizele efectuate sunt statice neliniare, în domeniul elastic sau plastic, efectele pierderii stabilității locale, atât flambajul local, cât și flambajul din torsiune, fiind neglijate în analiză. Pentru determinarea răspunsului structurii, s-a utilizat metoda simplu incrementală cu control în forțele exterioare, surprinderea comportării post critice nefiind posibilă. În urma rezultatelor obținute se pot evidenția următoarele remarci:

- *Referitor la analiza geometrică neliniară a cadrelor cu elemente cu secțiune variabilă*

Se poate observa o bună concordanță între rezultatele obținute cu programul EPASS cu cele din literatura de specialitate (Bazeos & Karabalis, 2006), (Saffari, Rahgozar, & Jahanshahi, 2008), (Valipour & Bradford, 2012), (Soltani & Mohri, 2014), (Rezaiee-Pajand, Shahabian, & Bambaechee, 2015) sau cele obținute cu programul de element finit ABAQUS (2011). Se remarcă eficiența programului EPASS, utilizând un singur element pentru discretizarea barelor, considerând 10 puncte de integrare Gauss-Lobatto, în comparație cu 4 elemente necesare pentru modelarea stâlpilor cu metoda propusă de Karabalis & Beskos (1983) sau modelele create în aplicația Abaqus care necesită un număr semnificativ de elemente finite pentru asigurarea convergenței; diferențele între metode încadrându-se în limita de 3%. De asemenea, studiile efectuate reflectă acuratețea rezultatelor obținute cu metoda propusă, chiar și atunci când un număr mic de termeni se utilizează în seria de puteri (8, 10 termeni).

- *Referitor la analiza elasto-plastică a structurilor sensibile la efectele dezvoltării zonelor plastice*

În programul EPASS, dezvoltarea zonelor plastice pe înălțimea secțiunii transversale, precum și în lungul elementului este simulată considerând modulul de elasticitate tangent  $E_t$ , conform relațiilor propuse de Zubydan (2010). Se remarcă eficiența modelului propus, prin utilizarea unui singur element pe bară, se atinge un nivel de acuratețe al rezultatelor comparabil cu cel furnizat de alte metode mai complexe dezvoltate pentru modelarea explicită a plasticității distribuite, prin monitorizarea inelasticității la nivel de secțiune (Zubydan, 2010), (Chiorean C. G., 2006) sau la nivel de fibră (White, 1985), (Vogel, 1985), (Ziemian R., 1992), dar care necesită, de regulă, un număr mai mare de elemente finite pentru discretizarea barelor. De asemenea, s-a constatat o degradare mult mai lină a rigidității elementelor în cazul includerii tensiunilor reziduale în modelul de analiză, spre deosebire de o degradare mai accentuată în cazul ignorării lor.

Și în cazul structurilor având în componență bare cu secțiune variabilă este de remarcat precizia rezultatelor obținute cu modelul propus în comparația cu cele din literatura de specialitate (Li & Li, 2007), (Hayalioglu & Saka, 1992) sau cele obținute cu programul de element finit Abaqus (2011).

Se poate observa o bună concordanță la pozițiile și ordinea de formare a articulațiilor plastice în urma analizelor efectuate în EPASS, cu cele obținute cu alte programe Mastan2 (McGuire,



Gallagher, & Ziemian, 2000) și cele din literatura de specialitate (Vogel, 1985), (Ziemian R. , 1992), (Chiorean C. G., 2006).

- *Referitor la efectele imperfecțiunilor geometrice inițiale, la nivel de element, asupra răspunsului structurii*

În urma studiilor efectuate, s-a constatat că neinclusiunea efectului imperfecțiunilor geometrice inițiale în modelul de analiză poate conduce la o estimare greșită a capacității ultime de rezistență și deformabilitate, în special, într-un calcul geometric neliniar. Însă, astfel de situații nu vor apărea niciodată în proiectarea curentă datorită caracteristicilor geometrice și de material ale elementelor care vor ceda pentru valori mult mai mici ale forței axiale de compresiune. Astfel, într-un calcul neliniar elasto-plastic s-a constatat că efectul imperfecțiunilor geometrice inițiale influențează îndeosebi starea de deformabilitate și nu capacitatea ultimă de rezistență.

- *Referitor la efectele conexiunilor semi-rigide asupra răspunsului structurii*

Comportarea neliniară a conexiunilor flexibile a fost modelată considerând modelul celor trei parametri propus de Liew și al. (1993b). Calibrarea modelului s-a făcut prin compararea rezultatelor cu cele din literatura de specialitate, avută la dispoziție. Se constată o corelație destul de bună între rezultatele obținute cu programul EPASS și cele furnizate de programul NEFCAD (Chiorean C. G., 2006), respectiv PHINGE (Liew J. Y., 1992).

- *Referitor la efectul curbei de interacțiune plastică asupra stării de eforturi în element*

Un aspect important privind modelul de analiză abordat în programul EPASS este de remarcat, și anume respectarea curbelor de interacțiune plastică, odată ce într-o secțiune transversală s-a depășit limita elastică, nefiind necesară divizarea barei în mai multe segmente pentru captarea și monitorizarea funcționării articulațiilor plastice. Calibrarea modelului de analiză s-a făcut prin analiza unor structuri tratate în literatura de specialitate (Ziemian R. , 1992), (Vogel, 1985), (2014) sau propuse în această lucrare. Astfel, s-a propus un cadru plan solicitat la încărcări axiale gravitaționale și o forță laterală în cuprinsul stâlpului. Configurația geometrică și de încărcare a fost aleasă cu scopul de a studia starea de eforturi într-o secțiune transversală în cuprinsul barei, odată ce o articulație plastică este formată. Calibrarea modelului de analiză s-a făcut prin compararea rezultatelor cu cele obținute cu programele Mastan2 (McGuire, Gallagher, & Ziemian, 2000) și Abaqus (2011) și se constată o bună concordanță între curbele obținute, dar cu un efort computațional mult mai mic.

### 6.1 Concluzii generale

Odată cu dezvoltarea tehnologiei pe calculator, analiza avansată a structurilor devine posibilă. În acest context, metodele avansate de analiză pot descrie în mod satisfăcător rezistența, rigiditatea și stabilitatea globală a structurii, astfel încât verificarea individuală a fiecărui element component al structurii să nu mai fie necesară (Chen W. , 1993) (Maleck, White, & Chen, 1995), (Li & Li, 2007), (Chiorean C. G., 2009). De asemenea, mecanismul de cedare este surprins, prin pierderea stabilității, epuizarea capacității portante sau prin efectul combinat al acestora. Detectarea pozițiilor și ordinea de formare a articulațiilor plastice permite suprinderea redistribuirii eforturilor în elemente și, astfel, conduce la o proiectare mai economică a structurilor, relevă capacitățile de ductilitate conferind, totodată, un grad de siguranță mai uniform pe structură

În ultimii ani, proiectarea construcțiilor rezistente la cutremur sau la alte acțiuni de natură excepțională cunoaște un evident proces de clarificare și adecvare la ultimele observații, oarecum surprinzătoare, furnizate de cutremurele majore din ultimii ani, precum și de cele desprinse din studiul fenomenelor de colaps progresiv ale clădirilor provocate de explozii sau atacuri teroriste. Își găsesc noi răspunsuri întrebările referitoare la obiectivele de performanță ale proiectării - proiectare bazată pe forțe (rezistente) sau pe deplasări (deformații), determinarea răspunsului elastic sau inelastic, analiza liniară sau neliniară, statică sau dinamică, deterministă sau probabilistă, etc. Codurile de proiectare încearcă să ofere o mai bună ghidare a proiectării pentru satisfacerea cerințelor de rezistență, ductilitate și control al deformațiilor pentru structurile supuse atât unor acțiuni majore, dar rare, cât și unora moderate sau minore, dar cu frecvență mai mare de apariție. Pe de alta parte, în pofida progreselor spectaculoase realizate în ultimii ani în creșterea puterii calculatoarelor, analizele statice sau dinamice neliniare pretind, în continuare, timpi de execuție prohibitivi, mai ales când sunt utilizate programe de analiză structurală cu elemente finite de “fibră” (inelasticitate distribuită), pentru a modela răspunsul neliniar al unor structuri înalte cu iregularități în plan și elevație, și care, de regulă, pretind modele tridimensionale alcătuite din sute sau chiar mii de elemente. Analizele statice neliniare, chiar dacă reprezintă metode aproximative, simplificând caracterul dinamic al acțiunii, oferă importante informații referitoare la răspunsul structural ca de pilda: (1) identificarea zonelor critice în care deformații inelastice importante pot să apară, (2) evidențierea neregularităților de rezistență, în plan și în elevație, care ar putea produce importante schimbări ale caracteristicilor răspunsului static sau dinamic inelastic, (3) evaluarea cerințelor de rezistență în elementele cu rupere potențial casantă și (4) predicția succesiunii de apariție a curgerii sau a cedărilor în elementele structurale. În plus, devoalarea explicită a rigidității, rezistenței și ductilității unei structuri date de către curba de comportare inelastică pushover exprimată prin *relația forță-deplasare*, constituie tipul de date calitative care sunt întotdeauna cele mai importante și mai utile în aplicațiile de proiectare curente.

Considerațiile de mai sus constituie un motiv suficient pentru ca *metodele de analiză statică neliniară* să continue să fie dezvoltate și perfecționate, astfel încât aceste instrumente să poată deveni mai sigure și mai utile, fie că sunt utilizate pentru a înlocui metodele de analiză dinamică neliniară în proiectarea/evaluarea seismică a unor structuri relativ simple, de tip structuri regulate, fie în cazul în care sunt folosite complementar unor analize dinamice elaborate, pentru cazul unor structuri complexe. Trebuie menționat, de asemenea, faptul că tematica abordată în această lucrare se înscrie în preocupările de dată recentă sau mai puțin recentă ale membrilor colectivului din cadrul departamentului de mecanica construcțiilor din cadrul UTCN. Dezvoltarea unor metode de analiză neliniară sau de stabilitate a structurilor alcătuite din bare prismatice sau non-prismatice reprezintă un subiect complex, de tradiție și de actualitate, fapt justificat de numărul lucrărilor științifice valoroase elaborate de membrii acestui colectiv în acest domeniu, amintind aici doar câteva dintre acestea (Alexa, 1976), (Barsan G. , 1978), (Pantel, 1976), (Chisalita, 1983), (Kopenetz ,1989), (Chiorean C. G., 2001), (Popa, 2003), (Nedelcu, 2009), (Chira, 1999), (Bors I. , 2014).

Obiectivele cercetării întreprinse în cadrul acestei lucrări se încadrează direct în această tendință manifestată pe plan mondial și național de dezvoltare și promovare a metodelor de analiză statică neliniară avansată a structurilor cu impact direct asupra codurilor de proiectare și implicit asupra activității curente de proiectare a structurilor. Subordonate acestui scop, principalele obiective ale cercetării și gradul de îndeplinire a acestora va fi sintetizat în continuare.

Pentru evaluarea răspunsului neliniar al cadrelor plane din oțel, cu considerarea efectelor de ordinul al II-lea, locale și globale ale neliniarității geometrice, imperfecțiunilor inițiale geometrice sau mecanice, deformațiilor de lunecare, ca și comportarea neliniară a conexiunilor flexibile dintre bare, s-a dezvoltat o aplicație, EPASS, în mediul de programare Matlab 7.11. Calculul este incremental-iterativ, rezolvarea fiind condusă în metoda pașilor controlați de încărcări cu creșterea incrementală a forțelor exterioare, surprinderea comportamentului postcritic nefiind posibilă. Relația incrementală *forță-deplasare* la nivel de element este determinată pornind de la formula Maxwell-Mohr de calcul a deplasării generalizate la capetele elementului  $\Delta\delta_{i,\Delta P}$  din aplicarea unei forțe generalizate  $\Delta P$ , urmând apoi o sistematizare a rezultatelor în formă matriceală și evidențind în acest fel în prima fază relația incrementală *deplasare-forță*, matricea de flexibilitate a elementului și vectorul deplasărilor rezultate din încărcările aplicate în lungul barei. În aplicarea relației Maxwell-Mohr, momentele încovoietoare din lungul barei, în calcul geometric neliniar, vor fi obținute prin integrarea ecuației diferențiale de echilibru a barei considerând ca și necunoscută principală momentul încovoietor. Prin inversarea relației *deplasare-forță* se va obține relația incrementală *forță-deplasare* cu evidențierea matricei de rigiditate incrementală și a vectorului forțelor nodale echivalente. Menționăm faptul că în cazul în care bara este cu *secțiune variabilă*, într-un calcul geometric neliniar, momentul încovoietor, într-o secțiune curentă  $x$  a barei, nu mai poate determinat cu exactitate, întrucât ecuația diferențială a fibrei medii deformată devine una neliniară cu coeficienți variabili (modulul de rigiditate la încovoiere  $EI$  variază în lungul barei) și o soluție analitică a acestei ecuații este, în general, greu de obținut, în unele situații chiar imposibil. Ca urmare, s-a considerat oportună studierea a două procedee pentru evaluarea aproximativă a

momentului încovoietor în calculul geometric neliniar (considerarea efectului forței axiale de compresiune/întindere în exprimarea condițiilor de echilibru la nivel de element). Primul procedeu este unul practic, și care, pentru exprimarea momentului încovoietor în lungul barei, presupune integrarea ecuației diferențiale de echilibru a barei considerată cu un modul de rigiditate la încovoiere echivalent și aplicarea relației Maxwell-Mohr. În acest fel, în expresia momentului încovoietor este inclus un coeficient de compresiune mediu (echivalent) care este determinat ținând cont de raportul momentelor de inerție ale secțiunilor de la capetele elementului. Al doilea model, considerat aici cel „exact”, are la bază o tehnică de rezolvare a ecuației diferențiale de echilibru de ordinul al II-lea cu coeficienți variabili prin dezvoltare în serii de puteri, având ca necunoscută principală momentul încovoietor, efectul imperfecțiunilor geometrice inițiale putând fi incluse în seriile de puteri prin dezvoltarea Taylor. Având exprimarea analitică a momentului încovoietor, matricele de rigiditate și vectorul forțelor nodale echivalente se determină ca și în cazul precedent prin aplicarea relației Maxwell-Mohr. Modelul adoptat pentru modelarea comportării elasto-pastice este cel al plastificării concentrate având la bază conceptul de articulație plastică punctuală cu formare instantanee. În această accepțiune formarea și funcționarea articulațiilor plastice este permisă doar în anumite secțiuni caracteristice ale barei (de regulă cele maxim solicitate-capetele elementului sau într-o secțiune din cuprinsul elementului), articulațiile plastice fiind de dimensiune zero, restul elementului având o comportare elastică. Formarea și funcționarea articulației plastice este guvernată de un criteriu de plastificare care poate fi exprimat sintetic, în spațiul forță axială-moment încovoietor, prin intermediul curbelor de *interacțiune plastică* definite, în general, prin relații analitice de formă multi-liniară (spre exemplu cele date de codul american AISC-LRFD) sau neliniară (Orbison). Astfel, modelul propus în (Chiorean C. G., 2006) ce exprimă relația forță-deplasare la nivel de element în condițiile formării articulațiilor plastice la capete elementului și în cuprinsul acestuia este extins pentru considerarea barelor cu secțiune variabilă coroborat cu considerarea efectelor de ordinul al II-lea în exprimarea momentelor încovoietoare și a imperfecțiunilor geometrice în lungul elementului. Metoda propusă implică modelarea structurii utilizând un singur element și nu necesită divizarea barei, chiar dacă o articulație plastică este formată în cuprinsul barei. În cazul barelor prismatice, pentru a ține cont de efectul neliniarității geometrice locale sunt utilizate funcții de stabilitate, pentru fiecare element, care sunt actualizate la fiecare pas de încărcare, în funcție de coeficientul de compresiune.

Efectul neliniarității geometrice globale este inclus în modelul de analiză prin reactualizarea la fiecare pas incremental a coordonatelor geometrice ale nodurilor și lungimile elementelor. Modelarea conexiunilor semirigide se face prin includerea unui resort de rotație între grindă și stâlp iar efectul lor este inclus în matricea de rigiditate tangentă și în vectorul forțelor nodale echivalente. Efectele descărcărilor elastice și al re consolidării materialului au fost neglijate în analiză.

Studiile numerice întreprinse de autor au scopul de a verifica eficiența modelului de calcul propus și acuratețea programului de calcul EPASS. Astfel, au fost selectate structuri reprezentative, care au fost analizate de alți cercetători din domeniu, pentru validarea metodelor de analiză avansată. În urma rezultatelor obținute se pot evidenția următoarele remarci importante:

- *Referitor la evaluarea termenilor matricei de rigiditate a barelor cu secțiune variabilă în calculul geometric neliniar:*

Pentru a demonstra stabilitatea procedurii numerice propusă, cel avansat care implică abordarea în serii de puteri pentru rezolvarea ecuațiilor diferențiale neliniare, s-au efectuat studii de convergență pentru elemente cu secțiune transversală circulară sau dreptunghiulară variabilă, care au fost analizate și de alți cercetători (Al-Sarraf, 1979), (Al-Sadder, 2004). În urma interpretării rezultatelor s-a constatat o foarte bună concordanță între modelul numeric propus și rezultatele din literatura de specialitate, și se poate observa eficiența metodei, fiind, în general, mai rapid convergentă, chiar și în cazul unui raport mare al secțiunilor transversale de capăt ( $dA/dB = 3$ ).

În urma studiilor efectuate, s-a observat că metoda de integrare utilizată nu influențează semnificativ numărul necesar de termeni în expresia funcției polinomiale, pentru asigurarea convergenței. În schimb, pentru cazurile studiate, metodele Gauss sunt mai rapid convergente decât regula Simpson 3/8, fiind necesar un număr de minim 3 puncte de integrare, spre deosebire de 6 puncte de integrare.

- *Pentru analiza geometrică neliniară a cadrelor plane sau a elementelor individuale având secțiune variabilă:*

În cazul utilizării *procedurii practice* propusă, se recomandă ca raportul înălțimilor secțiunilor transversale de capăt să nu fie mai mic de 0.6. Altfel, se constată înregistrarea unor erori de peste 8%. În acest caz se recomandă utilizarea formulării cu serii de puteri care s-a demonstrat a fi stabilă și care conduce la obținerea unor rezultate cu un înalt grad de precizie.

Pentru evaluarea forței axiale critice, dacă modelarea barei se face prin divizare în elemente liniare cu secțiune constantă, considerând matricele de rigiditate corectate cu funcțiile de stabilitate, este, în general, nevoie de aproximativ 100 segmente pentru a se atinge acuratețea dorită.

Pentru determinarea forței axiale critice a barelor cu secțiune variabilă sau a cadrelor portale care au în componența lor elemente cu secțiune variabilă s-au efectuat studii pe structuri analizate de alți cercetători (Al-Sadder, 2004), (Bazeos & Karabalis, 2006), (Saffari, Rahgozar, & Jahansahi, 2008), (Valipour & Bradford, 2012). Modelul propus, considerând un singur element liniar pentru discretizarea barei, cu 10 puncte de integrare, conduce la rezultate comparabile cu cele din literatură și cu cele furnizate de programul de element finit Abaqus (2011), efortul computațional fiind semnificativ mai mic. Astfel, dacă pentru o bară cu secțiune transversală variabilă I, Abaqus efectuat o analiză în 500 de pași (pas de încărcare variabil de la 0.002 la 1 din forța exterioară) pentru a obține forța axială critică de compresiune, timpul de execuție fiind 101.73 minute; analiza efectuată cu modelul propus a condus la obținerea forței axiale critice în 1814 pași de încărcare (pas de încărcare constant 0.1 din forța axială) în doar 355.12 secunde. De asemenea, s-a constatat că pentru obținerea forței axiale critice pe direcția minimă de inerție, un număr de 5 termeni în seriile de puteri sunt suficienți pentru obținerea unor rezultate cu erori sub 3%, spre deosebire de minim 10 termeni necesari în formularea propusă de Soltani și al. (2014). În cazul evaluării forței axiale critice pe direcția maximă de inerție, s-a observat că un număr de 8-9 termeni este suficient pentru obținerea unor rezultate cu erori sub 5%, spre deosebire de 13-

14 termeni necesari altor formulări menționate în literatura de specialitate (Li & Li, 2002), (Hadidi, Azar, & Marand, 2014).

Și în cazul barelor cu secțiune transversală I și dublă variație se constată o bună concordanță între rezultatele obținute cu programul EPASS și cu programul Abaqus. În Abaqus modelarea barei s-a făcut utilizând elemente finite de tip “shell” S4R cu discretizare de 10 mm iar în EPASS s-au considerat două elemente/bară, câte un element cu 10 puncte de integrare pentru fiecare variație a înălțimii inimii.

Deplasarea în cuprinsul barei poate fi evaluată utilizând relațiile Maxwell-Mohr, cuplând efectele din deformațiile de lunecare datorate forței tăietoare și efectul neliniarității geometrice locale. Pentru a calibra modelul matematic, s-au efectuat analize pe elemente cu secțiune variabilă studiate de alți cercetători în domeniu (Li & Li, 2002), (Hadidi, Azar, & Marand, 2014), iar rezultatele obținute confirmă performanța și eficiența metodei propuse

- *Referitor la analiza elasto-plastică a cadrelor plane din oțel*

În cazul modelului clasic cu articulații plastice cu formare instantanee, se constată o foarte bună corelare între rezultatele obținute cu programul EPASS și cele menționate în literatura de specialitate (Ziemian R. , 1992), (Chiorean C. G., 2006).

Simularea dezvoltării zonelor plastice s-a făcut prin includerea modulului de elasticitate tangent  $E_t$ , conform relațiilor propuse de Zubydan (2010), iar pentru discretizarea structurilor s-a utilizat un singur element/bară. Și în acest caz, se constată obținerea unor rezultate având o precizie satisfăcătoare, în varianta includerii sau nu a efectelor tensiunilor reziduale, în comparație cu analizele la nivel de fibră (Vogel, 1985), (Ziemian R. , 1992), (Chiorean C. G., 2006), iar distribuția procentuală a secțiunilor plastificate sunt în bună corelare cu rezultatele din literatura de specialitate. Se poate observa că includerea efectelor tensiunilor reziduale produc o degradare mai “lină” a rigidității elementelor, însă nu influențează semnificativ factorul ultim de încărcare, în cazul structurilor cu grad de determinare mare. De asemenea, se remarcă influența curbei de interacțiune plastică considerată în modelul de calcul asupra capacității ultime de încărcare. Astfel, pentru exemplele studiate, curba de plastificare Orbison supraestimează coeficientul de încărcare ultim cu aproximativ 3.5% față de cea propusă în codul american AISC-LRFD. Totuși, se observă respectarea curbei de interacțiune plastică, odată cu plastificarea unei secțiuni, indiferent de condiția de plastificare considerată în analiză.

Importanța includerii încărcărilor uniform distribuite pe bară este cunoscută în practica curentă. În acest scop, procedeul abordat permite surprinderea articulației în câmp nefiind necesară divizarea barei în mai multe segmente pentru captarea și monitorizarea funcționării articulațiilor plastice. Efectul imperfecțiunilor geometrice inițiale nu influențează semnificativ factorul limită de încărcare, în special la structurile cu un grad de nedeterminare mare. Însă, într-un calcul geometric neliniar, s-a constatat că includerea imperfecțiunilor geometrice inițiale influențează major capacitatea de deformabilitate a elementelor.

Comportarea conexiunilor flexibile ale grinzilor a fost studiată considerând o variație liniară sau neliniară (modelul celor trei parametri). Rezultatele obținute sunt comparate cu rezultatele furnizate de programul NEFCAD (Chiorean C. G., 2006) și se constată o bună concordanță între curbele încărcare-deplasare laterală.

## 6.2 Contribuții personale

Principalul demers al acestei lucrări constă în dezvoltarea unei metode coerente de analiză statică neliniară implementat într-un program de calcul specializat pentru analiza statică neliniară avansată a structurilor în cadre cu noduri semi-rigide alcătuite din bare cu secțiune variabilă. Principalele caracteristici, care dau plus valoare modelului de calcul elaborat și programului de calcul dezvoltat și îl fac competitiv cu alte modele și programe care vizează calculul neliniar al structurilor formate din bare cu secțiune variabilă derivă din faptul că, spre deosebire de metodele dezvoltate pe MEF în cadrul cărora acuratețea este controlată prin subîmpărțirea barelor între noduri, modelul propus discretizează structura în elemente constituite din întreaga bară. Această abordare conduce la un număr redus de grade de libertate, identic cu cel din analiza liniară a structurilor, același model numeric utilizat la analiza liniară poate fi utilizat la analiza neliniară. Timpul calculator relativ redus precum și multitudinea de informații pe care aplicația le furnizează fac din aplicația dezvoltată un instrument deosebit în sprijinul analizei și proiectării structurilor în cadre alcătuite din bare non-prismatică cu conexiuni semi-rigide.

În acest context general considerăm că următoarele aspecte reprezintă contribuții majore aduse tehnicii actuale de calcul în acest domeniu:

- **Formularea relațiilor forță-deplasare la nivel de element pentru bare cu secțiune variabilă, combinând abordarea în serii de puteri cu metoda Maxwell Mohr.** În acest scop, expresia momentului încovoietor a fost determinată prin rezolvarea ecuației diferențiale neliniare de echilibru de ordinul al II-lea cu coeficienți variabili prin dezvoltare în serii de puteri. Având evaluați coeficienții de flexibilitate cu metoda Maxwell-Mohr, prin inversare, se poate determina matricea de rigiditate. Procedeu propus utilizează un singur element/bară și include efectele forței axiale în lungul elementului, al imperfecțiunilor geometrice inițiale, precum și al forțelor uniform distribuite aplicate în lungul elementului
- **Propunerea unei formulări practice pentru calculul geometric neliniar al barelor cu secțiune variabilă.** Acest procedeu presupune exprimarea aproximativă a momentului încovoietor în lungul barei, prin integrarea ecuației diferențiale de echilibru a barei considerată cu un modul de rigiditate la încovoiere echivalent (constant) și aplicarea relației Maxwell-Mohr pentru determinarea relațiilor deplasare-forță. În acest fel, în expresia momentului încovoietor este inclus un coeficient de compresiune mediu (echivalent) care este determinat ținând cont de raportul momentelor de inerție ale secțiunilor de la capetele elementului. Pentru a se determina raportul maxim între secțiunile de capăt ale barei, pentru obținerea unor rezultate cu acuratețe satisfăcătoare, s-a efectuat un studiu numeric în urma căruia s-a constatat înregistrarea unor erori peste 8%, dacă raportul secțiunilor de capăt este mai mic decât 0.6.
- **Dezvoltarea unei aplicații, EPASS, în mediul de programarea Matlab 7.11 pentru analiza statică neliniară a cadrelor plane din oțel cu considerarea efectelor neliniarității geometrice locale și globale, de material (la nivel de secțiune), a imperfecțiunilor inițiale geometrice și mecanice, deformațiilor de lunecare, precum și a conexiunilor flexibile.** Modelarea

structurilor s-a făcut considerând un singur element/bară, iar forțe în cuprinsul barei pot fi incluse direct în analiză fără a fi necesară divizarea elementelor. Acest aspect este deosebit de important, în contextul în care discretizarea elementelor componente ar presupune reconfigurarea geometriei structurii la fiecare pas incremental, ceea ce poate deveni un proces complicat pentru programator datorită datelor ce trebuie memorate și, de asemenea, implică un efort computațional mare, ceea ce nu este practic utilizatorilor. Modelarea comportării elasto-plastice a secțiunilor se face pe baza conceptului de articulație plastică, care impune respectarea curbei de interacțiune plastică într-o secțiune integral plastificată (în modelul plastificării instantanee sau graduale), zonele potențial plastice fiind la capetele elementului, precum și în lungul lui.

### 6.3 Direcții viitoare de cercetare

Considerăm ca performanțele și stadiul actual de dezvoltare a metodei prezentate în această lucrare poate deschide noi orizonturi de dezvoltare în acest domeniu. Principalele extinderi ale procedurii vizează următoarele aspecte:

- **Integrarea unei metode numerice cu control în deplasări sau lungime de arc.** Se cunoaște că la structurile din oțel cu elemente zvelte, flambajul local este posibil, astfel că, pe parcursul încărcărilor, apariția unor fenomene de tip „snap-back” și „snap-through” este posibilă, iar includerea procedurii dezvoltat într-o astfel de metodă generală de soluționare este absolut necesară. De asemenea, utilizând o astfel de metodă este posibil studiul în domeniul post critic de comportare al structurilor.
- **Extinderea modelului dezvoltat la analiza neliniară a structurilor spațiale.** În cazul structurilor complexe, pentru evaluarea cât mai corectă a comportamentului real este recomandat studiul global spațial al structurii, pentru a ține cont de interacțiunea între elemente. Acest aspect este important în cazul structurilor în cadre din oțel zvelte, unde evaluarea greșită a capacității ultime de rezistență a întregului sistem, poate conduce la soluții dezavantajoase din punct de vedere economic sau structural.
- **Includerea efectelor de pierdere a stabilității locale a elementelor.** Flambajul lateral al barelor este un fenomen des întâlnit la elementele din oțel. Metodele clasice de proiectare nu sunt capabile să surprindă în mod riguros comportamentul structural, prin considerarea efectelor combinate ale neliniarității fizice și cel al pierderii de stabilitate prin încovoiere răsucire, iar cedarea locală, datorată acestui fenomen, a unor elemente poate influența semnificativ mecanismul de cedare și răspunsul neliniar global al structurii.
- **Includerea efectelor nodurilor de dimensiune finită.** În cazul modelării structurilor cu elemente liniare, aportul configurației geometrice a dimensiunii reale a nodului nu poate fi surprins cu acuratețe iar răspunsul global poate fi supraestimat, ceea ce ar conduce la niște costuri mari; sau poate fi subestimat, ceea ce ar putea conduce la un răspuns structural dezastruos. De asemenea, un aspect important îl constituie rigiditatea la forță



tăietoare a nodurilor, o rigiditate infimă, curent asumată în calcule, poate fi uneori în disonanță cu comportarea (rigiditatea) reală a nodurilor structurilor în cadre din oțel.

## Bibliografie

- Cărți și Teze de Doctorat -

- [1] AL-Damerchi, H. (1999). *Large Displacement Elastic-Plastic Stability Analysis of Plane Steel Frames With Non-Prismatic Members*. Baghdad: Ph.D. Thesis, University of Technology.
- [2] AISC, A. I. (1994). *Load and Resistance Factor Design, Manual of Steel Construction, Vol. 1 and 2, 2nd ed., .* Chicago, IL.
- [3] AISC. (1999). *Load and Resistance Factor Design Specification, for Structural Steel Building*. USA: American Institute of Steel Construction.
- [4] Abramowitz, M., & Stegun, I. (1972). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing*. New York: Dover: pp. 331-339 and 771-802.
- [5] Alexa, P. (1976). *The analysis of geometrically non-linear elasto-plastic frames by mathematical programming, PhD. Thesis*. London: Imperial College of London.
- [6] Chandrasekhar, S. (1960). *Radiative Transfer*. New York: Dover.
- [7] ANSYS. (2004). *Structural nonlinear analysis program. South Pointe*. (Canons-burg, PA): ANSYS Inc.
- [8] Avery, P. (1998). *Advanced Analysis of Steel Frame Structures Comprising Non-Compact Sections, PhD thesis*. School of Engineering, Queensland University of Technology.
- [9] Bârsan, G. (1978). *Dinamica și stabilitatea construcțiilor*. Didactica și Pedagogica.
- [10] Bathe, K. (1982). *Finite element procedures in engineering analysis*. Englewood N.J.: Prentice-Hall Inc.
- [11] Bathe, K. (1986). *ADINA R&D, Inc*. Massachusetts .
- [12] Bathe, K.-J. (1996). *Finite element procedures*. New Jersey: Prentice Hall.
- [13] Bažant, Z., & Cedolin, L. (2010). *Stability of Structures. Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*.
- [14] Beyer, W. H. (1987). *CRC Standard Mathematical Tables, 28th ed*. Boca Raton, FL: CRC Press.
- [15] Bleich, F. (1952). *Buckling Strength of Metal Structures*. New York: McGraw-Hill, 554p.
- [16] Bors, I. (2014). *Statica și dinamica geometric neliniară a barei drepte*. Cluj-Napoca: U.T.Press.
- [17] Chen, W. F., & Kim, S. E. (1997). *LRFD Steel Design Using Advanced Analysis*. New York: CRC PressINC.
- [18] Chen, W. F., & Kishi, N. (2011). *Semi-Rigid Connections Handbook*. Ft. Lauderdale, FL : J. Ross Pub.
- [19] Chen, W. F., & Lui, E. M. (1991). *Stability Design of Steel Frames*. Boca Raton, FL: CRC Press, 394 p.
- [20] Chen, W. F., & Sohal, I. S. (1995). *Plastic Design and Advanced Analysis of Steel Frames*. Springer-Verlag, New York.
- [21] Chen, W., & Atsuta, T. (1976). *Theory of beam-column. Plane behavior and design vol. 1*. New York: McGraw-Hill.

- [22] Chen, W. F., Goto, Y., & Liew, J. (1996). *Stability Design of Semi-Rigid Frames*. New York: Wiley.
- [23] Chiorean, C. G. (2001). *Contribuții la analiza avansată a structurilor în cadre, Teză de doctorat*. Universitatea Tehnica din Cluj-Napoca.
- [24] Chiorean, C. G. (2006). *Aplicatii Software pentru Analiza Neliniara a Structurilor in Cadre*. Cluj-Napoca: U.T.PRES.
- [25] Chira, N. (1999). *Analiza geometric neliniara si la stabilitate a cadrelor metalice spatiale semirigide. Teza de doctorat*. Cluj-Napoca : Universitatea Tehnica din Cluj-Napoca.
- [26] Chisăliță, A. (1983). *Contributii la studiul raspunsului neliniar - static si dinamic - al sistemelor suspendate. Teza de doctorat*. Cluj-Napoca: Institutul Politehnic Cluj-Napoca.
- [27] Ciarlet, P. (1978). *The finite element method for elliptic problems. Vol 4 Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland, Amsterdam.
- [28] Clark, M. J., & et.al. (1992). *Benchmarking and Verification of Second-Order Elastic and Inelastic Frame Analysis Programs*. Lehigh University, Bethlehem, PA: in SSRC TG 29 Workshop on Methods for Advanced Analysis and Design of Steel Frames.
- [29] CSA. (1989). *Limit States Design of Steel Structures*. CAN/CSA - S16. 1-M89, Canadian Standards Association.
- [30] CSA. (1989, 1994). *Limit States Design of Steel Structures*. CAN/Canadian Standard Association-S16.1-M89, M94.
- [31] ECCS. (1984). *Ultimate Limit State Calculation of Sway Frames with Rigid Joints*. Technical Committee 8 - Structural Technical Working Group 8.2 - System, Publication No. 33.
- [32] ECCS. (1984). *Ultimate Limit State Calculation of Sway Frames with Rigid Joints*. Tech. Committee 8 - Structural Stability Technical working group 8.2 - system, Publication No.33, 20 pp.
- [33] ECCS. (1984). *Ultimate Limit State Calculations of Sway Frames with Rigid Joints*. Technical Committee 8 - Structural Stability Technical Working Group 8.2 - System, Publication No. 33, 20pp.
- [34] ECCS. (1991). *Essentials of Eurocode 3 Design Manual for Steel Structures in Building*. ECCS-Advisory Committee 5, No. 65, 60 pp.
- [35] EN 1993-1-1. (1993). *Design of Steel Structures: Part 1 - general rules and rules for buildings, Vol. 1*.
- [36] Galambos, T. V. (1988). *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*. New York: Wiley; 4th edition.
- [37] Gallagher, R. (1975). *Finite element fundamentals*. Upper Sanddler River, N.J.: Prentice Hall.
- [38] Hibbitt, K. &. (2011). *ABAQUS/standard user's manual, version 6.11*.
- [39] Hildebrand, F. B. (1956). *Introduction to Numerical Analysis*. New York: McGraw-Hill.
- [40] Kahaner, D., Moler, C., & Nash, S. (1989). *Numerical Methods and Software*. Prentice-Hall, ISBN 978-0-13-627258-8.
- [41] Kassimali, A. (1976). *Nonlinear static and dynamic analysis of frames. Ph.D. thesis*. Columbia, MO: Univ. of Missouri .
- [42] Koiter, W. (1967). *On the Stability of Elastic Equilibrium*. Thesis, Polytechnic Institute Delft, NASA TTF-10833.

- [43] Kopenetz, L. G., (1989). *Contributii la calculul structurilor portante cu cabluri. Teza de doctorat.* Cluj Napoca: Universitatea Tehnica din Cluj-Napoca
- [44] Lee, G., Morrell, M., & Ketter, R. (1972). Design of tapered members. *Weld. Res. Council. Bull.*, 173, June.
- [45] Li, G., & Li, J. (2007). *Advanced Analysis and Design of Steel Frames.* John Wiley & Sons Ltd.
- [46] Li, G., & Shen, Z. (1998). *Theory for analysis and calculation of elastic and elasto-plastic behavior of steel frameworks.* Shanghai Science and Technology Press (in Chinese).
- [47] Liew, J. Y. (1992). *Advanced analysis for frame design, Ph. D thesis.* Purdue University, West Lafayette.
- [48] Livesley, R. K., & Chandler, D. B. (1956). *Stability functions for structural frameworks.* Manchester, England: Manchester University Press.
- [49] Maleck, A. (2001). *Second-order inelastic and modified elastic analysis and design valuation of planar steel frames. PhD Thesis.* Atlanta, GA.: Georgia Institute of Technology.
- [50] Maleck, A. E., White, D. W., & Chen, W. F. (1995). Practical Application of Advanced Analysis in Steel Design. *Pacific Structural Steel, 4.* Singapore.
- [51] McGuire, W., Gallagher, R., & Ziemian, R. (2000). *Matrix Structural Analysis.* John Wiley & Sons, Inc.
- [52] Nedelcu, M. (2009). *Aspecte ale stabilității structurilor metalice pentru hale. Teză de doctorat.* Cluj-Napoca: Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca.
- [53] Pantel, E. (1976). *Calculul de ordinul doi și de stabilitate al barelor și structurilor din bare cu rigiditate variabilă. Teză de doctorat.* Cluj-Napoca: Institutul Politehnic Cluj-Napoca.
- [54] Popa, A. (2003). *Comportarea structurilor tubulare sub sarcini statice in domeniul elastic si postelastice. Teza de doctorat.* Cluj-Napoca: Universitatea Tehnica din Cluj-Napoca.
- [55] Shayan , S. (2013). *System reliability-based design of 2d steel frames by advanced analysis.* Sydney, Australia : University of Sydney .
- [56] Shen, J. (1991). *Maximum likelihood estimation for distributed parameter models of large beam-like structures.* Norfolk, VA: Ph.D. Dissertation, Dept. of Mechanical Engineering & Mechanics, Old Dominion University.
- [57] SSRC, S. (1988). *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures, 4th ed.* New York: Galambos, T.V., Ed., John Wiley & Sons.
- [58] Strang, G., & Fix, G. (1973). *An analysis of the finite element method.* Englewood Cliffs, NJ,: Hall Series in Automatic Computation, Prentice Hall.
- [59] Tall, L., Huber, A. W., & Beedle, L. S. (1960). *Residual stress and the instability of axially loaded columns.* Liege, Belgium: Colloquium of the International Institute of Welding.
- [60] The MacNeal-Schwendler Corporation (MSC). (1968). *MSC/NASTRAN.*
- [61] Timoshenko, S., & Gere, J. (1961). *Theory of elastic stability 2nd edition.* New york: McGraw - Hill.
- [62] Timoshenko, S., & Young, D. (1965). *Theory of Structures.* New York, N.Y.: McGraw – Hill Book Co.
- [63] Tochacek, M. (1995). Design of struts with variable cross-section. . *Stability of Steel Structures*, Vol. 1, p. 103-109.

- [64] Trahai, N. (1993). *Flexural-torsional buckling of structures*. London: E&FN SPON.
- [65] Vogel, U. (1985). *Calibrating frames*. Stahlbau, 10, 1-7.
- [66] Wang, Y. C. (1988). *Ultimate Strength Analysis of 3-D Beam Columns and Column Subassam*
- [67] White, D. W. (1985). *Material and Geometric Nonlinear Analysis of Local Planar Behavior in Steel Frames using Iterative Computer Graphics*, M.S. Thesis. Cornell University, Ithaca, NY, 281 pp.
- [68] White, D. W., & Chen, W. F. (1993). *Plastic Hinge Based Methods for Advanced Analysis and Design of Steel Frames - an assessment of the State-of-the-art*. Structural Stability Research Council.
- [69] White, D. W., Liew, J. Y., & Chen, W. (1992). Toward advanced analysis in LRFD. In plastic hinge based methods for Advanced Analysis and design of steel frames. SSRC. Lehigh University, Bethlehem, PA.
- [70] Wilson, W., & Brown, R. (1935). *The Effect of Residual Longitudinal Stresses Upon the Load-Carrying Capacity of Steel Column*. Illinois: University of Illinois Engineering Experiment Station, Bulletin No. 280.
- [71] Young, W., & Roark, R. (2001). *Roark's formulas for stress and strain*. McGraw-Hill Professional.
- [72] Ziemian, R. D. (1990). *Advanced methods of inelastic in the limit states design of steel structures*. Phd. Thesis. Ithaca: Cornell University, Ithaca, N.Y.
- [73] Zienkiewicz, O. (1977). *The finite element method in engineering science*. London: McGraw Hill.
- [74] Zienkiewicz, O., & Cheung, Y. (1967). *The finite element method in continuum and structural mechanics*. McGraw Hill, pp. 272.

- [1] Al-Mashary, F. (1995). Inelastic analysis of steel frames using locatable plastic hinge approach. *The 4th Saudi Engineering Conference*, (p. vol. II).
- [2] Azizinamini, A., Bradburn, J., & Radzimirski, J. (1985). *Static and cyclic behavior of semi-rigid steel beam-column connections, Technical Report*. Columbia, SC: Dept. of Civil Eng., Univ. of South Carolina.
- [3] Bridge, R. (1998). The Inclusion of Imperfections in Probability-Based Limit States Design. *Structural Engineering World Congress*. San Francisco, California.
- [4] El-Zanaty, M. H., Murray, D. M., & Bjorhovde, R. (1980). *Inelastic Behavior of Multistory Steel Frames*. Structural Engineering Report No. 83, Univ. of Alberta, Canada.
- [5] Iffland, J., & Birnstiel, C. (1982). *Stability design procedures for building frameworks. Research Report, AISC Project No. 21.62*. Chicago, Illinois: American Institute of Steel Construction.
- [6] King, W., & Chen, W. (1993). *A LRFD based analysis method for semi-rigid frame design*. West Lafayette, IN: Struct. Eng. Report No. CE-STR-93-15, School of CE, Purdue University.
- [7] King, W., White, D., & Chen, W. (1991). A modified plastic hinge method for second-order inelastic analysis of steel rigid frames. *Struct. Engrg. Rep. CE-STR-90-13, Purdue University, West Lafayette, Ind.*
- [8] Kishi, N., & Chen, W. (1987a). *Moment-Rotation relation of top and seat-angle connections*. West Lafayette, IN: Struct. Eng. Report No. CE-STR-87-4, Purdue Univ.
- [9] Liew, J., & Tang, L. (1998). *Nonlinear Refined Plastic Hinge analysis of Space Frame Structures, Report No. CE 027/98*. School of Civil Engineering, National University of Singapore.
- [10] Muntean, N., & Cristutiu, I. (2010). Erection and manufacturing imperfection influence on steel frame behaviour. *Proc. of the International workshop „Global and Regional Environmental Protection” B.E.N.A - Glorep* (p. p. 228). Timisoara.
- [11] Orbison, J. G. (1982). *Nonlinear static analysis of three-dimensional steel frames*. Dept. of Structural Eng., Report No. 82-6, Cornell University.
- [12] Popov, E., & Stephen, R. (1970). *Cyclic loading of full-size steel connections, Report NO. UCB/EERC-70/03*. Berkeley: Earthquake Engineering Research Center, Univ. of California.
- [13] Thompson, L., McKee, R., & Visintainer, D. (1970). *An investigation of rotation characteristics of web shear framed connections using A-36 and A-441 Steels*. Rolla, MO: Dept. of Civil Eng., Univ. of Missouri-Rolla.
- [14] Ramberg, W., & Osgood, W. (1943). *Description of stress-strain curves by three parameters*. Washington DC: Technical Note No. 902, National Advisory Committee For Aeronautics.
- [15] White, D. W., & Chen, W. F. (1990). Second-Order inelastic analysis for frame. *Proc. National Symp.on Advances in Steel Structures, IIT. Madras, India*.
- [16] Young, B. (1975). *Residual stresses in hot rolled members*. IABSE Reports of the Working Commissions. 23: 25-38.

- [1] Clough, R. (1960). The finite element in plane stress analysis. *Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation*. Pittsburgh.
- [2] Kim, S., Han, T., Won, D., & Kang, Y. (2014). Tangent moduli of hot-rolled I-shaped axial members considering various residual stress distributions. *Thin-Walled Structures*, 76, 77–91.
- [3] Lee, B., & Guo-Qiang, L. (2004). Buckling Analysis of Tapered Lattice columns using a generalized finite element. *Journal of Communications in numerical methods in engineering*, 20 (6), pp. 479-488 .
- [4] Saffari, H., Rahgozar, R., & Jahanshahi, R. (2008). An efficient method for computation of effective length factor of columns in a steel gabled frame with tapered members. *Journal of Constructional Steel Research*, 64, pp. 400–406.
- [5] Adman, R., & Afra, H. (2007). Exact shape functions of imperfect beam element for stability analysis. *Advances in Engineering Software*, 38, 576–585.
- [6] Ahmed, A., Kishi, N., Matsuoka, K.-i., & Komuro, M. (2001). Nonlinear analysis of prying of top- and seat- angle connections. *Journal of Applied Mechanics*, 4, 227-236.
- [7] Al-Bermani, F., & Kitipornchai, S. (1992). Elasto-plastic nonlinear analysis of flexible jointed space frames. *J. Struct. Div. ASCE*, 118(1), 108-127.
- [8] Al-Fadul, M. (2005). *Stability Functions for Non-Prismatic Members Including Shear Effect*, M.Sc. Thesis. Najaf: University of Kufa, Civil Engineering Department.
- [9] Al-Farouk , O., AL-Sarraf, S., & Yossif, W. (2007). Modified Stability Functions with Shear Effects for Non-Prismatic Members in Steel Plane Frames. *Journal of Engineering*, 13 (4).
- [10] Al-Gahtani, H. (1996). Exact stiffness for tapered members. *J. of Struct. Eng., ASCE*, 122(10), 1234-39.
- [11] Al-Mashary, F., & Chen, W. F. (1991). Simplified Second-Order Inelastic Analysis for Steel Frames. *J. Inst. Struct. Eng.*, 69(23), 395-399.
- [12] Al-Sadder, S. (2004). Exact expression for stability functions of a general non-prismatic beam coloumn member. *J of Constr Steel Res*, 60, 1561-1584.
- [13] Al-Sarraf, S. (1979). Elastic instability of frames with uniformly tapered members. *The Struct Eng*, 57B(1):18–24.
- [14] Al-Sarraf, S. (1986). Shear Effect on the Elastic Stability of Frames. *The Structural Engineer* , 64 (11).
- [15] AL-Shareef, N. H. (2013). Numerical Analysis of Non-Prismatic Beam on Elastic Foundation under Generalized Loadings . *Journal of Babylon University/Engineering Sciences*, (5)/ Vol.(21).
- [16] Alvarenga, A. R., & Silveira, A. M. (2009a). Second-order plastic-zone analysis of steel frames Part I: Numerical formulation and examples of validation. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 6, 131–152.
- [17] Alvarenga, A. R., & Silveira, R. A. (2009b). Second-order plastic-zone analysis of steel frames – Part II: effects of initial geometric imperfection and residual stress. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 6, 323 – 342.
- [18] Andrade, A., & Camotim, D. (2005). Lateral-torsional buckling of singly symmetric tapered beams: Theory and applications. *J of Eng Mech*, 131(6):586–97.

- [19] Ang, K., & Morris, G. (1984). Analysis of three-dimensional frames with flexible beam-column connections. *Can. J. Civil Eng.*, 11, 245-254.
- [20] Aristizabal-Ochoa, J. (1997). First-and Second-Order Stiffness Matrix and load Vector of Beam-Columns with Semirigid Connections. *Journal of structural engineering*, 123(5):669-678.
- [21] Asgarian B., S. M. (2011). Lateral-torsional buckling of non-prismatic thin-walled. *Procedia Engineering*, 14, 1653–1664.
- [22] Asgarian, B., Soltani, M., & Mohri, F. (2013). Lateral-torsional buckling of tapered thin-walled beams with arbitrary cross-sections. *Thin-Walled Structures*, 01, 62:96-108. .
- [23] Attalla, M. R., Deierlein, G. G., & McGuire, W. (1994, August). Spread of Plasticity: Quasi-Plastic-Hinge Approach. *Structural Engineering*, 120(8), 2451–2473.
- [24] Avery, P., & Mahendran, M. (2000). Analytical benchmark solutions for steel frame structures subjected to local buckling effects. *Advances in Structural Engineering*, 3(3), 215-29.
- [25] Avery, P., & Mahendran, M. (2000). Distributed plasticity analysis of steel frame structures comprising non-compact sections. *Engineering Structures*, 22(8), 901-19.
- [26] Azizinamini, A., & Radziminski, J. (1989). Static and cyclic performance of semi-rigid steel beam-to-column connections. *J. of Struct. Eng.*, 115(12):2979-2998.
- [27] Bahaari, M., & Sherbourne, A. (1994). Computer modeling of an extended end-plate bolted connection. *Computers and Structures* , 52(5): 879–93.
- [28] Bahaari, M., & Sherbourne, A. (1997b). Finite element prediction of end plate bolted connection behavior II : analytic formulation. *Journal of Structural Engineering*, 123 (2), 165-175.
- [29] Balkaya, C. (2001). Behavior and modeling of nonprismatic members having T-sections. *Journal of Structural Engineering ASCE*, 127 (8), 940e946.
- [30] Ban, H., Gang, S., Shi, Y., & Wang, Y. ( 2013). Residual Stress of 460 MPa High Strength Steel Welded I Section: Experimental Investigation and Modeling. *International Journal of Steel Structures*, 13(4): 691-705.
- [31] Banerjee, J. (1986). Exact Bernoulli-Euler static stiffness matrix for a range of tapered beam-columns. *Int J Num Meth Engng* , 23(9):1615–28.
- [32] Baptista AM, M. J. (1998). Design of tapered compression members according to Eurocode 3. *J Constr Steel Res*, 46(1–3):133–48.
- [33] Barsan, G. M., & Chiorean, C. G. (1999). Computer Program for Large Deflection Elasto-PLastic Analysis of Semi-Rigid Steel Frameworks. *Computers & Structures*, 72(6), 699-711.
- [34] Barsan, G., & Chiorean, C. (1999). Influence of residual stress on the carrying-capacity of steel framed structures. Numerical investigation. *Stability and Ductility of Steel Structures, Elsevier Science Pub.*, SDSS, 317-324.
- [35] Bazeos, N., & Karabalis, D. (2006). Efficient computation of buckling loads for plane steel frames with tapered members. *Engineering Structures*, 28(5), Pages 771-775.
- [36] Beedle, L., & Tall, L. (1962). Basic column strength. *Transactions of the ASCE* , 127 (II): 138-179.
- [37] Bild, S., & Trahair , N. (1989). In-plane strengths of steel columns and beam columns. *Journal of Constructional Steel Research* , 13(1): 1-22.



- [38] Biondi, B., & Caddemi, S. (2007). Euler-Bernoulli beams with multiple singularities in the flexural stiffness. *European Journal of Mechanics A-Solids*, 26, 789-809.
- [39] Boissonnade N., M. R. (2005). A geometrically and materially non-linear 3D beam finite element for the analysis of tapered steel members. *Steel Structures*, 5, 413-419.
- [40] Bose, S., McNeice, G., & Sherbourne, A. (1972). Column webs in steel beam to column connexions. Part I: formulation and verification. *Computers Structures*, 2, 253-72.
- [41] Bradford, M., & Cuk, P. (1988). Elastic buckling of tapered monosymmetric Ibeams. *J of Struct Eng*, 114(5):977-96.
- [42] Bradford, M., & Cuk, P. (1988). Elastic buckling of tapered monosymmetric Ibeams. *J of Struct Eng*, 114(5):977-96.
- [43] Brown, T. (1981). Lateral-torsional buckling of tapered I-beams. *Journal of the Structural Division. ASCE*, 107(4): 689-697.r.
- [44] Buonopane, S. (2008). "Strength and Reliability of Steel Frames with Random Properties. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 134(2): 337-344.
- [45] Bursi, O., & Jaspart, J. (1997). Benchmarks for finite element modeling of bolted steel connections. *J. of Constr. Steel Res.*, 43(1-3), 17-42.
- [46] Buru, S. M., & Chiorean, C. G. (2015). Analiza Neliniară Avansată a Structurilor în Cadre Compozite Oțel-Beton cu Interacțiune Parțială și Conexiuni Semirigide. *A XIV Conferință Națională de Construcții Metalice, Cluj-Napoca*.
- [47] Chan, S. (1990). Buckling analysis of structures composed of tapered members. *J Struct Eng*, 116(7):1893-906.
- [48] Chan, S. L., & Gu, J. X. (2000). Exact tangent stiffness for imperfect beam-column members. *J Struct Eng.*, (9):1094-107.
- [49] Chan, S., & Chui, P. (1997). A generalized design-based elastoplastic analysis of steel frames by section assemblage concept. *Engineering Structures*, 19(8), 628-36.
- [50] Chan, S., Huang, H., & Fang, L. (2005). Advanced analysis of imperfect portal frames with semirigid base connections. *Journal of Engineering Mechanics*, 131(6): 633-640.
- [51] Chen, W., & Lui, E. (1992). *Stability design of steel frames*. Boca Raton, FL: CRC Press, 380 p.
- [52] Chen, W. (1993). *Advanced Analysis in Steel Frames*. CRC Press, Boca Raton, FL.
- [53] Chen, W. F. (2000). *Practical Analysis for Semi-Rigid Frame Design*. Singapore: World Scientific.
- [54] Chen, W. F., & Chan, S. L. (1995). Second-Order Inelastic Analysis of Steel Frames using Element with Midspan and End Springs. *J. Structural Engineering, ASCE*, 121(3), 530-541.
- [55] Chen, W., & Liew, J. (1994). Implications of using refined plastic hinge analysis for load and resistance factor design. *Thin-Walled Struct*, 20:17-47.
- [56] Chiorean, C. G. (2009). A Computer Method for Nonlinear Inelastic Analysis of 3D Semirigid Steel Frameworks. *J. Engineering Structures*, 31(12), 3016-3033.
- [57] Chiorean, C. G. (2015). Second-order distributed plasticity analysis of 3D semi-rigid steel frames. *submitted for publication*.
- [58] Chiorean, C. G., & Barsan, G. M. (2005). Large Deflection Distributed Plasticity Analysis of 3D Steel Frameworks. *Computers & Structures*, 83(19-20), 1555-1571.

- [59] Chiorean, C., & Marchiș, I. (2016). Second-order flexibility-based model for plastic hinge analysis of steel frames composed of tapered members. *submitted for publication*.
- [60] Chiorean, C., Tarța, G., Marchiș, I., & Buru, M. (2012). Computer-Based Nonlinear Analysis Method for Seismic Performance Assessment of 3D Steel Frameworks .
- [61] Choi, C., & Chung, G. (1996). Refined three-dimensional finite element model for end-plate connection. *J Struct Eng ASCE*, 122(11), 1307–16.
- [62] Citipitioglu, A., Haj-Ali , R., & White, D. (2002). Refined 3D finite element modeling of partially-restrained connections including slip. *J. Constructional Steel Res*, 58, 995–1013.
- [63] Cleghorn WL, T. B. (1992). Finite element formulation of a tapered Timoshenko beam for free vibration analysis. *J. of Sound & Vib*, 152(3):461–70.
- [64] Colson, A., & Louveau, J. (1983). Connections Incidence on the Inelastic Behavior of Steel Strctural. *Euromech Colloquium*, 174.
- [65] Crisfield, M. (1981). A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap-through". *Computers & Structures*, 13(1-3), 55-62.
- [66] Deierlein, G., Zhao, Y., & McGuire, W. (1991). A two surfac concentrated plasticity model for analysis of 3D framed structures. *Proc.Annu.Tech. Session: Inelastic Behaviour and Des. of Frames, Struct. Stability Res. Council* (pp. 423-432). Bethlehem, Pa.: Lehigh University.
- [67] Díaz, C., Martí, P., Victoria, M., & Querin, O. M. (2011). Review on the modelling of joint behaviour in steel frames. *Journal of Constructional Steel Research*, 67( 5): 741–758.
- [68] Dinis, A. A. (2007). Lateral-torsional buckling of singly symmetric web-tapered thin-walled I-beams: 1D model vs. shell FEA. *Computers and Structures*, 85, 1343–1359.
- [69] Dowling, P., Harding, J., Bjorhovde, R., & Martinez-Romero, E. (2005). Constructional Steel Design: World developments. *First World Conference on Constructional Steel Design* (pp. 74-78). Acapulco, Mexico: CRC Press.
- [70] Duan, L., & Chen, W. F. (1990). A yield surface equation for doubly symmetric sections. *J. Engineering Structures*, 12(2), 114-119.
- [71] Dube GP, D. P. (1996). Tapered thin open section beams on elastic foundation—vibration analysis. *Computers & Structures* , 61(5):859–69.
- [72] Dube GP, D. P. (1996). Tapered thin open section beams on elastic foundation—buckling analysis. *Tapered thin open section beams on elastic foundation—buckling analysis*, 61(5):845–57.
- [73] Eisenberg, M. (1991). Stiffness matrices for non-prismatic members including transverse shear . *Computers & Structures* , 40 ( 4). pp. 831-835.
- [74] Eisenberger , M. (1995). Non-uniform torsional analysis of variable and open cross-section bars. *Thin-walled Structures*, 21(2):93–105.
- [75] Eisenberger M. ( 1985). Explicit stiffness matrices for non-prismatic MEMBERS . *Computers & Smcrures* , 20 (4), pp. 715-720.
- [76] El-Mezaini, N., Balkaya, C., & Citipitioglu, E. (1991). . Analysis of frames with nonprismatic beam elements. *Journal of Structural Engineering ASCE* , 117 (6), 1573e1592.
- [77] Ermopoulos JC, K. A. (1985). Stability of frames with tapered built-up members. *J Eng Mech*, 11(9):1979–92.
- [78] Ermopoulos, J. (1986). Buckling of tapered bars under stepped axial loads. *J Struct Eng*, 112(6):1346–54.

- [79] Ermopoulos, J. (1988). Slope-deflection method and bending of tapered bars under stepped loads. *J Constr Steel Res*, 11(2):121–41.
- [80] Fraeijs de Veubeke, B. (1965). Displacement and equilibrium models in the finite element method. In E. b. Holister, *Stress Analysis* (pp. Chapter 9, 145–197). John Wiley & Sons.
- [81] Fraser, D. (1983). Design of tapered member portal frames. *J Constr Steel Res*, 3(3):20–6.
- [82] Frieman Z, K. J. (1992). Exact stiffness matrix of a nonuniform beam—extension, torsion and bending of a Bernoulli-Euler beam. *Computers & Structures* , 42(5):671–82.
- [83] Frye, M., & Morris, G. (1975). Analysis of flexibly connected steel frames. *Can. J. Civil Eng.*, 2(3), 280-291.
- [84] Galambos, T., & Ketter, R. (1959). Columns under combined bending and thrust. *J Eng Mech Div*, 85:1–30.
- [85] Gardner, L., & Cruise, R. (2009). Modeling of Residual Stresses in Structural Stainless Steel Sections. *Journal of Structural Engineering*, 135 (1): 42–53.
- [86] Gere, J., & Carter, W. (1962). Critical buckling loads for tapered columns. *J. of Struc. Divi*, 88(1):1–11.
- [87] Gerstle, K. (1988). Effect of connections on frames. *J. Construct. Steel Res.*, 10, 241-267.
- [88] Girijavallabhan , V. (1969). Buckling loads of nonuniform columns. (95(11):2419–31).
- [89] Goto, Y., & Chen, W. F. (1986). *On second-Order Elastic Analysis for Design*. Session on Design of Columns in Frames, ASCE, Structural Engineering Congress, New Orleans, USA.
- [90] Gu, J., & Chan, S. (2005). "Second-order analysis and design of steel structures allowing for member and frame imperfections. *Internation Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(5): 601–615.
- [91] Gupta, A. (1986). Frequent-dependent matrices for tapered beams. *J. of Struc. Engng*, 112(1):85–103.
- [92] Hadidi, A., Azar, B., & Marand, H. (2014). Second order nonlinear analysis of steel tapered beams subjected to span loading. *Advances in Mechanical Engineering*, Article ID 237983, 10 pages.
- [93] Hayalioglu, M. S., & Saka, M. P. (1992). Optimum design of geometrically nonlinear elastic-plastic steel frames with tapered members. *Computers & Structures*, 44(4): 915-924.
- [94] He, J. (2000). A review on some new recently developed nonlinear analytical techniques. *International Journal of Nonlinear Science Numerical Simulation*, 1(1) , 51-70.
- [95] He, J. (2000). Variational "iteration method – A kind of nonlinear analytical technique": some examples. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 34(4) , 699-708.
- [96] He, P., Liu, Z., & Chun, L. (2013). An improved beam element for beams with variable axial parameters. *Shock and Vibration*, 20, 601–617.
- [97] Huber, A., & Beedle , L. (1954). Residual stress and the compressive strength of steel. *Welding Journal Research Supplement* , 33(12): 589-615.
- [98] Iremonger, M. (1980). Finite difference buckling analysis of non-uniform columns . *Computers and Structures*, 12, pp741-748.
- [99] Iu, C., & Bradford, M. (2012). Higher-Order Non-Linear Analysis of Steel Structures. Part II: Refined Plastic Hinge Formulation. *Advanced Steel Construction*, 8(2):183-198.
- [100] J.H.He. (2007). Variational iteration method – some recent result and new interceptions. *journal of Copmutational and Applied Mathematics*, 207 (1), 3-17.

- [101] Jiang, X. M., Chen, H., & Liew, J. Y. (2002). Spread of Plasticity Analysis of Three-Dimensional Steel Frames. *J. Constructional Steel Research*, 58(2), 193-212.
- [102] Johnston, B., & Green, L. (1940). Flexible Welded Angle Connections. *The Welding Journal, American Welding Society*, 19(10): 402-408.
- [103] Just, D. (1977). Plane frameworks of tapering box and I-section. *J. of Struc. Divi*, 103(1):71–86.
- [104] Karabalis, D., & Beskos, D. (1983). Static, dynamic and stability analysis of structures composed of tapered beams. *Computers & Structures*, 16(6):731–48.
- [105] Kassimali, A. (1983). Large Deformation Analysis of Elasticplastic Frames. *Journal of Structural Engineering*, 10.1061/(ASCE)0733-9445(1983)109:8(1869), 1869-1886.
- [106] Kawashima, S., & Fujimoto, T. (1984). Vibration analysis of frames with semi-rigid connections. *Comput. Struct.*, 19, 85-92.
- [107] Kim, S. E., & Lee, D. H. (2002, June). Second-order Distributed Plasticity Analysis of Space Steel Frames. *J. Engineering Structures*, 24(6), 735-744.
- [108] Kim, S. E., & Lee, J. (2011, August). Improved refined plastic-hinge analysis accounting for local buckling. *Engineering Structures*, 23(8), 1031–1042.
- [109] Kim, S., Kim, Y., & Choi, S. (2001). Nonlinear analysis of 3-D steel frames. *Thin-Walled Structures*, 39(6): 445-461.
- [110] Kim, S., & Chen, W. (1996). Practical advanced analysis for unbraced steel frame design. *J Struct Eng 1996*, 122(11):1259–65.
- [111] Kim, S., & Choi, S. (2001). Practical advanced analysis for semi-rigid space frames. *Int. J. of Solids and Structures*, 38, 9111-9131.
- [112] Kim, S., & Choi, S. (2005). Practical second-order inelastic analysis for three-dimensional steel frames subjected to distributed load. *Thin-Walled Structures*, (43), 135–160.
- [113] Kim, S., Kim, M., & Chen, W. (2000). Improved refined plastic hinge analysis accounting for strain reversal. *Engineering Structures*, 22, (1),15–25.
- [114] Kim, S., Lee, J. S., Choi, S., & Kim, C. S. (2004). Practical Second-Order Inelastic Analysis for Steel Frames Subjected to Distributed Load. *J. Engineering Structures*, 26, 51-61.
- [115] Kim, S.-B., & Kim, M.-Y. (2000). Improved formulation for spatial stability and free vibration of thin-walled tapered beams and space frames. *Engineering Structures*, 22(5), Pages 446–458.
- [116] King, W. S., White, D. W., & Chen, W. F. (1991). Second-order Inelastic Methods for Steel-Frame Design. *J. Structural Engineering, ASCE*, 118(2), 408-428.
- [117] King, W., White, D., & Chen, W. (1992). Second-order inelastic analysis methods for steel-frame design. *J. Struct. Engrg., ASCE*, 118, 408-428.
- [118] Kishi, N., & Chen, W. (1990). Moment-Rotation relations of semirigid connections with angles. *J. of Struct. Eng.*, 116(7), 1813-1834.
- [119] Kitipornchai, S., & Trahair, N. (1972). Elastic stability of tapered I-beam. *Journal of the Structural Division, ASCE*, 98(ST3):713–28.
- [120] Kitipornchai, S., & Trahair, N. (1975). Elastic behavior of tapered monosymmetric I-beams. *Journal of the Structural Division*, 101(ST8):1661–78.

- [121] Krishnamurthy, N., & Graddy, D. (1976). Correlation between 2- and 3-dimensional finite element analysis of steel bolted end-plate connections. *Computers Structures*, 6(4–5), 381–9.
- [122] Krudoski BL, L. J. (1981). Stability of nonprismatic members. *Eng Struct*, 31:52–61.
- [123] Kukreti, A., & Murray, T. (1987). End plate connection moment-rotation relationship. *J. of Constr. Steel Res.*, 8: 137-157.
- [124] Lee, S. Y. (1990). Exact static deflection of a non-uniform Bernoulli-Euler beam with general elastic end restraints. *Comp. And Struc.*, 36(1), 91-97.
- [125] Leu, L., & Tsou, C. (1998). Second order analysis of planar steel frames considering spread of plasticity. *East Asia-Pacific Conf. on Struct. Engrg. and Constr.*, (pp. 109-114).
- [126] Li, G., & Li, J. (2000). Effects of shear deformation on the effective length of tapered columns with I-section for steel portal frames. *Structural Engineering and Mechanics*, 10 (5), pp.479-489.
- [127] Li, G., & Li, J. (2002). A tapered Timoshenko-Euler beam element for analysis of steel portal frames. *J.I of Constr Steel Research*, 58(12):1531–44.
- [128] Li, J. L. (2003). A second-order inelastic model for steel frames of tapered members with slender web. *Engineering Structures*, 25(8), 1033–43.
- [129] Liew, J. Y., White, D. W., & Chen, W. .. (1993a). Limit States Design of Semi-rigid Frames Using Advanced Analysis; Part 1: Connection Modeling and Classification. *Constructional Steel Research*, 26(1), 1-27.
- [130] Liew, J. Y., White, D. W., & Chen, W. .. (1993b). Limit States Design of Semi-rigid Frames Using Advanced Analysis; Part 2: Analysis and Design. *Constructional Steel Research*, 26(1), 26, 29-57.
- [131] Liew, J. Y., White, D. W., & Chen, W. F. (1994, May). Notional-Load Plastic-Hinge Method for Frame Design. *Structural Engineering*, 120(5), 1434–1454.
- [132] Liew, J., & Chen, W. (1991). Refining the plastic hinge concept for advanced analysis/design of steel frames. *Journal of Singapore Structural Steel Society, Steel Structures*, 2(1), 13-30.
- [133] Liew, J., & Chen, W. (1994). Implications of using refined plastic hinge analysis for load and resistance factor design. *Thin-Walled Structures*, 20, 17-47.
- [134] Liew, J., Chen, H., Shanmugam, N., & Chen, W. (2000). Inelastic analysis of steel frames with composite beams. *Eng Struct 2000*, 22(10),1324–38.
- [135] Liew, J., White, D., & Chen, W. (1991). Beam-column design in steel frameworks-insight on current methods and trends. *J. Constr. Steel Res.*, 18, 269-308.
- [136] Liew, J., White, D., & Chen, W. (1993). Second-order re fi ned plastic hinge analysis for frame design: part I and II. *J Struct Eng* , 119(11):3196–237.
- [137] Lipson, S. (1970). Single-angle welded-boled connections. *J. Struct. Div. ASCE*, 103(ST3), 559-571.
- [138] Liu, S., Liu, Y., & Chan, S. (2014). Direct analysis by an arbitrarily-located-plastic-hinge element — Part 1: Planar analysis. *Journal of Constructional Steel Research*, 103, 303–315.
- [139] Lowan, A., Davids, N., & Levenson, A. (1942). Table of the zeros of the Legendre Polynomials of order 1-16 and the weight coefficients for Gauss' Mechanical Quadrature Formula. *Bulletin of American Mathematical Society*, 48, pp.739-743.

- [140] Lui, E. M., & Chen, W. F. (1987). Effects of Joint Flexibility on the Behavior of Steel Frames. *J. Computers & Structures*, 26(5), 719-732.
- [141] Lui, E., & Chen, W. (1986). Analysis and behaviour of flexibly-jointed frames. *Eng. Struct.*, 8, 107-118.
- [142] Lui, E., & Chen, W. (1988). Behavior of braced and unbraced semi-rigid frames. *Int. J. Solids Struct.*, 24(9), 893-913.
- [143] McNamee, B., & Lu, L.-W. (1972). Inelastic multistory frame buckling. *J. of Struct. Eng. Div., ASCE*, 98(7), pp.1613-31.
- [144] Monforton, G., & Wu, T. (1963). Matrix analysis of semi-rigidly connected steel frames. *ASCE Struct. Div.*, 89, 13-42.
- [145] Nader, M., & Astanteh, A. (1991). Dynamic behaviour of flexible , semirigid and rigid steel frames. *J. Construc. Steel Res.*, 18, 179-192.
- [146] Nagy, Z., & Cristutiu, I. (2010). Initial imperfection influences on the structural behavior of steel portal frames with variable cross sections and some sustainability considerations – case study. *6th WSEAS International Conference on Energy, environment, ecosystems and sustainable development (eesd '10) 3rd Wseas international conference on landscape architecture (la '10)*, (p. p21). Timisoara.
- [147] Nguyen, P., Huu, C., & Kim, S. (2011). Nonlinear static behavior of space semi-rigid steel frames using plastic-hinge analysis. *The 6th International Symposium on Steel Structures*. Seoul, Korea.
- [148] Oran, C. ( 1973). Tangent-stiffness in plane frames. *J. Struct. Div.*, 99(6), 973–985.
- [149] Oran, C. (1974). Geometric nonlinearity in nonprismatic members. *J Struct Div*, 100(7):1473–88.
- [150] Oran, C., & Kassimali, A. (1976). Large deformations of framed-structures under static and dynamic loads. *Int. J. Computers &Struct.*, 6,539–547.
- [151] Orbison, J. G., McGuire, W., & Abel, J. F. (1982). Yield surface applications in nonlinear steel frame analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 33(1), 557-573.
- [152] Polyzois, D., & Qing, L. (1993). Stability of web-tapered beams. *Proceedings of the structural stability research council annual technical session and meeting*, p. 179–92.
- [153] Polyzois, D., & Raftoyiannis, I. (1998). Lateral-torsional stability of steel web tapered I-beams. *J Struct Eng (ASCE)*, 124 (10):1208–16.
- [154] Powel, G., & Chen, P. (1986). 3D beam-column element with generalized plastic hinges. *J. Engrg. Mech., ASCE*, 12(7), 627-641.
- [155] Quarteroni, A., Sacco, R., & Saleri, F. (2000). Numerical Mathematics. New York: Springer-Verlag, ISBN 0-387-98959-5.
- [156] Raftoyiannis, I. G., & Ermopoulos, J. C. (2005). Stability of tapered and stepped steel columns with initial imperfections. *Engineering Structures*, 27, 1248–1257.
- [157] Rajasekaran, S. (1994). Instability of tapered thin-walled beams of generic section. *J Eng Mech*, 120(8):1630–40.
- [158] Rezaiee-Pajand, M., Shahabian, F., & Bambaeechee, M. (2015). Buckling analysis of semi-rigid gabled frames. *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 55, No. 3, 605-638.
- [159] Richard, R., & Abbott, B. (1975). Versatile elastic-plastic stress-strain formula. *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, 101(4), 511-515.

- [160] Riks, E. (1979). An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *Int. J. Solids Struct.*, 15(7), 529-551.
- [161] Ronagh, H., Bradford, M., & Attard, M. (2000). Nonlinear analysis of thin-walled members of variable cross-section, part I: Theory. *Computers and Structures*, 77:285–99.
- [162] Ronagh, H., Bradford, M., & Attard, M. (2000). Nonlinear analysis of thin-walled members of variable cross-section Part II: application. *Computers and Structures*, 77:301–13.
- [163] SA. (1998). *AS4100 - Steel Structures*. Standards Association of Australia, Sydney, Australia.
- [164] Sapalas, V., & Kvedaras, A.-K. (2000). Stability of axially loaded tapered columns . *Statyba (Civil Engineering)*, Vol 6(3), p.158-161 (in Lithuanian).
- [165] Sapountzakis, E., & Kampitsis, A. (2011). Nonlinear analysis of shear deformable beam-columns partially supported on tensionless three-parameter foundation. *Arch Appl Mech*, DOI 10.1007/s00419-011-0521-4.
- [166] Sapountzakis, E., & Mokos, V. (2007). Shear deformation effect in nonlinear analysis of spatial composite beams subjected to variable axial loading by bem. *Acta Mechanica* , 193, pp. 43–65.
- [167] Sapountzakis, E., & Panagos, D. (2008). Nonlinear analysis of beams of variable cross section, including shear deformation effect. *Arch Appl Mech*, 78, pp. 687–710.
- [168] Sherbourne, A., & Bahaari, M. (1994). 3D Simulation of end-plate bolted connections. *J. of Struct. Eng.*, 120(11), 3122-3136.
- [169] Sherbourne, A., & Bahaari, M. (1997a). Finite element prediction of end plate bolted connection behavior I : parametric study. *Journal of Structural Engineering*, 123 (2), 157-164.
- [170] Shooshtari, A., & Khajavi, R. (2010). An efficient procedure to find shape functions and stiffness matrices of nonprismatic EulerBernoulli and Timoshenko beam elements. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 29, 826-836.
- [171] Sivakumaran, K. (1988). Seismic response of multi-storey steel buildings with flexible connection. *Eng. Struct.*, 10, 239-248.
- [172] Soltani, M., & Mohri, F. (2014). Stability and vibration analyses of tapered columns resting on one or two-parameter elastic foundations . *Numerical Methods in Civil Engineering*, 3; 1 (2) :57-66.
- [173] Soltani, M., Asgarian, B., & Mohri, F. (2014). Elastic instability and free vibration analyses of tapered thin-walled. *J of Constr Steel Res*, 96, 106–126.
- [174] Stelmack, T., Marley, M., & Gerstle, K. (1986). Analysis and tests of flexibly connected steel frames. *J. Struct. Eng. ASCE*, 112(7), 1573-1588.
- [175] Szalai, J., & Papp, F. (2005). A new residual stress distribution for hot-rolled I-shaped sections. *J Constr Steel Res* , 61:845–61.
- [176] To, C. (1981). A linearly tapered beam finite element incorporating shear deformation and rotary inertia for vibration analysis. *J of Sound & Vib*, 78(4):475–84.
- [177] Toma, S., & Chen, W. F. (1992). European Calibration Frames for Second-Order Inelastic Analysis. *J. Engineering Structures*, 14(1), 7-14.
- [178] Tong GS, Z. L. (2003). An analysis of current stability theories of thin-walled members. *Advances in Struct Eng*, 6(4):283–92.

- [179] Turner, M., Clough, R., Martin, H., & Topp, L. (1956). Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 23( 9): 805–823, 854.
- [180] Valipour, H., & Bradford, M. (2012). A new shape function for tapered three-dimensional beams with flexible connections. *Journal of Constructional Steel Research*, 70, 43–50.
- [181] Wekezer, J. (1985). Instability of thin-walled bars. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 111(7):923–35.
- [182] Wekezer, J. (1989). Vibrational analysis of thin-walled bars with open cross sections. *J of Struc Engng*, 115(12):2965–78.
- [183] Wong, M. B. (1996). Effects of Linearly Varying Distributed Load on the Collapse Behavior of Frames. *Computers and Structures*, 61(5), 909-914.
- [184] Wong, M., & Tin-Loi, E. (1990). "Geometrically Nonlinear Analysis of Elastic Framed Structures. *Computers & Structures*, 34(4): 633-640.
- [185] Wright, E., & Gaylord, E. H. (1968). Analysis of Unbraced Multistory Steel Rigid Frames. *Struct. Div., ASCE*, 94(5), 1143-1163.
- [186] Yang, Y., & Yau, J. (1987). Stability of beams with tapered I-sections. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 113(9):1337–57.
- [187] Yau, J.-D. (2006). Stability of tapered I-beams under torsional moments. *Finite Elements in Analysis and Design*, 42 (10), p. 914–927.
- [188] Zeinali, Y. H., Jamali, S. M., & Musician, S. (2013). General form of the stiffness matrix of a tapered beam-column. *International Journal of Mining, Metallurgy & Mechanical Engineering*, 1(2).
- [189] Ziemian, R. (1992). A verification study for methods of second order inelastic analysis. *Annu. Tech. Session, Struct. Stability Res. Council*, (pp. 315-326). Pittsburgh, Pennsylvania.
- [190] Ziemian, R., McGuire, W., & Deierlein, G. (1992b). Inelastic limit states design: Part II, Three-dimensional frame study. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 118(9): 2550-2568.
- [191] Ziemian, R., McGuire, W., & Deierlein, G. (1992a). "Inelastic limit states design: part I, planar frame studies. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 118(9): 2532-2549.
- [192] Zubydan, A. (2010). A simplified model for inelastic second order analysis of planar frames. *Engineering Structures*, 32, 3258–3268.
- [193] Zubydan, A. (2011). Inelastic second order analysis of steel frame elements flexed about minor axis. *Engineering Structures*, 33, 1240–1250.
- [194] Zubydan, A. (2013). Inelastic large deflection analysis of space steel frames including H-shaped cross sectional members. *Engineering Structures*, 48, 155–165.



- Surse de documentare electronice -

- [1] *Enadu General Beton*. (fără an). Preluat pe 07 18, 2015, de pe Enadu General Beton: <http://enadu.ro/wp-content/uploads/2012/04/hale-industriale-1024x768.jpg>
- [2] *Wikipedia*. (fără an). Preluat pe 07 18, 2015, de pe [https://en.wikipedia.org/wiki/Burj\\_Khalifa](https://en.wikipedia.org/wiki/Burj_Khalifa)
- [3] *Wikipedia*. (fără an). Preluat pe 07 18, 2015, de pe [https://en.wikipedia.org/wiki/Structural\\_engineering](https://en.wikipedia.org/wiki/Structural_engineering)
- [4] Winckel, G. v. (fără an). Preluat pe 03 15, 2015, de pe [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com): <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/4540-legendre-gauss-quadrature-weights-and-nodes/content/lgwt.m>
- [5] Winckel, G. v. (fără an). Preluat pe 03 15, 2015, de pe <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/4540-legendre-gauss-quadrature-weights-and-nodes/content/lgwt.m>
- [6] Winckel, G. v. (fără an). *Gauss-Lobatto-nodes-and-weights*. Preluat pe 03 15, 2015, de pe Mathworks: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/4775-legendre-gauss-lobatto-nodes-and-weights>
- [7] Winckel, G. v. (fără an). *Legendre-Gauss-quadrature-weights-and-nodes*. Preluat pe 03 15, 2015, de pe Mathworks: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/4540-legendre-gauss-quadrature-weights-and-nodes/content/lgwt.m>
- [8] *World Stadiums*. (fără an). Preluat pe 07 18, 2015, de pe [http://www.worldstadiums.com/stadium\\_menu/architecture/stadium\\_design/beijing\\_national.shtml](http://www.worldstadiums.com/stadium_menu/architecture/stadium_design/beijing_national.shtml)

- ANEXE -

**Anexa A**

Funcțiile de stabilitate  $c_1, c_2$  propuse de (Oran, 1973) și  $c_0$  (Chan & Gu, 2000)

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \begin{cases} \frac{v \sin(v) - v^2 \cos(v)}{2 - 2 \cos(v) - v \sin(v)} & \text{pentru } N < 0 \\ \frac{v^2 \cosh(v) - v \sinh(v)}{2 - 2 \cos(v) + v \sin(v)} & \text{pentru } N > 0 \end{cases} \\
 c_2 &= \begin{cases} \frac{v^2 - v \sin(v)}{2 - 2 \cos(v) - v \sin(v)} & \text{pentru } N < 0 \\ \frac{v \sinh(v) - v^2}{2 - 2 \cos(v) + v \sin(v)} & \text{pentru } N > 0 \end{cases} \\
 c_0 &= \frac{q\pi}{1-q}(c_1 - c_2)
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Funcțiile de curbură  $b_1, b_2$  propuse de (Oran, 1973) și (Chan & Gu, 2000)

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{(c_1 + c_2)(c_2 - 2)}{8\pi^2 q} = -\frac{c'_1 + c'_2}{4\pi^2} \\
 b_2 &= \frac{c_2}{8(c_1 + c_2)} = -\frac{c'_1 - c'_2}{4\pi^2} \\
 b_{vs} &= \frac{c_1 - c_2}{\pi(1-q)^2} - \frac{c_2 c_0}{2(c_1 + c_2)(c_1 - c_2)} = \frac{c_1 - c_2}{\pi(1-q)^2} - \frac{4b_2 c_0}{c_1 - c_2} \\
 b_{vv} &= \frac{\pi^2 q(2-q)}{4(1-q)^2} - \frac{2c_0}{\pi(1-q)^2} + \frac{c_2 c_0^2}{2(c_1 + c_2)(c_1 - c_2)^2} = \frac{\pi^2 q(2-q)}{4(1-q)^2} - \frac{2c_0}{\pi(1-q)^2} + \frac{4\pi^2 q^2 b_2}{(1-q)^2}
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

Derivatele funcțiilor de stabilitate și de curbură, în raport cu  $q$  (Oran, 1973), (Kassimali, 1976)

$$\begin{aligned}
 c'_1 &= -2\pi^2(b_1 + b_2) \\
 c'_2 &= -2\pi^2(b_1 - b_2) \\
 c'_0 &= \frac{c_0}{q(1-q)} + \frac{q\pi(c'_1 - c'_2)}{(1-q)} \\
 b'_1 &= \frac{(b_1 - b_2)(c_1 + c_2) + 2c_2 b_1}{4q} \\
 b'_2 &= \frac{\pi^2(16b_1 b_2 - b_1 + b_2)}{4(c_1 + c_2)}
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

## Anexa B

Pentru o bară plastificată la capătul “i”:

$$k_{r,ep} = \begin{bmatrix} -\frac{k_{12}^2 - k_{11}k_{22}}{k_{11}e^2 - 2k_{12}e + k_{22}} & -\frac{e(k_{12}^2 - k_{11}k_{22})}{k_{11}e^2 - 2k_{12}e + k_{22}} & -\frac{k_{12}k_{23} - k_{13}k_{22} + e(k_{12}k_{13} - k_{11}k_{23})}{k_{11}e^2 - 2k_{12}e + k_{22}} \\ \text{sim} & -\frac{e^2(k_{12}^2 - k_{11}k_{22})}{k_{11}e^2 - 2k_{12}e + k_{22}} & -\frac{e(k_{12}k_{23} - k_{13}k_{22}) + e^2(k_{12}k_{13} - k_{11}k_{23})}{k_{11}e^2 - 2k_{12}e + k_{22}} \\ & & -\frac{k_{23}^2 - k_{22}k_{33} + e(2k_{12}k_{33} - 2k_{13}k_{23}) + e^2(k_{13}^2 - k_{11}k_{33})}{k_{11}e^2 - 2k_{12}e + k_{22}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Pentru o bară plastificată la capătul “j”:

$$k_{r,ep} = \begin{bmatrix} -\frac{k_{13}^2 - k_{11}k_{33}}{k_{11}e^2 - 2k_{13}e + k_{33}} & -\frac{k_{13}k_{23} - k_{12}k_{33} + e(k_{12}k_{13} - k_{11}k_{23})}{k_{11}e^2 - 2k_{13}e + k_{33}} & -\frac{e(k_{13}^2 - k_{11}k_{33})}{k_{11}e^2 - 2k_{13}e + k_{33}} \\ \text{sim} & k_{22} - \frac{(k_{23} - k_{12}e)^2}{k_{11}e^2 - 2k_{13}e + k_{33}} & -\frac{e(k_{13}k_{23} - k_{12}k_{33}) + e^2(k_{12}k_{13} - k_{11}k_{23})}{k_{11}e^2 - 2k_{13}e + k_{33}} \\ & & -\frac{e^2(k_{13}^2 - k_{11}k_{33})}{k_{11}e^2 - 2k_{13}e + k_{33}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Pentru o bară având două articulații plastice :

$$k_{r,ep} = \begin{bmatrix} \frac{\mathcal{K}}{NUM} & \frac{f_1(e)\mathcal{K}}{NUM} & \frac{f_2(e)\mathcal{K}}{NUM} \\ \frac{f_1(e)^2\mathcal{K}}{NUM} & \frac{f_2(e)f_2(e)\mathcal{K}}{NUM} & \\ \text{sim} & \frac{f_2(e)^2\mathcal{K}}{NUM} & \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Unde:

$$\mathcal{K} = k_{33}k_{12}^2 - 2k_{12}k_{13}k_{23} + k_{22}k_{13}^2 + k_{11}k_{23}^2 - k_{11}k_{22}k_{33}$$

$$NUM = k_{12}^2f_2(e)^2 - 2k_{12}k_{13}f_1(e)f_2(e) - 2k_{12}k_{23}f_2(e) + 2k_{33}k_{12}f_1(e) + k_{13}^2f_1(e)^2 - 2k_{13}k_{23}f_1(e) + \\ + 2k_{22}k_{13}f_2(e) + k_{23}^2 + 2k_{11}k_{23}f_1(e)f_2(e) - k_{11}k_{33}f_1(e)^2 - k_{11}k_{22}f_2(e)^2 - k_{22}k_{33}$$

$$T_c = \begin{bmatrix} 1 \\ f_1(e) \\ f_2(e) \end{bmatrix}, \text{ în funcție de secțiunile plastificate}$$

## Anexa C

Valorile coeficienților  $M_{r1}, E_{tr1}, r_1, r_2, r_3$  propuși de Zubyan (2010)

- **Pentru secțiune cu profil H**

$$r_3 = 1 \text{ pentru } P_r \leq 0.15 \quad (\text{C.1a})$$

$$r_3 = 1 - 0.3(P_r - 0.15)^{0.1} \text{ pentru } 0.15 < P_r \leq 0.25 \quad (\text{C.1b})$$

$$r_3 = 0.7 \text{ pentru } P_r > 0.25 \quad (\text{C.1c})$$

*Fără tensiuni reziduale*

$$M_{r1} = -0.96P_r + 0.97 \quad (\text{C.2a})$$

$$E_{r1} = 3.12P_r + 0.06 \text{ pentru } P_r \leq 0.05 \quad (\text{C.2b})$$

$$E_{r1} = 0.22 \text{ pentru } 0.05 < P_r \leq 0.67 \quad (\text{C.2c})$$

$$E_{r1} = -0.62P_r \text{ pentru } P_r > 0.67 \quad (\text{C.2d})$$

$$r_1 = r_2 = 1 \quad (\text{C.2e})$$

*Cu tensiuni reziduale*

$$M_{r1} = -4.37P_r^2 + 0.14P_r + 0.98 \text{ pentru } P_r \leq 0.15 \quad (\text{C.3a})$$

$$M_{r1} = -1.06P_r + 1.07 \text{ pentru } P_r > 0.15 \quad (\text{C.3a})$$

$$E_{r1} = 0.04 \text{ pentru } P_r \leq 0.04 \quad (\text{C.3b})$$

$$E_{r1} = 0.04 [1 - (P_r - 0.4)/0.6] \text{ pentru } P_r > 0.4 \quad (\text{C.3c})$$

$$r_1 = 1.5 - 0.3(P_r/P_{r0})^3 \text{ pentru } P_r \leq P_{r0} \quad (\text{C.3d})$$

$$r_1 = 1.2 + 0.8(P_r - P_{r0})/(0.75 - P_{r0}) \text{ pentru } P_{r0} < P_r \leq 0.75 \quad (\text{C.3e})$$

$$r_1 = 2 \text{ pentru } P_r > 0.75 \quad (\text{C.3f})$$

$$r_2 = 1.5 + 1.5P_r/P_{r0} \text{ pentru } P_r \leq P_{r0} \quad (\text{C.3g})$$

$$r_2 = 3 \text{ pentru } P_r > P_{r0} \quad (\text{C.3h})$$

- **Pentru secțiune cu profil I**

$$r_3 = 1 \text{ pentru } P_r \leq 0.2 \quad (\text{C.4a})$$

$$r_3 = 1 - 0.3(P_r - 0.2) \text{ pentru } 0.2 < P_r \leq 0.3 \quad (\text{C.4b})$$

$$r_3 = 0.7 \text{ pentru } P_r > 0.3 \quad (\text{C.4c})$$

*Fără tensiuni reziduale*

$$M_{r1} = -0.91P_r + 0.93 \quad (C.5a)$$

$$E_{r1} = 5.04P_r + 0.13 \text{ pentru } P_r \leq 0.05 \quad (C.5b)$$

$$E_{r1} = -0.14P_r + 0.39 \text{ pentru } 0.05 < P_r \leq 0.67 \quad (C.5c)$$

$$E_{r1} = -0.89P_r + 0.91 \text{ pentru } P_r > 0.67 \quad (C.5d)$$

$$r_1 = r_2 = 1 \quad (C.5e)$$

*Cu tensiuni reziduale*

$$M_{r1} = -2.9P_r^2 + 0.36P_r + 0.95 \text{ pentru } P_r \leq 0.15 \quad (C.6a)$$

$$M_{r1} = -1.1P_r + 1.11 \text{ pentru } P_r > 0.15 \quad (C.6a)$$

$$E_{r1} = 0.08 \text{ pentru } P_r \leq 0.04 \quad (C.6b)$$

$$E_{r1} = 0.08 [1 - (P_r - 0.4)/0.6] \text{ pentru } P_r > 0.4 \quad (C.6c)$$

$$r_1 = 1.6 - 0.3(P_r - 0.15)/(P_{r0} - 0.15) \text{ pentru } 0.15 < P_r \leq P_{r0} \quad (C.6d)$$

$$r_1 = 1.2 + 0.8(P_r - P_{r0})/(0.75 - P_{r0}) \text{ pentru } P_{r0} < P_r \leq 0.75 \quad (C.6e)$$

$$r_1 = 2 \text{ pentru } P_r > 0.75 \quad (C.6f)$$

$$r_2 = 1.5 + 1.5(P_r/P_{r0})^2 \text{ pentru } P_r \leq P_{r0} \quad (C.6g)$$

$$r_2 = 3 \text{ pentru } P_r > P_{r0} \quad (C.6h)$$

## Anexa D

### Metode numerice de integrare

#### D1. Metoda Simpson 3/8

Regula 3/8 a lui Simpson este o metoda numerică bazată pe interpolare cubică. Punctele de diviziune sunt echidistante pe domeniul de integrare (Fig. D.0.1) iar rețeaua de puncte de integrare surprinde și capetele intervalului. Deși metoda Gauss-Legendre este mai eficientă, din punct de vedere al numărului de puncte de integrare utilizate, în programele de analiză neliniară metoda Simpson este mai des utilizată (Bathe K.-J. , 1996).

Avem funcția  $f: [a, b] \rightarrow R$ , integrabilă.

Pentru a calcula

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (D.1)$$

aproximăm funcția  $f(x)$  cu un polinom de gradul 3 astfel:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (D.2)$$

Coeficienții  $a_0, a_1, a_2, a_3$  pot fi calculați prin rezolvarea sistemului compus din funcțiile exprimate în punctele de diviziune cunoscute:

$$\begin{cases} f(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 \\ f(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 \\ f(x_2) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 \\ f(x_3) = a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \end{cases} \quad (D.3)$$

Unde

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_1 = a + h = a + \frac{b-a}{3} \\ x_2 = a + 2h = a + 2\frac{b-a}{3} \\ x_3 = a + 3h = a + 3\frac{b-a}{3} = b \end{cases}$$

pentru  $h = \frac{b-a}{3}$ .

Reprezentarea geometrică a funcției approximate  $f^*(x)$  este redată în Fig. D.0.1.

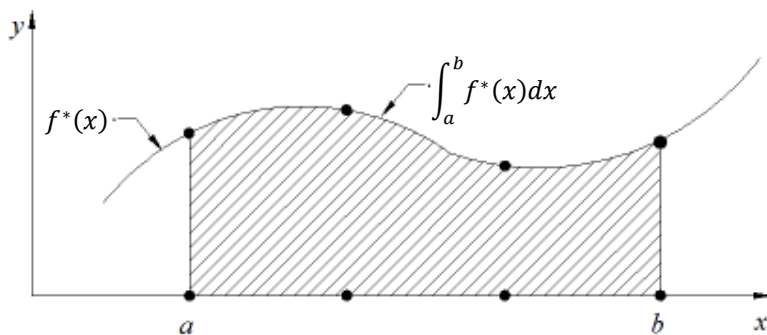


Fig. D.0.1 Funcția cubică  $f^*(x)$  pentru metoda de integrare Simpson

Prin urmare integrala funcției  $f(x)$  poate fi calculată cu următoarea expresie:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \frac{[f(a) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]}{8} \quad (D.4)$$

$$= \frac{3h}{8} \left[ f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right]$$

Eroarea metodei poate fi exprimată astfel:

$$E = \left| \frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(\xi) \right| \quad (D.5)$$

unde  $a \leq \xi \leq b$ .

Urmând același raționament regula 3/8 a lui Simpson poate fi extinsă pentru "n" intervale.

Astfel avem:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) + 3f(x_4) + 3f(x_5) + 2f(x_6) + \dots + f(x_n)] \quad (D.6)$$

unde

n este numărul de intervale echidistante multiplu de 3;

$$h = \frac{b-a}{n};$$

$$x_i = a + ih.$$

## D2. Cuadratura Gauss – Legendre

Spre deosebire de regula lui Simpson în care pasul de integrare este considerat constant iar rețeaua de noduri de integrare conține și capetele intervalului, la cuadratura lui Gauss-Legendre punctele de integrare nu sunt echidistante iar capetele intervalului sunt excluse. Totuși, această metodă utilizează mai puține puncte de integrare decât cuadratura Newton-Cotes pentru a surprinde același grad de acuratețe. Motivul principal îl constituie alegerea optimizată a punctelor

de diviziune care constituie rădăcinile polinoamelor ortogonale Legendre. Se cunoaște că metoda Gauss-Legendre este mai eficientă în analizele cu element finit (Bathe K.-J. , 1996).

Astfel, pentru funcția  $f(x)$ , definită și integrabilă pe intervalul  $[-1,1]$  regula de integrare Gauss-Legendre are forma:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (D.7)$$

unde punctele  $x_i$  sunt rădăcinile polinomului ortogonal iar  $w_i$  sunt coeficienții sau ponderile formulei de cuadratură.

Polinoamele lui Legendre sunt definite pe intervalul  $[-1,1]$  și au următoarea formulă de recurență:

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x)$$

$$P_0(x) = 1; \quad P_1(x) = x \quad (D.8)$$

În tabelul (D.0.1) sunt date expresiile analitice ale polinoamelor pentru gradele  $n = 2,3,4,5,6,7,8$ , care se găsesc în literatura de specialitate (Abramowitz & Stegun, 1972).

Tabel D.0.1 Expresiile polinoamele Legendre pentru  $n = 2 \dots 8$

n	$P_n(x)$
1	x
2	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
5	$\frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$
6	$\frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$
7	$\frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$
8	$\frac{1}{128}(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35)$

Ponderile pot fi calculate cu formula de recurență propusă de (Hildebrand, 1956) astfel:

$$w_i = \frac{2}{(1-x_i^2)[P_n'(x_i)]^2} = \frac{2(1-x_i^2)}{(n+1)^2[P_{n+1}(x_i)]^2} \quad (D.9)$$

Rădăcinile polinoamelor Legendre  $x_i$  și ponderile cuadraturii  $w_i$  au fost evaluate, de-alungul anilor, de numeroși cercetători (Lowan, Davids, & Levenson, 1942), (Beyer, 1987),



(Chandrasekhar, 1960). Valorile lor se găsesc în literatura de specialitate și sunt prezentate în Tabel D.0.2.

Dacă avem funcția  $f: [a, b] \rightarrow R$ , integrabilă.

Pentru a calcula  $I = \int_a^b f(x)dx$  se face schimbarea de variabilă astfel:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}z; & dx &= \frac{b-a}{2}dz \\ x = a &\Rightarrow z = -1; & z = b &\Rightarrow z = 1 \end{aligned} \quad (D.10)$$

Astfel integrala devine:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}z\right) dz \quad (D.11)$$

Aplicând regula de integrare Gauss-Legendre putem calcula integrala funcției cu următoarea expresie:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}z_i\right) \quad (D.12)$$

unde  $f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}z\right)$  este funcția aproximată având ca puncte de interpolare rădăcinile  $z_i$  ale polinoamelor Legendre.

Tabel D.0.2 Valori abscise și ponderi pentru cuadratura Gauss –Legendre ( $n = 2 \dots 8$ )

n	$z_i$	$w_i$
2	$\pm 0,57735027$	1
3	$\pm 0,77459667$	0,55555556
	0,00000000	0,88888889
4	$\pm 0,86113631$	0,34785484
	$\pm 0,33998104$	0,65214516
5	$\pm 0,90617985$	0,23692688
	$\pm 0,53846931$	0,47869868
	0,00000000	0,56888889
6	$\pm 0,93246951$	0,17132450
	$\pm 0,66120939$	0,36076158
	$\pm 0,23861919$	0,46791394
7	$\pm 0,94910791$	0,12948496
	$\pm 0,74153119$	0,27970540
	$\pm 0,40584515$	0,38182006
	0,00000000	0,41795918
8	$\pm 0,96028986$	0,10122854
	$\pm 0,79666648$	0,22238104
	$\pm 0,52553242$	0,31370664
	$\pm 0,18343464$	0,36268378

Pentru o funcție care are  $2n$  derivate, termenul eroare al cuadraturii a fost determinat de (Kahaner, Moler, & Nash, 1989):

$$E = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi) \quad (D.13)$$

unde  $-1 \leq \xi \leq 1$ .

### D3. Cuadratura Gauss – Lobatto

La fel ca în cazul metodei Gauss-Legendre, punctele de diviziune reprezintă rădăcinile unor polinoame Legendre. În plus rețeaua de puncte de integrare surprinde și frontiera domeniului de integrare. Metoda are o precizie bună pentru polinoame cu gradul până la  $2n-1$  unde  $n$  este numărul de puncte de integrare (Quarteroni, Sacco, & Saleri, 2000).

Dacă avem funcția  $f(x)$  definită și integrabilă pe intervalul  $[-1,1]$ , regula de integrare Gauss-Lobatto are forma:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx w_1 f(-1) + \sum_{i=2}^{n-1} w_i f(x_i) + w_n f(1) \quad (D.14)$$

unde punctele  $x_i, i = 2 \dots (n-1)$  sunt rădăcinile polinomului  $P'_{n-1}(x)$ , unde  $P(x)$  este polinomul Legendre iar  $w_i$  sunt coeficienții sau ponderile formulei de cuadratură.

Ponderile pot fi calculate cu formula de recurență astfel:

$$w_i = \frac{2n}{(1-x_i^2)P''_{n-1}(x_i)P'_n(x_i)} = \frac{2}{n(n-1)[P_{n-1}(x_i)]^2} \text{ pentru } i = 2 \dots (n-1) \quad (D.15)$$

iar

$$w_{1,n} = \frac{2}{n(n-1)} \text{ pentru } i = 1 \text{ respectiv } n.$$

Rădăcinile polinoamelor Legendre  $x_i$  și ponderile cuadraturii  $w_i$  au fost evaluate, de-a lungul anilor, de numeroși cercetători (Beyer, 1987), (Chandrasekhar, 1960). Valorile lor se găsesc în literatura de specialitate și sunt prezentate în Tabel D.0.3.

Tabel D.0.3 Valori abscise și ponderi pentru cuadratura Gauss – Lobatto ( $n = 3 \dots 8$ )

n	$x_i$	$w_i$
3	$\pm 1,00000$	0,333333
	0,00000	1,333333
4	$\pm 1,000000$	0,166667
	$\pm 0,447214$	0,833333
5	$\pm 1,000000$	0,100000
	$\pm 0,654654$	0,544444
	0,000000	0,711111
6	$\pm 1,000000$	0,066667
	$\pm 0,765055$	0,378475
	$\pm 0,285232$	0,554858

	± 1,000000	0,047619
	± 0,830224	0,276826
7	± 0,468848	0,431745
	0,000000	0,487619
	± 1,000000	0,035714
	± 0,871740	0,210704
8	± 0,591700	0,341123
	± 0,2092299	0,412459

Eroarea cuadraturii este exprimată prin termenul:

$$E = -\frac{n(n-1)^3 2^{2n-1} [(n-2)!]^4}{(2n-1)[(2n-2)!]^3} f^{(2n-2)}(\xi) \quad (\text{D.16})$$

unde  $-1 \leq \xi \leq 1$ .

## Anexa E

Coefficienții matricei de rigiditate pentru bara cu secțiune circulară variabilă, considerând raportul secțiunilor transversale de capăt  $\beta = 2.5$  pentru diferite valori ale coeficientului de încărcare axială  $\lambda_B$  (valorile pozitive indicând compresiune).

Tabel E.0.4 Valorile coeficientului de rigiditate  $s_{11}$

$\lambda_B$	Metoda	Număr de termeni în seria de puteri, NTF					
		10	20	30	40	70	80
-16.0	Al-Sader (2004)	109.44580	104.62840	103.77110	103.62730	103.60870	103.60870
	Modelul propus	105.04075	103.79950	103.62769	103.61014	103.60878	103.60878
-14.0	Al-Sader (2004)	105.17210	100.32610	99.49845	99.37091	99.35600	99.35599
	Modelul propus	100.68239	99.52009	99.37068	99.35699	99.35603	99.35603
-12.0	Al-Sader (2004)	100.69440	95.82722	95.03672	94.92635	94.91483	94.91483
	Modelul propus	96.12497	95.05161	94.92570	94.91549	94.91486	94.91486
-10.0	Al-Sader (2004)	95.99194	91.10531	90.36197	90.26963	90.26115	90.26115
	Modelul propus	91.34465	90.37028	90.26871	90.26156	90.26117	90.26117
-8.0	Al-Sader (2004)	91.04259	86.12792	85.44521	85.37160	85.36578	85.36578
	Modelul propus	86.31072	85.44740	85.37058	85.36600	85.36579	85.36579
-6.0	Al-Sader (2004)	85.82235	80.85441	80.25097	80.19650	80.19291	80.19291
	Modelul propus	80.98204	80.24798	80.19557	80.19302	80.19292	80.19292
-4.0	Al-Sader (2004)	80.30576	75.23281	74.73527	74.69983	74.69798	74.69798
	Modelul propus	75.30114	74.72878	74.69912	74.69801	74.69798	74.69798
-2.0	Al-Sader (2004)	74.46608	69.19507	68.84269	68.82523	68.82458	68.82458
	Modelul propus	69.18386	68.83569	68.82486	68.82459	68.82458	68.82458
0.0	Al-Sader (2004)	68.27572	62.64943	62.50225	62.50003	62.50000	62.50000
	Modelul propus	62.50000	62.50000	62.50000	62.50000	62.50000	62.50000
2.0	Al-Sader (2004)	61.70692	55.46755	55.62116	55.62845	55.62843	55.62843
	Modelul propus	55.03409	55.63307	55.62855	55.62843	55.62843	55.62843
4.0	Al-Sader (2004)	54.73266	47.46178	48.07541	48.08104	48.08042	48.08042
	Modelul propus	46.39738	48.11865	48.08061	48.08041	48.08042	48.08042
6.0	Al-Sader (2004)	47.32801	38.34155	39.69481	39.67746	39.67575	39.67575
	Modelul propus	35.80046	39.80156	39.67501	39.67571	39.67576	39.67576
8.0	Al-Sader (2004)	39.47186	27.62208	30.23856	30.15740	30.15447	30.15447
	Modelul propus	21.33355	30.47094	30.14964	30.15435	30.15447	30.15447
10.0	Al-Sader (2004)	31.14923	14.40867	19.35332	19.12822	19.12488	19.12488
	Modelul propus	-3.20470	19.83500	19.10808	19.12471	19.12489	19.12489
12.0	Al-Sader (2004)	22.35412	-3.20593	6.49734	5.96461	5.96415	5.96415
	Modelul propus	-76.57838	7.48293	5.91640	5.96407	5.96416	5.96416
14.0	Al-Sader (2004)	13.09308	-30.30680	-9.20643	-10.40130	-10.38910	-10.38910
	Modelul propus	400.86546	-7.17274	-10.51451	-10.38847	-10.38909	-10.38909
16.0	Al-Sader (2004)	3.38921	-87.33670	-29.27920	-31.97090	-31.91740	-31.91740
	Modelul propus	98.13274	-24.98310	-32.24417	-31.91389	-31.91739	-31.91739

Tabel E.0.5 Valorile coeficientului de rigiditate  $s_{12}$

$\lambda_B$	Metoda	Număr de termeni în seria de puteri, NTF					
		10	20	30	40	70	80
-16.0	Al-Sader (2004)	19.32612	11.32612	9.88539	9.64385	9.61258	9.61257
	Modelul propus	7.43588	9.11876	9.54373	9.60619	9.61261	9.61261
-14.0	Al-Sader (2004)	18.84997	11.33661	10.04005	9.84041	9.81706	9.81053
	Modelul propus	7.82619	9.40079	9.76481	9.81266	9.81708	9.81708
-12.0	Al-Sader (2004)	18.42119	11.36968	10.22595	10.06636	10.04969	10.04969
	Modelul propus	8.26155	9.71035	10.01190	10.04684	10.04971	10.04971
-10.0	Al-Sader (2004)	17.96888	11.43116	10.44932	10.32739	10.31618	10.31618
	Modelul propus	8.74688	10.05204	10.29056	10.31448	10.31619	10.31620
-8.0	Al-Sader (2004)	17.49013	11.52882	10.71813	10.63068	10.62376	10.62376
	Modelul propus	9.28993	10.43155	10.60793	10.62285	10.62377	10.62377
-6.0	Al-Sader (2004)	16.98174	11.67316	11.04247	10.98548	10.98172	10.98172
	Modelul propus	9.90365	10.85598	10.97324	10.98131	10.98172	10.98172
-4.0	Al-Sader (2004)	16.44016	11.87869	11.43540	11.40381	11.40215	11.40215
	Modelul propus	10.61061	11.33425	11.39862	11.40202	11.40216	11.40216
-2.0	Al-Sader (2004)	15.86151	12.16594	11.91399	11.90153	11.90106	11.90106
	Modelul propus	11.45123	11.87756	11.90023	11.90104	11.90107	11.90107
0.0	Al-Sader (2004)	15.24162	12.56483	12.50095	12.50001	12.50000	12.50000
	Modelul propus	12.50000	12.50000	12.50000	12.50000	12.50000	12.50000
2.0	Al-Sader (2004)	14.57603	13.12044	13.22695	13.22860	13.22855	13.22855
	Modelul propus	13.89974	13.21917	13.22824	13.22855	13.22855	13.22855
4.0	Al-Sader (2004)	13.86005	13.90372	14.13431	14.12856	14.12834	14.12834
	Modelul propus	15.94073	14.05668	14.12789	14.12838	14.12834	14.12834
6.0	Al-Sader (2004)	13.08889	15.03232	15.28272	15.25960	15.25954	15.25954
	Modelul propus	19.26924	15.03824	15.26150	15.25969	15.25954	15.25954
8.0	Al-Sader (2004)	12.25779	16.71554	16.75873	16.71100	16.71208	16.20800
	Modelul propus	25.55579	16.19257	16.72337	16.71240	16.71208	16.71208
10.0	Al-Sader (2004)	11.36226	19.36191	18.69187	18.62187	18.62589	18.62589
	Modelul propus	40.45828	17.54740	18.66165	18.62634	16.71208	18.62590
12.0	Al-Sader (2004)	10.39839	23.88468	21.28376	21.22028	21.23005	21.23005
	Modelul propus	100.10448	19.11948	21.32177	21.23021	21.23006	21.23006
14.0	Al-Sader (2004)	9.36320	32.80694	24.86424	24.90567	24.92479	24.92479
	Modelul propus	357.75764	20.89228	25.13881	24.92334	24.92480	24.92480
16.0	Al-Sader (2004)	8.25515	56.50767	30.00855	30.44238	30.47336	30.47336
	Modelul propus	-86.10524	22.77072	30.95801	30.46668	30.47336	30.47336

Tabel E.0.6 Valorile coeficientului de rigiditate  $s_{22}$

$\lambda_B$	Metoda	Număr de termeni în seria de puteri, NTF					
		10	20	30	40	70	80
-16.0	Al-Sader (2004)	8.37810	13.40339	15.79316	16.45530	16.57733	16.57739
	Modelul propus	13.41202	15.74748	16.46176	16.56667	16.57746	16.57746
-14.0	Al-Sader (2004)	8.35771	13.13809	15.26887	15.80762	15.89692	15.89696
	Modelul propus	13.18354	15.24488	15.81517	15.89008	15.89700	15.89700
-12.0	Al-Sader (2004)	8.33962	12.84216	14.70103	15.12404	15.18635	15.18637
	Modelul propus	12.92443	14.69541	15.13173	15.18225	15.18640	15.18640
-10.0	Al-Sader (2004)	8.32462	12.50954	14.08422	14.40095	14.44177	14.44178
	Modelul propus	12.33194	14.09291	14.40795	14.43953	14.44180	14.44180
-8.0	Al-Sader (2004)	8.31367	12.13241	13.41206	13.63401	13.65852	13.65852
	Modelul propus	12.03271	13.43029	13.63971	13.65744	13.65853	13.65853
-6.0	Al-Sader (2004)	8.30792	11.70051	12.67710	12.81795	12.83086	12.83086
	Modelul propus	11.67549	12.69945	12.82199	12.83044	12.83087	12.83087
-4.0	Al-Sader (2004)	8.30870	11.20000	11.87048	11.94620	11.95168	11.95168
	Modelul propus	11.24036	11.89117	11.94852	11.95156	11.95168	11.95168
-2.0	Al-Sader (2004)	8.31764	10.61188	10.98165	11.01046	11.01193	11.01193
	Modelul propus	10.69750	10.99512	11.01134	11.01192	11.01193	11.01193
0.0	Al-Sader (2004)	8.33659	9.90915	9.99791	9.99997	10.00000	10.00000
	Modelul propus	10.00000	10.00000	10.00000	10.00000	10.00000	10.00000
2.0	Al-Sader (2004)	8.36776	9.05212	8.90379	8.90042	8.90055	8.90055
	Modelul propus	9.06939	8.89396	8.90048	8.90055	8.90055	8.90055
4.0	Al-Sader (2004)	8.41366	7.97985	7.68020	7.69228	7.69287	7.69287
	Modelul propus	7.76290	7.66562	7.69333	7.69288	7.69287	7.69287
6.0	Al-Sader (2004)	8.47719	6.59343	6.30315	6.34802	6.34812	6.34812
	Modelul propus	5.78876	6.30598	6.35073	6.34813	6.34812	6.34812
8.0	Al-Sader (2004)	8.56163	0.72055	4.74179	4.82741	4.82472	4.82472
	Modelul propus	2.43748	4.81221	4.83135	4.82460	4.82471	4.82471
10.0	Al-Sader (2004)	8.67061	2.03054	2.95515	3.06901	3.05998	3.05998
	Modelul propus	-4.60326	3.19434	3.07111	3.05949	3.05998	3.05998
12.0	Al-Sader (2004)	8.80812	-2.20471	0.88642	0.97387	0.95427	0.95427
	Modelul propus	-29.81843	1.48704	0.96527	0.95296	0.95426	0.95426
14.0	Al-Sader (2004)	8.97840	-9.97501	-1.54817	-1.62858	-1.66225	-1.66226
	Modelul propus	151.01549	-0.23106	-1.66937	-1.66492	-1.66226	-1.66226
16.0	Al-Sader (2004)	9.18583	29.40750	4.48283	-5.06042	-5.10678	-5.10678
	Modelul propus	40.25737	-1.80816	-5.18395	-5.11114	-5.10678	-5.10678