



**UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE CONSTRUCȚII**

Ing. Ștefan-Marius BURU

TEZĂ DE DOCTORAT

**ANALIZA AVANSATĂ A STRUCTURILOR
ALCĂTUIATE DIN ELEMENTE COMPOZITE
OȚEL-BETON**

Conducător științific:

Prof. dr. ing. Cosmin-Gruia CHIOREAN

DREPTUL DE AUTOR

Conținutul acestei lucrări poate fi vizualizat, transmis și imprimat numai în scopuri personale, didactice, de cercetare și necomerciale. Dreptul de autor pentru informațiile existente în această lucrare este deținut de autorul lucrării și/sau de coordonatorul științific. Nici un material din această lucrare nu poate fi reprodus parțial, integral sau modificat fără permisiunea anterioară explicită, prin acord scris, a autorului lucrării și a coordonatorului științific.

Conținutul acestei lucrări, textele, relațiile matematice, ilustrațiile, fotografiile și orice alte materiale prezente în lucrare, sunt protejate de legea dreptului de autor.

Următoarele pagini au fost eliminate din conținutul electronic al acestei lucrări: 41, 102, 162, 194

Citarea lucrării se va face în acest format:

Buru S.M., *Analiza Avansată a Structurilor Alcătuite din Elemente Compozite Oțel-Beton*, Teză de doctorat, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca, 2016.

Cuprins

1	Introducere. Obiectul și structura tezei de doctorat.	1
2	Stadiul actual al cercetărilor în domeniu	6
2.1	Studii experimentale	6
2.2	Studii analitice și analitico-numerice	10
2.3	Studii numerice	15
2.3.1	Studii numerice via pachete comerciale de elemente finite	15
2.3.2	Studii numerice via elemente finite special dezvoltate pentru analiza structurilor mixte oțel-beton	19
2.4	Concluzii parțiale	27
3	Prescripții ale principalelor norme de proiectare asupra calculului elementelor mixte oțel-beton	29
3.1	Echilibru. Grad de conectare.	30
3.2	Compatibilitate. Grad de interacțiune.	33
3.3	Prevederi asupra grinzilor mixte oțel-beton	35
3.3.1	Starea limită ultimă	35
3.3.2	Starea limită de serviciu	40
3.4	Prevederi asupra stâlpilor cu secțiune mixtă oțel-beton	43
3.4.1	Stâlpi supuși la compresiune centrică	43
3.5	Concluzii parțiale	45
4	Ecuția diferențială de echilibru a grinzilor cu interacțiune parțială solicitate în domeniul elastic	47
4.1	Introducere	47
4.2	Modelul Newmark pentru analiza elastică a grinzilor mixte oțel-beton cu interacțiune parțială	47
4.2.1	Alte forme ale ecuației diferențiale	51
4.2.2	Soluționarea ecuației diferențiale pentru diferite cazuri de încărcare	54
4.2.3	Determinarea constantelor de integrare	58
4.2.4	Soluția generală a ecuației diferențiale pentru cazurile studiate	62
4.3	Concluzii parțiale	70
5	Formularea matematică a metodei de analiză propuse	71
5.1	Introducere	71
5.2	Ipoteze și modele constitutive de comportare adoptate	73
5.3	Modelarea inelasticității la nivel de secțiune	78

5.3.1	Determinarea caracteristicilor de rigiditate în domeniul elasto-plastic a secțiunilor cu conexiune totală	79
5.3.2	Determinarea caracteristicilor de rigiditate în domeniul elasto-plastic a secțiunilor cu conexiune parțială	91
5.3.3	Evaluarea efortului axial din componenta de beton. Grad efectiv de acțiune compozită	100
5.3.4	Evaluarea eforturilor interioare și a coeficienților matricei tangente secționale de rigiditate	106
5.3.5	Rigiditatea echivalentă la forfecare a grinzilor mixte oțel-beton	108
5.4	Modelarea inelasticității la nivel de element	113
5.4.1	Matricea de rigiditate tangență și vectorul forțelor nodale echivalente	113
5.4.2	Efectul local al neliniarității geometrice	122
5.4.3	Integrarea efectelor nodurilor de dimensiune finită și a conexiunilor semirigide	123
5.4.4	Efectul global al neliniarității geometrice	127
5.5	Metoda de conducere a analizei neliniare	129
5.6	Concluzii parțiale	132
6	Analiza avansată neliniară a structurilor mixte oțel-beton folosind pachetul comercial Abaqus	134
6.1	Factori determinanți în simularea numerică	134
6.1.1	Modele constitutive selectate pentru definirea comportării materialelor	135
6.1.2	Elemente finite utilizate pentru modelarea componentelor sistemului mixt	138
6.1.3	Modelarea tensiunilor reziduale și a imperfecțiunilor geometrice inițiale	142
6.1.4	Aplicarea încărcărilor și modul de conducere a analizei neliniare	143
6.2	Exemplu numeric de verificare a modelelor numerice propuse	144
6.3	Considerații finale	148
7	Validarea modelului de analiză propus prin experimente numerice	149
7.1	Testări numerice pe grinzi cu secțiune mixtă oțel-beton	149
7.1.1	Grinzi mixte simplu rezemate testate experimental de Chapman & Balakrishnan	149
7.1.2	Grinzi mixte simplu rezemate testate de Nie & Cai	171
7.1.3	Grinda simplu rezemată testată de Fabbrocino & Pecce	173
7.1.4	Grinda simplu rezemată testată de Aribert ș.a.	175
7.1.5	Grinzi continue mixte testate de Ansourian	178
7.2	Testări numerice pe stâlpi cu secțiune mixtă oțel-beton	185

7.2.1	Stâlp cu secțiune mixtă analizat numeric de Chiorean	185
7.3	Testări numerice pe cadre mixte oțel-beton	190
7.3.1	Cadru portal cu stâlpi metalici și grinda mixtă oțel-beton	190
7.3.2	Cadru plan cu două deschideri și șase niveluri	192
7.3.3	Cadru spațial cu două deschideri, două travee și șase niveluri	196
7.4	Concluzii parțiale	200
8	Considerații finale	204
8.1	Concluzii	204
	Bibliografie	213

Lista figurilor

Fig. 2.1 Elemente finite formulate în deplasări cu 8GDL, 10GDL și 16GDL	20
Fig. 2.2 Element finit formulat în deplasări cu 14GDL	21
Fig. 2.3 Element finit formulat în eforturi	24
Fig. 2.4 Element finit cu formulare mixtă	26
Fig. 3.1 Curbe caracteristice de comportare a conectorilor	30
Fig. 3.2 Grindă mixtă oțel-beton. Distribuția tensiunilor normale pe secțiune.	31
Fig. 3.3 Distribuții tipice de tensiuni și deformații.....	32
Fig. 3.4 Ilustrarea lunecării și a deformației de lunecare longitudinale.....	33
Fig. 3.5 Situații de interacțiune	34
Fig. 3.6 Lățimea efectivă de placă	36
Fig. 3.7 Distribuții plastice de tensiuni normale pentru determinarea momentului încovoietor capabil.....	37
Fig. 3.8 Variația momentului plastic pozitiv în funcție de gradul de conectare	38
Fig. 3.9 Curba de interacțiune moment-forță tăietoare.....	39
Fig. 3.10 Schema statică și dimensiunile grinzii EI	42
Fig. 3.11 Variația săgeții elastice maxime funcție de gradul de conectare	42
Fig. 3.12 Variația momentului de inerție funcție de gradul de conectare	43
Fig. 3.13 Curba de interacțiune moment încovoietor-efort axial.....	45
Fig. 4.1 Comportarea idealizată liniar-elastică a conectorilor	48
Fig. 4.2.a. Element infinitesimal de grindă compozită oțel-beton b. Distribuția deformațiilor pe înălțimea secțiunii transversale	48
Fig. 4.3 Element de bară supus acțiunii momentelor încovoietoare nodale.....	54
Fig. 4.4 Element de bară supus acțiunii momentelor încovoietoare nodale și sarcinii uniform distribuite q	55
Fig. 4.5 Element de bară supus acțiunii momentelor încovoietoare nodale și forței concentrate P	56
Fig. 4.6 Element de bară supus acțiunii momentelor încovoietoare nodale și forțelor concentrate P	57
Fig. 4.7 Variația săgeții elastice maxime funcție de gradul de conectare	67
Fig. 4.8 Variația funcției $f(\alpha L)$ funcție de gradul de conectare	68
Fig. 4.9 Variația funcției $f(\alpha L)$ funcție parametrul αL	69
Fig. 4.10 Variația funcției $f(\alpha L)$ în lungul grinzii.....	69
Fig. 5.1 Curba caracteristică a betonului conform Hognestad și Vecchio.....	74
Fig. 5.2 Curba caracteristică a betonului conform codului CEB-FIP 1990	75
Fig. 5.3 Curba caracteristică a betonului conform standardului EC2.....	76
Fig. 5.4 Modelarea oțelului structural.....	77
Fig. 5.5 Modelarea armăturilor	78
Fig. 5.6 Secțiune transversală mixtă oțel-beton de formă oarecare.....	80
Fig. 5.7 Semnificația fizică a rigidității la încovoiere tangente	82
Fig. 5.8 Curba de interacțiune corespunzătoare unui raport constant al momentelor încovoietoare	83
Fig. 5.9 Secțiune transversală mixtă în ipoteza acțiunii compozite totale.....	86

Fig.5.10 Secțiune transversală mixtă în ipoteza acțiunii compozite parțiale	91
Fig. 5.11 Modelul neliniar de comportare al conectorilor. Definirea rigidității secante a conectorului.....	103
Fig. 5.12 Ilustrarea deformațiilor unghiulare:.....	108
Fig. 5.13. Reprezentarea tensiunilor tangențiale pe un element mixt infinitesimal	111
Fig. 5.14 Secțiunea caracteristică a grinzii EI testată experimental de Chapman	112
Fig. 5.15 Variația rigidității echivalente la forfecare în cazul secțiunii transversale a grinzii EI	113
Fig. 5.16 Elemente de tip bară cu 12 GDL	114
Fig. 5.17 Element de bară având îndepărtate deplasările de corp rigid.....	116
Fig. 5.18 Ipoteză de încărcare a unui element de bară în sistemul coordonatelor de bază .	117
Fig. 5.19. Element de bară cu conexiuni semirigide și noduri cu dimensiune finită.....	123
Fig. 5.20. Element de bară cu conexiuni semirigide	124
Fig. 5.21. Element de bară cu noduri de dimensiuni finite	126
Fig. 5.22 Efectul global al neliniarității geometrice	128
Fig. 5.23 Metode incrementale și incremental iterative de conducere a analizei.....	130
Fig. 5.24 Conducerea analizei cu control în lucrul mecanic	131
Fig. 6.1. Curba de comportare a betonului: a. întins și b. comprimat	136
Fig. 6.2.a. EF tridimensional cu 8 noduri; b. Efectul de hourglassing; c. Efectul de shear locking	139
Fig. 6.3.a. EF de tip S4; b. EF de tip S4R; c. EF de tip B31.....	140
Fig. 6.4. Tensiuni reziduale: a. Distribuția ECCS; b. Distribuția modelată în Abaqus	142
Fig. 6.5 Configurația geometrică a grinzii EI	144
Fig. 6.6. Modele numerice testate.....	146
Fig. 6.7. Curbe încărcare-săgeată pentru grinda EI	147
Fig. 6.8 Variația lunecării longitudinale în lungul grinzii.....	148
Fig. 7.1 Configurația geometrică a grinzilor A3, A4, A5 și EI.....	149
Fig. 7.2. Repartiția conectorilor în lungul grinzii U4.....	151
Fig. 7.3. Curbele constitutive ale conectorilor.....	151
Fig. 7.4. Variația efortului axial din dala de beton în lungul grinzilor A3, A5, A6, EI și U4	152
Fig. 7.5. Curbe moment încovoietor-curbură pentru grinzile A3, A5 și A6.....	153
Fig. 7.6 Influența variației rezistenței betonului la compresiune asupra curbelor M-Φ.....	154
Fig. 7.7 Influența variației rigidității $K_{50\%}$ a conectorilor asupra curbelor M-Φ.....	155
Fig. 7.8 Influența variației limitei de curgere a oțelului din tăpile profilului asupra curbelor M-Φ	155
Fig. 7.9 Influența variației limitei de curgere a oțelului din inima profilului asupra curbelor M-Φ	156
Fig. 7.10 Influența variației deformației aferente inițierii reconsolidării asupra curbelor M-Φ	156
Fig. 7.11 Curbe M-Φ pentru diferite grade de conectare.....	158
Fig. 7.12 Curbe M-(EI) _i pentru diferite grade de interacțiune	159
Fig. 7.13 Efecte locale manifestate de secțiunea A5.....	159
Fig. 7.14. Efectul tensiunilor reziduale.....	160

Fig. 7.15. Influența modelului constitutiv al betonului comprimat	161
Fig. 7.16. Curbe încărcare-săgeată pentru grinzile A3, A5, A6, E1 și U4	162
Fig. 7.17 Curbe încărcare-săgeată. Rigiditate inițială.....	164
Fig. 7.18 Influența variației rezistenței betonului la compresiune asupra curbelor P-d	164
Fig. 7.19 Influența variației limitei de curgere a oțelului din tălpile profilului asupra curbelor P-d.....	165
Fig. 7.20 Influența variației limitei de curgere a oțelului din inima profilului asupra curbelor P-d.....	165
Fig. 7.21 Curbe P-d pentru diferite grade de conectare.....	167
Fig. 7.22 Curbe P-d pentru diferite grade de conectare. Rigiditate inițială	168
Fig. 7.23 Curbe q-d pentru diferite grade de conectare	169
Fig. 7.24 Curbe q-d pentru diferite grade de conectare. Rigiditate inițială.....	170
Fig. 7.25 Configurația geometrică a grinzilor SCB-1 și SCB-3	171
Fig. 7.26 Curbe moment încovoietor-săgeată pentru grinzile SCB-1 și SCB-3.....	173
Fig. 7.27 Configurația geometrică a grinzii de tip C	173
Fig. 7.28 Curbe încărcare-săgeată pentru grinda de tip C	175
Fig. 7.29 Curbe încărcare-rotire la reazeme pentru grinda de tip C.....	175
Fig. 7.30. Configurația geometrică a grinzii testate de Aribert.....	176
Fig. 7.31 Influența deformațiilor unghiulare asupra curbelor încărcare-săgeată pentru grinda Aribert	177
Fig. 7.32 Influența deformațiilor unghiulare asupra deplasărilor transversale ale grinzii Aribert	178
Fig. 7.33 Configurația geometrică a grinzilor CTB 1, CTB 4, CTB5 și CTB 6.....	179
Fig. 7.34 Curbe încărcare-săgeată pentru grinzile CTB 1, CTB 4, CTB5 și CTB 6.....	181
Fig. 7.35 Influența rigidității la forfecare asupra curbelor P-d pentru grinzile CTB 1 și CTB 4.....	182
Fig. 7.36 Influența deformațiilor unghiulare asupra curbelor încărcare-săgeată pentru grinda CTB 6	183
Fig. 7.37 Influența deformațiilor unghiulare asupra deplasărilor transversale ale grinzii CTB 6.....	184
Fig. 7.38 Stâlp cu secțiune mixtă solicitat la încovoiere cu efort axial.....	185
Fig. 7.39 Curbe de interacțiune plastică $N-M_y$ și $N-M_z$	186
Fig. 7.40 Influența tensiunilor reziduale asupra curbelor moment încovoietor-curbură în raport cu axa: a. slabă; b. tare.....	187
Fig. 7.41 Influența tensiunilor reziduale asupra curbelor moment încovoietor-rigiditate la încovoiere. în raport cu axa: a. slabă; b. tare.....	188
Fig. 7.42 Curbe încărcare laterală – deplasare. Încovoiere în raport cu axa tare de inerție	188
Fig. 7.43 Curbe încărcare laterală – deplasare. Încovoiere în raport cu axa slabă de inerție	189
Fig. 7.44 Configurația geometrică a cadrului portal analizat de Ngo-Huu & Kim.....	190
Fig. 7.45 Curbe încărcare – deplasare laterală nod A pentru cadrul portal cu grinda mixtă	191

<i>Fig. 7.46 Cadru portal: a. Variația rigidității la încovoiere - Nefcad; b. Variația tensiunilor – Abaqus</i>	191
<i>Fig. 7.47 Configurația geometrică a cadrului Vogel</i>	192
<i>Fig. 7.48 Curbe încărcare-deplasare pentru cadrul metalic Vogel</i>	193
<i>Fig. 7.49 Curbe încărcare-deplasare pentru cadrul Vogel. Nefcad vs. Abaqus</i>	194
<i>Fig. 7.50. Curbe încărcare-deplasare pentru cadrul Vogel. Influența gradului de conectare.</i>	196
<i>Fig. 7.51 Configurația geometrică a cadrului Orbison</i>	197
<i>Fig. 7.52 Curbe încărcare-deplasare pentru cadrul Orbison - noduri grindă-stâlp punctuale</i>	198
<i>Fig. 7.53. Influența dimensiunii nodurilor asupra curbelor încărcare-deplasare</i>	199
<i>Fig. 7.54. Curbe încărcare-deplasare pentru cadrul Orbison. Nefcad vs. Abaqus</i>	200

Lista tabelelor

<i>Tab. 2.1 Modele numerice și elemente finite asociate</i>	16
<i>Tab. 5.1 Caracteristici mecanice ale materialelor grinzii E1</i>	112
<i>Tab. 6.1 Parametrii plasticității pentru modelul constitutiv CDP</i>	135
<i>Tab. 6.2. Categoriile de EF utilizate în modelările studiate.....</i>	138
<i>Tab. 6.3. Caracteristici mecanice ale materialelor grinzii E1</i>	145
<i>Tab. 7.1. Caracteristici mecanice ale materialelor grinzilor A3, A5, A6, E1 și U4.....</i>	150
<i>Tab. 7.2 Caracteristici ale epruvetelor testate pentru determinarea capacității conectorilor</i>	155
<i>Tab. 7.3. Grade de conectare considerate în studiul parametric asupra secțiunii A5</i>	157
<i>Tab.7.4. Grade de conectare considerate în studiul parametric asupra secțiunii A6</i>	157
<i>Tab. 7.5. Rigiditățile echivalente la forfecare pentru grinzile A3, A5, A6, E1 și U4</i>	162
<i>Tab. 7.6. Număr comparativ de EF utilizate pentru modelarea grinzilor A3, A5, A6, E1 și U4</i>	163
<i>Tab. 7.7 Grade de conectare considerate pentru grinda E1</i>	166
<i>Tab. 7.8 Caracteristici mecanice ale materialelor grinzilor SCB-1 și SCB-3</i>	172
<i>Tab. 7.9 Caracteristici mecanice ale materialelor grinzii de tip C</i>	174
<i>Tab. 7.10. Caracteristici mecanice ale materialelor grinzii testate de Aribert.....</i>	176
<i>Tab. 7.11 Caracteristici mecanice ale materialelor grinzilor CTB 1, CTB 4, CTB5 și CTB 6</i>	179
<i>Tab. 7.12. Caracteristicile conexiunilor pentru gradele de conectare considerate</i>	195

1 Introducere. Obiectul și structura tezei de doctorat.

În ultimele decenii, elementele cu secțiune mixtă oțel-beton sunt tot mai des incluse în structurile de rezistență ale clădirilor multietajate, dar și a podurilor. Aceste elemente structurale au în alcătuire atât componente metalice (de ex. profile laminate la cald de tip I) cât și volume de beton (de ex. plăci din beton armat), dar pentru ca sistemul să funcționeze unitar trebuie să se asigure conexiunea dintre cele două componente, fie prin aderența naturală dintre aceste (în general în cazul stâlpilor micști având armătură rigidă înglobată în beton) fie prin utilizarea de dispozitive mecanice de conectare dispuse la interfața de contact dintre cele două componente (situație întâlnită cu precădere în cazul grinzilor mixte). Rațiunea utilizării elementelor mixte rezidă în avantajele generate prin asocierea celor două materiale componente. Betonul manifestă rigiditate și rezistență însemnată când este supus la compresiune, însă are comportare precară când este supus la întindere. De cealaltă parte, oțelul structural este caracterizat prin capacitate portantă și ductilitate însemnată însă este predispus spre diferite forme de pierdere a stabilității și, mai mult manifestă degradări însemnate în prezența focului. Devin astfel evidente avantajele rezultate prin combinarea rațională a acestor materiale. În cazul stâlpilor, dacă se optează pentru varianta înglobării totale a unui profil metalic în beton, se îmbunătățește rezistența acestuia la foc, iar pierderea stabilității prin flambaj devine puțin probabilă. Dacă în schimb se optează pentru utilizarea de stâlpi micști cu secțiune tubulară umplută cu beton, beneficiile constau în majorarea rezistenței la compresiune a betonului, împiedicarea flambajului local al componentei metalice și renunțarea la cofrajul convențional. Grinzile mixte având o placă de beton susținută de un profil metalic reprezintă o alegere rațională din punct de vedere structural întrucât componenta de beton conferă sistemului rezistență la compresiune, iar cea metalică este eficientă la preluarea întinderilor. Mai mult, placa de beton împiedică flambajul local al tălpii superioare a profilului metalic. Față de cazul clasic al grinzilor din beton armat, utilizarea unui astfel de sistem mixt atrage după sine reducerea raportului dintre înălțimea secțiunii transversale și deschiderea grinzii, conducând astfel în cele mai multe cazuri la avantaje de natură economică. Aceste avantaje sunt însă însoțite de particularități complexe de comportare care încă sunt de curentă actualitate în literatura de specialitate, deși progrese semnificative s-au raportat în ultimele decade.

Filosofia de calcul a elementelor cu secțiune mixtă, adoptată de principalele standarde de proiectare (european EC 4 [1], australian AS 2327.1 [2], american ANSI/AISC 360-10 [3]) are la bază metoda stărilor limită asociată cu diverse modele de analiză statică globală: liniar elastică, rigid plastică și neliniară. Adoptarea acestei metode semi-probabilistice implică renunțarea la metodele tradiționale deterministe de tipul metodei rezistențelor admisibile și a metodei rigid plastice în cadrul cărora condiția de rezistență include un parametru unic denumit coeficient de siguranță și astfel caracterul aleatoriu al mărimilor ce caracterizează problema siguranței structurilor (încărcări aplicate, caracteristici mecanice ale materialelor, geometria elementelor structurii, etc.) este luat în considerare prin intermediul unui singur parametru. Tipurile de analize statice asociate celor două metode deterministe sunt analiza liniar elastică respectiv cea rigid plastică. Prima dintre ele, încă aplicată în birourile de proiectare, nu ține cont în mod direct de efectele plasticității și ale neliniarității geometrice asupra răspunsului structural, acestea din urmă fiind incluse indirect în relațiile de verificare

prin intermediul ecuațiilor de interacțiune [4]. Deși în cadrul metodei de analiză rigid plastică, efectele neliniarității fizice sunt incluse în mod aproximativ în analiză, de obicei prin adoptarea modelului articulațiilor plastice punctuale, celelalte efecte ce au influență directă asupra rezistenței și stabilității elementelor structurii (imperfecțiuni mecanice de tipul tensiunilor reziduale, dezvoltarea graduală a zonelor plastice pe înălțimea secțiunilor transversale și în lungul elementelor, imperfecțiuni geometrice locale și globale, neliniarități geometrice) nu sunt considerate direct în analiză, acestea fiind incluse în condițiile de verificare ale elementelor [4]. Acceptarea metodei stărilor limită ca metodă de proiectare implică aplicarea rațională a unor coeficienți distincți asupra principalelor variabile ce descriu caracterul aleatoriu al comportării structurilor, eliminând astfel utilizarea coeficientului unic de siguranță caracteristic metodelor deterministe. Tipurile de analize statice globale ce însoțesc această metodă de proiectare sunt cele liniar elastice, rigid plastice respectiv cele neliniare. Indiferent de metoda de analiză adoptată, trebuie să se țină cont, direct sau indirect, de efectul principalilor factori ce influențează rezistența, rigiditatea și stabilitatea elementelor structurale, dintre care amintim neliniaritatea fizică și geometrică, locală și globală, imperfecțiuni mecanice inițiale de tipul tensiunilor reziduale caracteristice profilelor metalice laminate la cald, imperfecțiuni geometrice inițiale de tipul abaterilor de la verticalitate și rectilinitate. În cazul folosirii analizei liniar elastice sau a celei rigid plastice, efectele enumerate anterior sunt considerate în mod indirect pe baza unor prescripții și relații de interacțiune propuse în standardele de proiectare. Mai mult, în acest fel, considerarea combinată a acestor efecte este în general prohibitivă. Un alt aspect care trebuie scos în evidență constă în necesitatea verificării independente a fiecărui element component al structurii [5]. Devine astfel evidentă necesitatea dezvoltării și adoptării unor analize statice neliniare, care în funcție de complexitatea lor, pot ține seama într-un mod mai mult sau mai puțin riguros de toți factorii cu efect majoritar asupra comportării elementelor și structurilor în ansamblul lor, eliminând totodată verificarea anevoioasă a fiecărei bare componente a structurii. În această categorie pot fi bine-nțelese incluse analizele neliniare conduse prin intermediul pachetelor comerciale de elemente finite formulate în deplasări care au capacitatea de a surprinde în mod riguros dezvoltarea graduală a zonelor plastice și efectul neliniarităților geometrice, însă în multe situații dimensiunea problemelor este considerabilă, implicând astfel un număr mare de elemente finite și în consecință timpi de execuție semnificativi, chiar dacă tehnologia curentă furnizează sisteme hardware cu putere de calcul substanțială. În contextul, pe de-o parte, a necesității unei metode de analiză care să înlăture dezavantajele metodelor de analiză existente, iar pe altă, a dezvoltării continue a tehnologiei de calcul, în ultimii douăzeci și cinci de ani, demersuri considerabile s-au înregistrat în fundamentarea unui nou concept de analiză și proiectare, grefat pe metoda stărilor limită, care permite considerarea concomitentă a factorilor ce au impact direct asupra comportării structurilor, regăsit în literatura de specialitate sub denumirea de analiză avansată (*advanced analysis*). În această concepție, prin analiză avansată se înțelege orice metodă de calcul global care poate descrie în mod satisfăcător rezistența, rigiditatea și stabilitatea globală a structurii, astfel încât verificarea individuală a fiecărui element component al structurii să nu mai fie necesară asigurând o mai realistă predicție a efectelor acțiunilor asupra structurilor și a performanțelor structurale ale acestora, ca și, în cele mai multe situații, un proiect mai ieftin și condiții de siguranță mai uniforme [6–8]. Contribuții importante asupra analizei avansate a

cadrelor metalice au fost raportate, printre alții, de *Chen & Toma* [6], *Kim & Chen* [7], *Chiorean* [8,9], iar asupra cadrelor alcătuite din elemente cu secțiune mixtă, amintim studiile publicate de *Liew ș.a.* [10], *Chiorean* [11] și *Iu ș.a.* [12]. Față de metodele de analiză avansate dezvoltate pentru studiul comportării cadrelor metalice, cele descrise pentru analiza cadrelor mixte trebuie să trateze un aspect suplimentar, care le conferă un plus de dificultate dacă ne raportăm la cele descrise pentru prima categorie de structuri. Astfel metodele de analiză avansată dedicate studiului comportării elementelor și structurilor mixte oțel-beton trebuie să țină cont de conexiunea dintre componenta metalică și cea de beton. Dacă în cazul stâlpilor ipoteza interacțiunii totale dintre componente este rezonabilă deoarece aria de contact dintre cele două materiale este relativ mare rezultând astfel o aderență considerabilă între ele, în cazul grinzilor efectele interacțiunii parțiale trebuie luate în considerare. Incluziunea riguroasă a acestui efect în studiul comportării cadrelor având grinzi cu secțiune mixtă nu este simplă și directă, fapt argumentat de numărul redus de publicații care tratează riguros acest aspect. În majoritatea studiilor regăsite în literatura de specialitate (*Iu ș.a.* [12,13], *Liew* [10]), efectele conectării parțiale sunt incluse în analiză în mod aproximativ la nivel secțional prin degradarea rigidității la încovoiere pe baza unor relații propuse în codurile de proiectare. Bine-nțeles, modelarea independentă a fiecărei componente a sistemului mixt (placa de beton și profilul metalic) prin elemente finite de tip bară și adăugarea de legături suplimentare între acestea, permite includerea riguroasă a efectelor interacțiunii parțiale, însă această modelare se depărtează de conceptul fundamental al analizei avansate care prevede utilizarea unui singur element finit pentru modelarea fizică a fiecărei bare componente a structurii.

Teza de doctorat se înscrie în preocupările actuale de perfecționare a metodelor de analiză statică avansată a structurilor în cadre alcătuite din elemente (grinzi și stâlpi) cu secțiune mixtă oțel-beton și își propune să elaboreze metode de calcul care să țină cont într-o manieră cât mai riguroasă de principalii factori care influențează răspunsul structural al acestor structurilor compozite. Atenție deosebită se va acorda efectului conectării parțiale dintre placa de beton și profilul metalic al grinzilor mixte. Teza este structurată pe opt capitole, al căror conținut este descris succint în continuare.

CAPITOLUL 1 – *Introducere. Obiectul și structura tezei de doctorat* – prezintă o scurtă descriere a tipurilor de elemente cu secțiune mixtă și sunt punctate avantajele generate de utilizarea acestora în raport cu elementele din beton armat sau metalice. În continuare sunt descrise cerințele actuale de analiză și proiectare în metoda stărilor limită, fiind punctată necesitatea implementării unor analize statice avansate care să îndeplinească exigențele standardelor de proiectare, devenind astfel metode de analiză alternative celor aplicate în prezent în birourile de proiectare.

CAPITOLUL 2 – *Stadiul actual al cercetărilor în domeniu* – descrie principalele studii experimentale, teoretice și numerice concentrate pe comportarea elastică și postelastice a diferitelor tipuri de sisteme structurale compozite oțel-beton, o atenție deosebită acordându-se materialelor bibliografice ce tratează aspecte referitoare la comportarea grinzilor cu secțiune mixtă, cu interacțiune totală sau parțială între placa de beton și grinda metalică, deoarece pe întreg parcursul prezentei lucrări, atenția este îndreptată, în principal, asupra analizei comportării acestor sisteme structurale. Studiile prezentate scot în evidență actualitatea tematicii abordate în prezenta lucrare.

CAPITOLUL 3 – *Prescripții ale principalelor norme de proiectare asupra calculului elementelor mixte oțel-beton* – vizează trecerea în revistă a prevederilor principalelor standarde de proiectare, accentul fiind pus pe identificarea filosofiei de calcul asociate grinzilor mixte cu conectare/interacțiune parțială între componentele acestora. Premergător acestor prevederi, sunt prezentate succint o serie de aspecte teoretice fundamentale ce descriu rezistența și rigiditatea grinzilor mixte în ipoteza conexiunii totale și parțiale. Se evidențiază pe parcursul capitolului caracterul distinct, de apreciere a caracteristicilor de deformabilitate și de rezistență a grinzilor caracterizate prin conectare parțială, adoptat în diferitele norme de proiectare.

CAPITOLUL 4 – *Ecuția diferențială de echilibru a grinzilor cu interacțiune parțială solicitate în domeniul elastic* – prezintă cadrul general al analizei grinzilor mixte oțel-beton cu interacțiune parțială, în domeniul elastic de comportare. Adoptând modelul propus de Newmark [14], se prezintă diferite forme ale ecuației diferențiale de ordinul II ce guvernează comportarea grinzilor mixte în ipoteza interacțiunii parțiale dintre componente, funcției de variabilă aleasă ca necunoscută principală: deplasarea transversală (săgeata), curbura, lunecarea longitudinală și efortul axial din componenta de beton. Pentru cazul ultimei variante, se prezintă apoi rezolvarea ecuației diferențiale pentru diferite scheme de rezemare și încărcare, reliefând că efortul axial din placa de beton în condițiile interacțiunii parțiale poate fi exprimată în funcție de aceeași variabilă, însă de această dată, asociată interacțiunii perfecte dintre componente

CAPITOLUL 5 – *Formularea matematică a metodei de analiză propuse* – descrie principalele aspecte fundamentale referitoare la modelul avansat propus pentru analiza cadrelor alcătuite din elemente cu secțiune mixtă, prezentându-se particularitățile de includere a efectului neliniarității fizice cu considerarea dezvoltării graduale a zonelor plastice pe înălțimea secțiunilor transversale și în lungul barelor, a neliniarităților geometrice locale și globale, a efectului imperfecțiunilor mecanice inițiale, a nodurilor de dimensiuni finite și a conexiunilor semirigide, a efectelor conectării parțiale, folosind un singur element finit de tip bară cu două noduri formulat în eforturi pentru modelarea fizică a fiecărei bare a structurii. O atenție deosebită a fost acordată modelării conectării parțiale între dala de beton și profilul metalic (în cazul grinzilor compozite), propunerea noastră remarcându-se prin faptul că, deși acest fenomen se poate evalua riguros la nivel de element, efectul conectării parțiale este tratat la nivel de secțiune, propunând în acest sens un algoritm de evaluare a comportării în domeniul elasto-plastic al secțiunilor compozite cu conectare parțială. Modelul de calcul propus a fost implementat în cadrul aplicației Nefcad [5] extinzând astfel capacitățile acestei aplicații software.

CAPITOLUL 6 – *Analiza avansată neliniară a structurilor mixte oțel-beton folosind pachetul comercial Abaqus* – prezintă un model numeric alternativ pentru analiza neliniară a elementelor și structurilor mixte luându-se în considerare majoritatea factorilor ce domină răspunsul structural al acestor sisteme. Modelul s-a generat folosind pachetul comercial de elemente finite Abaqus [15], prezentându-se particularitățile de modelare referitoare la tipul și dimensiunea elementelor finite utilizate, la modelele constitutive selectate pentru simularea comportării materialelor, la conexiunile dintre componente și nu în ultimul rând s-au prezentat detalii cu privire la modul de conducere a analizei neliniare. Scopul fundamental al

acestui model numeric complex constă în crearea unei unelte numerice robuste care să contribuie la validarea modelului avansat de analiză descris în capitolul anterior.

CAPITOLUL 7 – *Validarea modelului de analiză propus prin experimente numerice* – prezintă o sinteză a principalelor studii elaborate pentru validarea modelului de calcul propus și totodată pentru relevarea anumitor caracteristici și particularități de comportare a structurilor compozite oțel-beton. Simulările numerice s-au concentrat în primul rând pe analiza neliniară a grinzilor mixte oțel-beton, al căror răspuns structural (rezistență și rigiditate) este influențat semnificativ de nivelul de conectare dintre componente, dorindu-se astfel evidențierea capacității modelului propus de a surprinde acest fenomen. Rezultatele obținute sunt puse în antiteză pe de-o parte cu cele experimentale, iar pe de altă parte cu cele generate de modelul complex dezvoltat în Abaqus [15]. Performanțele modelului de calcul propus au fost, de asemenea, relevate în cazul unor elemente de tip stâlp precum și în cazul structurilor cu grad mare de nedeterminare statică (structuri în cadre plane și spațiale) a căror comportare neliniară este dominată de ambele surse de neliniaritate, fizică și geometrică.

CAPITOLUL 8 – *Considerații finale* – prezintă principalele concluzii desprinse în urma studiului întreprins în prezenta lucrare. De asemenea, sunt evidențiate contribuțiile aduse tehnicii actuale de calcul asociate subiectului studiat, dar și direcțiile viitoare de cercetare.

În încheiere se prezintă o vastă bibliografie de ultimă oră.

2 Stadiul actual al cercetărilor în domeniu

Studiul comportării elementelor având secțiune transversală mixtă oțel-beton este de recentă actualitate, deși în literatura de specialitate pot fi consultate numeroase studii experimentale, teoretice și numerice concentrate pe comportarea elastică și postelasică a diferitelor tipuri de sisteme structurale compozite oțel-beton. Combinarea celor două materiale, oțel și beton, prin intermediul diferitelor mecanisme de conectare mecanică, aduce pe de o parte numeroase avantaje structurale, iar pe de altă parte implică moduri complexe de comportare, care nu sunt pe deplin înțelese de comunitatea științifică de specialitate sau comportă anumite aspecte controversate.

În cadrul acestui capitol, sunt preluate din literatura de specialitate și prezentate succint principalele studii experimentale, numerice și analitice ce abordează teme relevante în contextul prezentei lucrări. O atenție deosebită se va acorda materialelor bibliografice ce tratează aspecte referitoare la comportarea grinzilor cu secțiune mixtă, cu interacțiune totală sau parțială între placa de beton și grinda metalică, deoarece pe întreg parcursul prezentei lucrări, atenția este îndreptată, în principal, asupra analizei comportării acestor sisteme structurale.

2.1 Studii experimentale

Raportul publicat de *Slutter & Driscoll* în 1963 [16] descrie studiul experimental întreprins pe grinzi cu secțiune mixtă oțel-beton a căror conectare la lunecare s-a realizat prin intermediul mai multor tipuri de dispozitive mecanice de conectare. În cadrul cercetării, autorii au testat douăsprezece grinzi simplu rezemate, o grindă continuă cu două deschideri și nouă specimene standardizate pentru determinarea capacității portante a conectorilor utilizați. Pe baza rezultatelor obținute autorii au propus relații de calcul pentru determinarea capacității portante a diferitelor tipuri de conectori și, de asemenea, au definit relații pentru evaluarea momentului încovoietor capabil al grinzilor în cazul în care numărul conectorilor este mai mic decât numărul necesar pentru asigurarea conectării totale. Autorii mai punctează că, în cazul în care numărul de conectori dispuși asigură conectarea totală, lunecare longitudinală înregistrată în lungul suprafeței de contact dintre componente, nu afectează semnificativ momentul încovoietor ultim al secțiunii.

Un amplu program experimental, realizat pe grinzi cu secțiune mixtă, a fost condus de *Chapman & Balakrishnan* [17] în anul 1964. Studiul a cuprins șaptesprezece grinzi simplu rezemate având aceeași secțiune transversală și lungime. Autorii au variat gradul de conectare dintre grinda metalică și dala de beton (prin modificarea numărului de conectori dispuși în lungul suprafeței de contact dintre placa de beton și profilul metalic) în scopul observării influenței pe care lunecarea relativă dintre cele două componente o are asupra încărcării capabile a grinzii. De menționat că cercetătorii au folosit o gamă variată de dimensiuni pentru conectori pe care i-au repartizat atât uniform (la aceeași distanță) cât și triunghiular (distanța dintre conectori crește de la reazeme spre mijlocul deschiderii) iar încărcările aplicate au fost atât concentrate cât și uniform distribuite. Pe baza observațiilor experimentale, autorii au formulat o serie de recomandări cu privire la proiectarea grinzilor mixte, printre care se numără neglijarea aportului armăturilor asupra forței de compresiune din placa de beton.

Observarea efectelor utilizării betonului ușor (beton cu agregate ușoare) asupra comportării de ansamblu a grinzilor simplu rezemate cu secțiuni mixtă, a reprezentat principalul obiectiv al programului experimental condus de *McGarraugh & Baldwin* [18] în 1971. Testele întreprinse pe șase grinzi mixte și cinci specimene standardizate, au reliefat comportarea similară, a elementelor alcătuite din beton ușor, cu cea a grinzilor mixte având dala din beton cu densitate normală. De asemenea, se precizează că standardul de proiectare AISC, supraestimează ușor rigiditatea grinzilor în cazul conectării totale dintre componente.

Rapoarte extensive de cercetare privind comportarea grinzilor compozite continue și simplu rezemate au fost întocmite de numeroși cercetători pe baza studiilor experimentale și teoretice întreprinse la *Lehigh University Pennsylvania* în anii 1960 – 1970 [4–9]. Autorii s-au concentrat mai mult pe analiza grinzilor continue în scopul formulării de prescripții de proiectare pentru zona de moment încovoietor negativ. În urma studiilor întreprinse s-au formulat o serie de recomandări importante cu privire la procente minime de armare longitudinală, la distribuția conectorilor, la lățimea efectivă de dală precum și la posibilitatea pretensionării armăturii longitudinale din dală în apropierea reazemului interior.

Un studiu experimental deosebit de important a fost condus de *Ansourian* [25] în 1981 pe șase grinzi continue cu două deschideri, diferențiate prin schema de încărcare, dimensiunile secțiunii compacte de oțel, lățimea plăcii de beton și caracteristicile mecanice ale acesteia, numărul de conectori dispuși pe fiecare element fiind suficienți pentru asigurarea conectării totale. Principalul obiectiv al studiului a fost evaluarea capacității de rotire a articulațiilor plastice în funcție de parametrul de ductilitate al secțiunii transversale, definit prin intermediul următoarei relații:

$$\chi = \frac{0.72 f_{ck} b_c \varepsilon_{cu} (h_c + h_s)}{A_s f_y (\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{sh})} \quad (2.1)$$

unde b_c , și h_c , reprezintă lățimea și grosimea plăcii, f_{ck} și ε_{cu} denotă rezistența cilindrică la compresiune respectiv deformația ultimă a betonului comprimat, h_s și A_s definesc înălțimea profilului metalic și aria acestuia, iar f_y și ε_{sh} indică rezistența de curgere a oțelului respectiv deformația corespunzătoare inițierii reconsolidării. Testele au scos în evidență interdependența dintre capacitatea de rotire a articulațiilor plastice și mărimea factorilor ce definesc parametrul de ductilitate. Mai mult, în baza experimentelor și a altor studii similare și numerice, s-a constatat că grinzi continue având secțiuni transversale caracterizate prin $\chi > 1.4$, cedează la încărcări mai mari decât cele determinate analitic prin calcul plastic elementar deoarece în acest caz secțiunile au capacitate mare de rotire, permițând atingerea momentului plastic negativ indiferent de condițiile de încărcare. O altă observație deosebit de importantă s-a făcut asupra aportului dalei de beton în preluarea forței tăietoare. Astfel, pentru elementele testate, s-a constatat că cel puțin 22% din forța tăietoare totală a fost preluată de componenta de beton.

Un alt studiu mai recent care relevă aportul betonului la preluarea forței tăietoare, este cel condus de *Nie ș.a.* [26] în 2004, pe șaisprezece grinzi mixte simplu rezemate acționate de două forțe concentrate, diferențiate prin distanța dintre reazem și prima forță concentrată, și dimensiunile secțiunii componentei de beton. Autorii au demonstrat că, deși codurile de

proiectare neglijează aportul dalei de beton la preluarea forței tăietoare, contribuția acesteia este semnificativă. Astfel, pe baza deformațiilor înregistrare și aplicând metodele teoriei elasticității și plasticității, s-a arătat că placa de beton preia între 33-56% din forța tăietoare totală susținută de elementele testate. Suplimentar, autorii propun o relație empirică pentru evaluarea forței tăietoare capabile a dalei de beton. Efectul benefic al dalei de beton asupra forței tăietoare capabile a grinzilor compozite a fost observat și în studiul întreprins de *Hope-Gill & Johnson* [27] pe grinzi continue cu trei deschideri.

Studiile conduse de *Amadio ș.a.* [28], *Nie ș.a.* [29] au avut ca principal obiectiv evaluarea lățimii efective de dală care conlucrează cu grinda metalică în preluarea momentului încovoietor pozitiv și negativ atât în domeniul elastic cât și cel plastic. Codurile de proiectare propun, în mod conservativ, o relație comună de calcul a lățimii efective de placă indiferent de natura și de stadiul solicitării. Testele au relevat faptul că lățimea efectivă de placă în domeniul plastic este mai mare decât cea din domeniul elastic și, în consecință, evaluarea momentului plastic capabil cu această valoare redusă conduce la subestimarea momentului încovoietor plastic. Ambele studii au scos în evidență creșterea lățimii afective de dală odată cu creșterea încărcării dincolo de limita elastică, atingând valori egale cu întreaga lățime a dalei, în stadiul premergător cedării elementului compozit. Mai mult, *Amadio ș.a.* [28] sugerează o varianta modificată a relației de calcul propuse de norma EC 4 [1] pentru evaluarea lățimii efective de placă aferente stadiului ultim în zona de moment încovoietor negativ, iar *Nie ș.a.* [29] propun relații analitice pentru evaluarea lățimii efective de placă și a porțiunii comprimate de beton aferente stadiului ultim în zonele de moment încovoietor pozitiv.

Studii relativ recente pe grinzi mixte solicitate de momente încovoietoare negative (placa de beton este întinsă) sunt raportate în [30–32]. *Fabbrocino & Pecce* [30] și *Loh ș.a.* [31] au studiat posibilitatea utilizării conectării parțiale în zona de moment încovoietor negativ. Codurile de proiectare impun ca în vecinătatea reazemelor interioare ale grinzilor compozite, interacțiunea dintre dala de beton și grinda metalică să fie totală, deoarece se presupune, că în aceste regiuni unde betonul este întins, conectorii nu înregistrează deformații semnificative și, în consecință, nu se poate conta pe întreaga lor capacitate portantă. Testele au indicat că, în cazul utilizării conectării parțiale în zona de moment încovoietor negativ, grinzile prezintă capacitate de rotire și ductilitate mărită iar momentul plastic capabil este nesemnificativ afectat. Mai mult, cedarea a fost provocată de ruperea conectorilor, în timp ce, în cazul grinzilor proiectate în ipoteza conexiunii totale cedarea s-a produs prin flambajul local al inimii profilului metalic. Creșterea procentului de armare longitudinală conduce la rigiditate și capacitate portantă mărită însă ductilitatea grinzilor este afectată semnificativ [31]. *Sun ș.a.* scot în evidență în [32] efectele benefice ale armăturilor pretensionate asupra rigidității la încovoiere a grinzilor mixte simplu rezemate solicitate de momente încovoietoare negative și asupra sarcinii ce produce fisurarea betonului pe reazemele intermediare a grinzilor continue.

Studiul comportării grinzilor mixte oțel-beton cu conectare totală, confecționate din materiale de înaltă rezistență, a constituit principalul obiectiv al studiilor experimentale conduse de *Uy & Sloane* [33], *Nie ș. a.* [34] și *Zhao & Yuan* [35]. Testele au indicat că

utilizarea betonului de înaltă rezistență conduce la majorarea rigidităților inițiale și a deformațiilor ultime, iar coroborarea acestuia cu oțeluri de clase superioare, are ca efect creșterea semnificativă a momentului încovoietor capabil, însă caracterul cedării devine unul casant, elementele manifestând ductilitate redusă. Studiile au mai indicat că analiza rigid plastică propusă de codurile de proiectare ca metoda de evaluare a capacității de rezistență la încovoiere a grinzilor cu secțiune mixtă oțel-beton, furnizează în general rezultate neconservative.

Experimentele raportate de Tan & Uy [36] investighează comportarea grinzilor simplu rezemate cu secțiune mixtă solicitate la încovoiere cu torsiune în situația conectării totale și parțiale. Testele au indicat că folosirea unui grad de conectare de doar 50% duce o reducere de maxim 15% a capacității de rezistență la încovoiere și torsiune față de cazul conectării totale, însă ductilitatea a fost îmbunătățită. Mai mult, se arată că prezența încovoierii duce la o creștere a momentului de torsiune capabil, însă momentul încovoietor ultim nu se majorează în prezența torsiunii.

Majoritatea studiilor prezentate anterior, cuprind și teste explicite pe specimene standardizate, realizate pentru obținerea curbelor de comportare a conectorilor utilizați. Un studiu amplu experimental concentrat pe comportarea conectorilor de tip dorn cu cap a fost întreprins de *Ollgaard ș.a.* [37]. Un total de patruzeci și opt de specimene au fost testate, iar principalii parametri variați au fost rezistența la compresiune, densitatea, modulul de elasticitate al betonului dar și diametrul conectorilor utilizați. Testele au evidențiat influența calității betonului (rezistența la compresiune și modulul de elasticitate) asupra capacității portante ale conectorilor. Prin urmare, autorii au formulat o relație empirică de calcul a rezistenței la forfecare a conectorilor, ce ține cont de caracteristicile betonului. De asemenea, s-a arătat că dispunerea conectorilor pe două rânduri și nu pe un rând, influențează doar sensibil efortul capabil al acestora. O altă consecință importantă și spectaculoasă a studiului experimental, a fost propunerea unei relații ce descrie în întregime curba de comportare a conectorilor în spațiul efort de forfecare – lunecare relativă, relație ce este frecvent utilizată în literatura de specialitate.

Studii asupra comportării diferitelor tipuri de conectori supuse acțiunii unor încărcări aplicate atât monoton cât și ciclic au fost efectuate în cadrul Laboratorului CEMSIG al Universității Politehnica din Timișoara. Experimentele conduse pe 11 specimene standardizate au evidențiat faptul că sub încărcări ciclice capacitatea de deformabilitate și de rezistență a conectorilor este semnificativ diminuată față de situația aplicării monotone a încărcărilor. De asemenea, s-a constatat o comportare bună a conectorilor de tip gujon, atât în termeni de ductilitate cât și de rezistență [38], îndeplinind cerințele impuse de norma europeană de proiectare [1]. În cadrul aceluiași laborator, s-a condus un studiu experimental pe opt cadre portal contravântuite excentric cu link-uri scurte și lungi. Șase din cele opt specimene au fost conformate în varianta stâlpi metalici și grinzi mixte oțel-beton, celelalte două fiind pur metalice. Studiul a dorit evidențierea diferențelor ce apar ca urmare a modificării conexiunii profil metalic – placă de beton pe lungimea corespunzătoare link-ului. În acest sens s-au considerat două variante de conectare, prima în care s-au dispus conectori

pe întreaga lungime a grinzii respectiv cea de doua în care, pe lungimea link-ului nu s-au dispus conectori. Printre altele, studiul a evidențiat o comportare similară a cadrelor portal caracterizate prin cele două variante de conectare, dar și faptul că întreruperea conectorilor pe lungimea link-ului nu conferă cadrelor cu grinzi mixte comportare de ansamblu similară cu cea a cadrelor pur metalice, această observație fiind în contradicție cu precizările standardului EC 8 [39].

Relativ recent, încercările experimentale efectuate de *Xue ș.a.* [40] pe zece specimene standardizate, au indicat că spațierea conectorilor influențează nesemnificativ rigiditatea și efortul capabil al conectorilor. Totuși, în cazul dispunerii unei singure perechi de conectori pe fiecare parte a specimenului standardizat, testele au indicat capacități portante și lunecări ultime superioare față de cele înregistrate pe specimenele având mai multe perechi de conectori. În baza rezultatelor experimentale, s-a concluzionat că standardului european EC 4 [1] determină cu suficientă acuratețe capacitatea portantă a conectorilor (fără a aplica coeficienți de siguranță) dispuși în mai multe perechi.

Studii experimentale extensive asupra stâlpilor cu secțiune mixtă-oțel beton pot fi regăsite în literatura de specialitate, dintre care dorim să trecem în revistă cercetările experimentale întreprinse de *Câmpian* [41] în cadrul Laboratorului Central al Facultății de Construcții Cluj-Napoca, ce au vizat studiul comportării stâlpilor micști având profilul metalic complet înglobat în volumul de beton. Programul a cuprins 12 stâlpi încastrați în bază, diferențiați prin lungime, calitatea materialelor și modul de aplicare a încărcării laterale (monoton sau ciclic), iar principalul mod de cedare s-a constatat a fi zdrobirea betonului comprimat coroborat cu fisurarea betonului întins și, în unele cazuri, flambajul armăturilor comprimate.

2.2 Studii analitice și analitico-numerice

Primul model analitic de analiză a grinzilor mixte oțel-beton, cu includerea efectelor interacțiunii incomplete dintre cele două componente aflate în contact, este reprezentat de modelul propus de *Newmark ș.a.* [14], publicat într-o primă formă în anul 1951, urmând ca în 1952 să fie prezentat în detaliu în anexa raportului studiului experimental condus de *Siess ș.a.* [42] ce a avut ca principal obiectiv studiul comportării diferitelor tipuri de dispozitive mecanice de conectare. Modelul prezentat adoptă o comportare pur elastică a componentelor (oțel, beton și conectori) și consideră că legătura dintre placa de beton și grinda metalică este continuă deși în mod curent aceasta este discretă. Exprimând pentru un element infinitesimal de grindă mixtă condițiile de echilibru și compatibilitate a deformațiilor, se obține o ecuație diferențială neomogenă de ordinul II, ce descrie comportarea grinzilor mixte în condițiile interacțiunii incomplete. În funcție de variabila aleasă ca necunoscută, se disting mai multe forme ale ecuației diferențiale, așa cum se va vedea în capitolul 4. În raportul întocmit de *Siess ș.a.* [42] se descrie cadrul general al problemei și se prezintă soluția ecuației diferențiale (având ca necunoscută efortul axial din componente de beton) pentru cazul grinzii simplu rezemate supuse acțiunii unei forțe concentrate la mijlocul deschiderii. Mai departe, autorii trasează curba de variație a efortului axial din placa de beton pentru diferite valori ale parametrului adimensional ce caracterizează nivelul de interacțiune dintre componente. De asemenea, se arată că în condițiile interacțiunii parțiale, săgeata la mijlocul deschiderii a

elementului analizat este, pe de o parte, mai mare față de cazul complementar al interacțiunii complete, iar pe de altă parte, crește pe măsură ce efectul compozit este mai puțin pronunțat.

Teza de doctorat redactată de *Kuang-Hsun Dai* [43] prezintă un model analitic de analiză a grinzilor mixte simplu rezemate în condițiile interacțiunii parțiale ținând cont de modul discret de dispunere a conectorilor. Divizând elementul mixt într-un număr finit de panouri, fiecare panou fiind delimitat de doi conectori succesivi, și exprimând condițiile de echilibru și compatibilitate pentru fiecare panou independent, se obține un sistem de ecuații ce are ca necunoscute eforturile axiale din dala de beton aferente fiecărui panou de grindă. Considerând modelul elastic-perfect plastic de comportare pentru oțel și betonul comprimat respectiv acceptând un model tri-liniar de comportare pentru conectori, și aplicând o metodă incrementală de conducere a analizei, autorul include în mod aproximativ efectele neliniarității fizice.

Adekola [44] propune în 1968 un model analitic mai riguros decât cel propus de Newmark [14], în care se ține cont de separarea dintre placa de beton și grinda metalică, fenomen ce conduce la săgeți diferite asociate celor două componente. Suplimentar, se ține seama și de efectele frecării ce reprezintă o consecință a presiunii exercitate de placa de beton asupra grinzii metalice la extremitățile elementului simplu rezemat unde componentele sistemului mixt rămân în contact. În acest context, sunt deduse două ecuații diferențiale ce descriu comportarea elementului mixt în condițiile interacțiunii parțiale. Aplicând metoda diferențelor finite și impunând condiții particulare de margine, se obține efortul axial din dala de beton și forța normală de separare, în prezența lunecării relative și a separării dintre componenta de beton și cea de oțel. Printr-un exemplu numeric, se arată că variația efortului axial din dala de beton determinată pe baza acestui model analitic este identică cu cea obținută de Newmark [42] neglijând efectele separării dintre componente.

Girhammar & Gopu [45] prezintă formularea și soluția ecuației diferențiale de ordinul VI ce descrie variația săgeții grinzii mixte simplu rezemate în condițiile interacțiunii complete, sub acțiunea combinată a încărcării uniform distribuite și a efortului axial. Studiile întreprinse de autori au fost formulate atât în teoria de ordinul I cât și în teoria de ordinul II, în care echilibrul elastic a fost exprimat pe forma deformată a elementului infinitesimal. În baza studiilor desfășurate, autori propun printre altele, relații pentru evaluarea forței critice de flambaj și a rigidității efective la încovoiere în prezența interacțiunii incomplete dintre componente, acceptând, în mod simplificat, o valoare a lungimii de flambaj identică cu cea folosită în analiza la stabilitate a stâlpilor simplu rezemați având secțiuni omogenă. Mai târziu, *Girhammar & Pan* [46] prezintă studii extensive care demonstrează că lungimea de flambaj a elementelor cu interacțiune parțială poate fi considerată egală cu cea a elementelor cu interacțiune completă (secțiuni omogene) pentru cele patru cazuri de rezemare folosite în practica inginerescă. De asemenea, se prezintă o expresie generală ce permite evaluarea rigidității la încovoiere a elementelor mixte caracterizate prin conexiune parțială, în vederea determinării săgeților și a eforturilor interioare. În baza studiilor analitice exacte descrise în [45,46], *Girhammar* [47] propune o serie de factori ce corectează deplasările și eforturile rezultate în urma unei analize de ordinul I în scopul includerii efectelor de ordinul II asupra

acestor mărimi, iar apoi în 2009 [48] sugerează relații simplificate de calcul dedicate în principal activității de proiectare a grinzilor mixte în starea limită de serviciu.

Nie ș.a. [49] prezintă un studiu analitic bazat pe modelul Newmark în care investighează efectul lunecării longitudinale dintre dala de beton și grinda metalică asupra săgeții și rigidității elastice a grinzilor simplu rezemate. Ecuația diferențială de ordinul II s-a formulat în necunoscuta lunecare longitudinală iar soluția este prezentată pentru trei situații distincte de încărcare. Săgețile adiționale datorate interacțiunii parțiale sunt apoi determinate prin intermediul curburii. Studiul scoate în evidență majorarea săgeților grinzilor mixte pe măsură ce efectul compozit dintre dala de beton și grinda metalică este mai puțin pronunțat și punctează că reduceri ale rigidității elastice la încovoiere cu până la 17% sunt înregistrate chiar și în cazul grinzilor mixte a căror conexiune la forfecare asigură atingerea momentului plastic (cazul conectării totale), deși codurile curente de proiectare neglijează efectul interacțiunii parțiale în cazul acestor elemente. Modelul a fost apoi extins astfel încât să permită evaluarea săgeților elastice a grinzilor mixte static determinate solicitate la încovoiere negativă, placa de beton fiind astfel întinsă [50].

Loh ș.a. [51] prezintă un procedeu incremental iterativ de analiză a grinzilor mixte static determinate supuse la încovoiere negativă capabil să surprindă comportarea neliniară a materialelor componente dar și a conectorilor. Pentru fiecare nivel de încărcare, se verifică iterativ condițiile de echilibru și compatibilitate într-un număr de $n+2$ secțiuni, n reprezentând numărul de conectori dispuși la interfața de contact dintre placa de beton și grinda metalică. Parametrii de control ai fiecărei secțiuni s-au ales a fi deformația de lunecare longitudinală, curbura și deformația corespunzătoare tălpii superioare. În cadrul procesului iterativ, aproximațiile inițiale ale parametrilor de control pentru fiecare secțiune de calcul s-au determinat pe baza soluției ecuației diferențiale de ordinul II ce caracterizează comportarea grinzilor mixte în condițiile interacțiunii incomplete conform modelului Newmark. Procesul iterativ aferent fiecărui increment de încărcare se încheie când momentul încovoiător interior diferă cu cel mult 1% față de cel solicitant. Modelul propus este capabil să surprindă cu acuratețe considerabilă comportarea de ansamblu a elementelor mixte cu interacțiune parțială însă aplicabilitatea procedurii este limitată la grinzi static determinate pentru care variația momentului încovoiător este cunoscută.

Un dezavantaj major al modelelor analitice descrise anterior constă în necesitatea particularizării soluției ecuației diferențiale de ordinul II în funcție de condițiile de rezemare și încărcare, devenind astfel dificilă soluționarea ecuației în cazul sistemelor static nedeterminate pentru care variația momentului încovoiător nu este cunoscută. În scopul eliminării acestor inconveniente, modelele analitice prezentate mai sus, în special modelul Newmark, a fost adesea înglobat în abordări numerice bazate fie pe metoda diferențelor finite, fie pe metoda elementelor finite. În acest context, *Faella ș.a.* [52–54] prezintă formularea în deplasări a unui element finit cu 6 grade de libertate dedicat analizei liniar elastice a grinzilor mixte în condițiile interacțiunii parțiale. Spre deosebire de cazul general al elementelor finite formulate în deplasări, în care câmpul deplasărilor este aproximat prin intermediul unor funcții de formă, în metoda propusă de autori câmpul deplasărilor este definit riguros prin

intermediul matricei de rigiditate și a vectorului forțelor nodale echivalente, determinate la rândul lor ca soluții exacte ale ecuației diferențiale de ordinul II având ca necunoscută curbura (a se vedea capitolul 4). Mai departe, această abordare nu necesită discretizarea barei, un singur element/bară fiind suficient pentru analiza liniar-elastică a grinzilor mixte cu interacțiune incompletă. O abordare similară este prezentată de *Ranzi ș.a.* [55] și de *Ranzi & Bradford* [56], diferența constând în faptul că ecuația diferențială de ordinul II, în baza căreia s-a determinat matricea de rigiditate a elementului de bară cu 6GDL respectiv 8GDL, a fost formulată și rezolvată în necunoscuta lunecare relativă (*slip*). În vederea includerii în analiză a comportării neliniare a materialelor componente și a conexiunii neliniare dintre acestea, fiecare bară necesită divizarea în mai multe elemente finite având caracteristici mecanice independente și aplicarea unei metode iterative de conducere a analizei așa cum este prezentat în [57,58]. Mai mult, folosind elementul finit prezentat în studiile anterioare, *Faella ș.a.* [59] punctează necesitatea considerării efectului combinat al interacțiunii parțiale și al nodurilor semirigide în analiza liniar elastică a cadrelor plane alcătuite din stâlpi metalici și grinzi mixte.

Li & Li [60] prezintă formularea în deplasări a unui element finit de bară de cadru plan ținând cont de nivelul de interacțiune dintre componente. Matricea elastică de rigiditate a elementului de bară supus acțiunii momentelor încovoietoare nodale, este formată pe baza soluției ecuației diferențiale de ordinul IV ce descrie variația săgeților în lungul elementului mixt cu interacțiune incompletă (a se vedea capitolul 4) obținută în condițiile și ipotezele modelului Newmark [14]. Pentru determinarea matricei de rigiditate, se acceptă ipoteza conform căreia lunecarea longitudinală la capetele elementului de bară este zero, deși astfel de deplasări se înregistrează indiferent de nivelul de conectare asigurat. Astfel, autorii arată că modelul surprinde cu acuratețe comportarea în domeniul elastic a cadrelor plane sollicitate de forțe laterale, însă în cazul aplicării unor încărcări gravitaționale sunt introduse erori în răspunsul structural al structurilor analizate. Un alt neajuns al modelului este reprezentat de necesitatea cunoașterii prealabile a vectorului încărcărilor nodale (în situația aplicării de încărcări în lungul elementelor) în vederea determinării soluției ecuației diferențiale.

O alta abordare bazată pe metoda elementului finit, formulată în scopul analizei în domeniul elastic al grinzilor mixte cu interacțiune incompletă este descrisă succint de *Luan ș.a.* [61]. Autorii consideră grinda mixtă ca fiind formată din două elemente independente, unul pentru placa de beton respectiv altul pentru grinda metalică, caracterizate prin rotiri și deplasări verticale egale. Soluția ecuației diferențiale de ordinul II formulată în necunoscuta lunecare longitudinală caracterizează legătura dintre cele două elemente independente. Limitările modelului anterior [60] se regăsesc și aici, făcând astfel dificilă analiza grinzilor mixte având scheme de rezemare și încărcare arbitrare.

Fabbrocino ș.a. în [62] propun un procedeu numeric de analiză a grinzilor mixte oțel-beton sollicitate la încovoiere pozitivă, ce are la bază modelul analitic fundamentat de *Newmark* [14]. Includerea comportării neliniare a materialelor s-a realizat prin aplicarea unui procedeu iterativ de rezolvare a ecuației diferențiale prin metoda diferențelor finite coroborată cu tehnica de transformare a problemei cu condiții la frontieră într-o problemă cu

condiții inițiale. Metoda s-a dovedit a fi capabilă să surprindă comportarea de ansamblu a grinzilor mixte simplu rezemate, însă costurile computaționale sunt semnificative, deoarece pentru aplicarea metodei iterative de determinare a lunecării longitudinale este necesară cunoașterea prealabilă a unei familii de curbe moment încovoietor-curbură parametrizate în funcție de nivelul de interacțiune dintre dala de beton și grinda metalică, pentru fiecare secțiune transversală de calcul. Mai mult, metoda necesită o rafinare fină a câmpului de puncte de integrare generate în lungul elementului. Această metoda a fost apoi extinsă în scopul determinării răspunsului neliniar al grinzilor simplu rezemate sollicitate la încovoiere negativă [63] respectiv al grinzilor mixte continue [64,65].

Modelele analitice amintite și descrise succint anterior sunt fundamentate în teoria de bară Euler-Bernoulli care acceptă ipoteza conform căreia secțiunile transversale ale elementelor încovoiate rămân plane și normale la axa barei și după deformare, neglijând astfel efectul deformațiilor unghiulare. În literatura de specialitate se disting câteva studii relativ recente care sunt concentrate pe analiza grinzilor mixte cu interacțiune parțială ținând cont și de efectele deformațiilor unghiulare, fiind astfel formulate în teoria de bară Timoshenko în care secțiunile transversale rămân plane pe parcursul încovoierii (ipoteza lui Bernoulli) însă ortogonalitatea lor în raport cu axa deformată nu mai este valabilă. În acest context, *Schnabl ș.a.* [66] propun un model analitic de analiză în domeniul elastic de comportare al grinzilor mixte oțel-beton cu interacțiune parțială în care fiecare componentă (placa de beton respectiv grinda metalică) este schematizată printr-un element de bară Timoshenko, luându-se în considerare deformațiile unghiulare și implicit rotirile independente ale celor două componente, care se consideră că rămân în contact pe tot parcursul analizei (separarea transversală este neglijată). În aceste condiții, exprimând condițiile de echilibru și de compatibilitate, se deduce un sistem de două ecuații diferențiale cuplate de ordin superior având ca necunoscute deplasarea relativă longitudinală dintre componente și forța normală unitară de separare. În articolul citat nu se prezintă soluția analitică a sistemului de ecuații diferențiale însă se precizează principalele concluzii ale unui studiu parametric condus pe o grindă simplu rezemată încărcată cu sarcină distribuită. Astfel, efectul deformațiilor unghiulare devine pronunțat pentru grinzile mixte caracterizate prin valori mari ale rigidității conexiunii ori pentru grinzi scurte având valori mici ale raportului lungime/înălțime.

Modelul propus de *Schnabl ș.a.* [66] este reluat și completat de *Nguyen ș.a.* în [67,68]. Autorii prezintă soluția sistemului cu două ecuații diferențiale cuplate și precizează expresiile tuturor parametrilor independenți ce caracterizează comportarea elementului mixt. Este descrisă în continuare procedura de obținere a matricei elastice de rigiditate a grinzii compozite cu interacțiune parțială, care a fost apoi inserată în formularea în deplasări a unui element finit cu 10 grade de libertate. Cele două exemple numerice analizate prin metoda propusă scot în evidență reducerea efectelor deformațiilor unghiulare asupra săgeților grinzilor mixte pe măsură ce caracterul compozit devine mai puțin pronunțat. De asemenea, s-a observat că lunecarea relativă dintre componente elementului mixt este influențată neglijabil de deformațiile unghiulare. O clasificare a diferitelor modele analitice de analiză a grinzilor mixte în funcție de ipotezele adoptate și implicit de numărul parametrilor independenți ce caracterizează comportarea acestor elemente este realizată de *Martinelli ș.a.*

[69]. Autorii nu includ în clasificare formulări analitice de ordin superior, care țin cont, de exemplu, de distribuția neuniformă a tensiunilor normale pe lățimea dalei de beton și pe lățimea tălpilor profilului metalic datorită efectului de '*shear lag*'. O astfel de formulare este descrisă succint de *Gara ș.a.* [70].

2.3 Studii numerice

Dezvoltarea continuă și accelerată a sistemelor hardware și software permite comunității științifice utilizarea tot mai pronunțată a metodelor numerice de analiză, în pofida faptului că în multe situații acestea devin costisitoare din punct de vedere computațional. În ultimele decenii, metoda elementului finit a cunoscut o dezvoltare și utilizare perpetuă, fiind o unealtă de analiză care permite practic studiul elementelor structurale de orice formă, cu luarea în considerare a principalilor factori determinanți în răspunsul mecanic al acestora, însă în numeroase situații modelele numerice necesită o discretizare fină, rezultând astfel un număr mare de elemente finite ce conduce implicit la timp de calcul și resurse hardware substanțiale. Analizele structurale ale elementelor și structurilor mixte oțel-beton bazate pe metoda elementului finit pot fi, în general, divizate în două mari categorii: o primă categorie utilizează elemente finite, de obicei unidimensionale, special dezvoltate de cercetători, care permit studiul comportării elementelor mixte cu includerea în analiză a principalilor factori ce influențează răspunsul structural, în timp ce a doua categorie presupune utilizarea unor pachete comerciale de elemente finite, din această divizie cele mai cunoscute și utilizate programe fiind Ansys, Abaqus, MSC Marc, LS-DYNA, Nastran, Adina.

2.3.1 Studii numerice via pachete comerciale de elemente finite

În literatura de specialitate pot fi consultate numeroase studii numerice asupra elementelor și structurilor mixte oțel-beton, diferențiate în principal prin complexitatea tipurilor de elemente finite (uni-, bi- sau tridimensionale) selectate pentru modelarea diferitelor componente ale elementelor mixte (profil metalic, placă de beton, armături, conectori).

Un model numeric, eficient din punct de vedere al resurselor hardware utilizate, este dezvoltat de *Wang ș.a.* [71] pe platforma programul comercial Abaqus. Fiecare bară este modelată prin intermediul unor elemente finite unidimensionale, ale căror secțiuni transversale sunt divizate, în etapa de pre-procesare, în fibre prin intermediul unui program extern. Mai mult, pe formatul procedurii UMAT, caracteristică programului Abaqus, autorii au definit o serie de modele constitutive uniaxiale de comportare pentru beton, oțel structural și armături, care au fost corespunzător atașate fiecărei fibre componente a diferitelor secțiuni transversale. Exemplele numerice folosite pentru validare, scot în evidență eficacitatea și fiabilitatea modelului, acesta fiind capabil să traseze cu acuratețe considerabilă curba de comportare a diferitelor tipuri de elemente mixte (grinzi, stâlpi) și cadre mixte. Un dezavantaj al modelului constă în imposibilitatea acestuia de a lua în considerare efectele interacțiunii parțiale dintre componente.

Zhao ș.a. [72] idealizează comportarea profilului metalic prin elemente finite de fibră, componenta de beton prin elemente bidimensionale de tip placă, în timp ce legătura în plan

longitudinal este simulată prin intermediul unor resorturi cu comportare neliniară, iar în plan transversal este modelată prin elemente liniare rigide. Modelul astfel generat este unul simplu și ușor de obținut dar totuși prezice cu succes comportarea de ansamblu a grinzilor mixte simplu rezemate incluzând efectele neliniarităților fizice și geometrice și, mai mult, resursele computaționale necesare analizei neliniare sunt reduse. *Vasdravellis ș.a.* [73] demonstrează că un astfel de model este capabil să surprindă și comportarea în regim dinamic a cadrelor mixte cu o deschidere și o travee.

Un model format din aceleași tipuri de elemente finite este propus, și de *Nie ș.a.* [74] pentru analiza neliniară a grinzilor mixte, însă conexiunea dintre elementele liniare și cele de tip placă s-a considerat rigidă, neglijând astfel efectele interacțiunii parțiale. Comparativ cu modelul precedent, acesta din urmă este adresat și analizei cadrelor alcătuite din stâlpi metalici și grinzi mixte, existând posibilitatea includerii în analiză a efectelor conexiunilor semirigide prin intermediul unor curbe moment-rotire atribuite resortului ce asigură legătura dintre elementele verticale și cele orizontale. Suplimentar, autorii arată că modelarea plăcilor în întregime conduce la rigidizarea răspunsului structural al cadrelor mixte, în comparație cu situația în care efectul plăcilor este considerat doar prin lățimea lor efectivă, determinată urmând prescripțiile standardelor de proiectare.

Un studiu interesant privind performanțele a cinci modele numerice alcătuite în programul Abaqus prin diverse combinații de elemente finite este descris de *Chung & Sotelino* [75]. În Tab. 2.1 se prezintă sintetic tipul elementelor finite utilizate pentru alcătuirea fiecărui model numeric de analiză a grinzilor mixte simplu rezemate. Cuplarea elementelor corespunzătoare profilului metalic respectiv plăcii de beton s-a realizat prin așa numitele linkuri rigide, luncările relative longitudinale dintre componente fiind astfel împiedicate.

Tab. 2.1 Modele numerice și elemente finite asociate

Model	Profil metalic		Placa de beton
	Tălpi	Inimă	
1	Placă (<i>shell</i>)	Placă (<i>shell</i>)	Placă (<i>shell</i>)
2	Bară (<i>beam</i>)	Placă (<i>shell</i>)	Placă (<i>shell</i>)
3	Placă (<i>shell</i>)	Bară (<i>beam</i>)	Placă (<i>shell</i>)
4	Bară (<i>beam</i>)		Placă (<i>shell</i>)
5	Placă (<i>shell</i>)	Placă (<i>shell</i>)	Cărămidă (<i>brick</i>)

Se observă că modelul 5 este cel mai complex iar modelul 4 este cel mai simplist din punct de vedere al numărului de grade de libertate incluse în modelare, însă este cel mai eficient sub aspectul resurselor computaționale folosite. Exemplele numerice demonstrează capacitatea fiecărui model de a surprinde cu acuratețe comportare la încovoiere a grinzilor mixte, furnizând deplasări și deformații ce diferă cu 5-10% față de valorile înregistrate experimental. Modelul 4 s-a dovedit a fi o combinația mai mult decât satisfăcătoare între simplitate și acuratețe însă nu poate fi folosit în cazul specimenelor care prezintă caracteristici mecanice diferite ale oțelului din tălpile respectiv inima profilului metalic.

Titoum ș.a. [76] au generat în Ansys un model numeric, alcătuit din elemente formulate în stare plană de tensiune, cu scopul observării efectelor pe care le are conectarea parțială asupra comportării de ansamblu a grinzilor mixte semi-continue (grinzi detașate din structuri mixte multietajate caracterizate prin îmbinări semirigide). Studiul a scos în evidență creșterea pronunțată a săgeții la mijlocul deschiderii respectiv a rotirilor la capetele elementului în urma reducerii gradului de conectare, capacitatea portantă nefiind drastic afectată. În contradicție cu principalele norme de proiectare, autorii sugerează acceptarea conceptului de conectare parțială în zonele supuse acțiunii momentelor încovoietoare negative dacă conectorii posedă ductilitate considerabilă.

Studii numerice extensive asupra comportării grinzilor mixte simplu rezemate având în componență profile de oțel de calitate superioară au fost raportate de *Ban & Bradford* [77]. Modelul numeric a fost generat în programul comercial Abaqus și era alcătuit din elemente finite de tip *shell* utilizate pentru modelarea profilului metalic dar și a plăcii de beton. În cazul unei astfel de modelări, elementele finite utilizate pentru simularea componentei de beton sunt alcătuite din mai multe fâșii de grosime constantă, cărora li se pot atribui materiale distincte, existând astfel posibilitatea considerării armăturilor flexibile. Conexiunea profil-placă s-a realizat prin resorturi cu comportare neliniare, luându-se astfel în considerare efectele interacțiunii parțiale. Printre altele, studiile întreprinse arată că analiza rigid plastică acceptată de codurile de proiectare ca principală metodă de evaluare a capacității portante la încovoiere supraestimează momentul capabil al grinzilor mixte alcătuite din oțeluri de calitate superioară. Aceeași concluzie este observată și asupra rigidității inițiale a grinzilor mixte caracterizate prin conectare totală.

Queiroz ș.a. [78] propun un model avansat de analiză a grinzilor mixte oțel-beton folosind pachetul comercial de elemente finite Ansys. Modelul numeric s-a obținut prin combinarea elementelor finite tridimensionale cu cele bidimensionale, utilizate pentru modelarea plăcii de beton (și a armăturilor aferente) respectiv a profilului metalic. Conectarea celor două componente s-a asigurat prin resorturi neliniare de lungime zero a căror comportare se definește tabelar prin perechi de valori forță de forfecare – deplasare relativă asociată. Oțelul întins și comprimat s-a modelat ca material elastic-perfect plastic cu reconsolidare, iar betonul comprimat s-a idealizat printr-un model multiliniar care nu i-a în considerare porțiunea descendentă a curbei reale a betonului comprimat ci consideră o consolidare cvasi-orizentală pentru evitarea problemelor de convergență. Exemplele de validare evidențiază capacitatea modelului de a surprinde comportarea reală a grinzilor mixte oțel-beton. Studiile parametrice conduse în continuare arată că reducerea gradului de conectare (și implicit al nivelului de interacțiune) are ca efect flexibilizarea elementelor și afirmă că efectele conexiunii incomplete trebuie luate în considerare. Utilizând un model numeric similar, *Ibrahim ș.a.* [79] conduc numeroase studii parametrice, în vederea cercetării influenței numărului de conectori, al rezistenței și dimensiunilor componentei din beton, asupra rigidității și capacității de rezistență a grinzilor mixte simplu rezemate. În 2009 *Queiroz ș.a.* [80,81] propun un model simplificat de analiză alcătuit în întregime din elemente finite unidimensionale în care efectul armăturilor este luat în considerare doar în zonele solicitate la încovoiere negativă, iar efectul dalei de beton este considerat doar în zonele de câmp ale

elementelor mixte. Se arată că și acest model este capabil să reproducă curba de comportare a elementului în spațiul încărcare-deplasare cu un efort de calcul semnificativ mai redus decât în cazul modelului precedent, însă efectele locale nu pot fi studiate.

Spre deosebire de modelul recomandat de *Queiroz ș.a.* [78], *El-Lobody & Lam* [82] simulează atât placa de beton cât și profilul metalic utilizând elemente finite tridimensionale, și consideră și ramura parabolică descendentă a betonului comprimat, însă nu includ în analiză reconsolidarea oțelului. Ambele studii mai sus amintite folosesc, pe grosimea dalei de beton, un singur element finit de tip cărămidă (*brick*) cu opt noduri, aproximând astfel destul de grosier distribuția deformațiilor, deoarece aceste elemente finite admit variație constantă a deformațiilor pe grosimea lor. Totuși, exemplele numerice de validare demonstrează capacitatea modelului de a surprinde cu acuratețe ridicată rigiditatea, rezistența și modul de cedare al grinzilor mixte simplu rezemate. Studiul prezentat de *Vasdravellis ș.a.* [83] scoate în evidență capacitatea unui astfel de model numeric de a surprinde cu acuratețe flambajul local al inimii și tălpii comprimate asociate grinzilor mixte supuse la compresiune și încovoiere negativă.

Jeong [84] formulează, pe platforma programului comercial Diana 7.2, un model numeric pentru analiza neliniară a grinzilor mixte simplu rezemate solicitate la încovoiere. Atât componenta de beton cât și cea metalică sunt simulate prin elemente finite tridimensionale iar legătura dintre ele se realizează prin elemente discrete bidimensionale de contact având patru noduri și grosime zero, a căror comportare în sens longitudinal este definită prin perechi forță de forfecare-deplasare relativă corespunzătoare. Într-un studiu precedent [85] autorii demonstrează fiabilitatea acestui model de interacțiune. Modelul numeric descris în [84] este utilizat în vederea conducerii unui studiu parametric cuprinzând douăzeci și cinci de grinzi, diferențiate prin nivelul de interacțiune și raportul dintre lungimea de forfecare și grosimea dalei de beton. Rezultatele obținute, în termeni de rigiditate și rezistență, sunt apoi analizate statistic și, în final, se propun relații analitice aproximative pentru evaluarea rigidității respectiv rezistenței grinzilor mixte simplu rezemate, în funcție de parametrii mai sus amintiți.

În fine, cel mai complex model numeric este cel care utilizează elemente finite tridimensionale pentru modelarea tuturor componentelor subansamblelor mixte, nefiind astfel necesară utilizarea de elemente speciale pentru simularea interacțiunii parțiale dintre placa de beton și grinda metalică. Astfel de modele numerice iau în considerare practic toate sursele de neliniaritate și surprind cu succes efectele globale și locale ce domină răspunsul structural al grinzilor mixte [86–88], al stâlpilor micști [89,90], al nodurilor mixte [91,92] și al specimenelor standardizate folosite pentru evaluarea curbei de comportare a conectorilor [93,94]. Aceste modele sunt costisitoare din punct de vedere al resurselor computaționale și al timpilor de analiză, fiind practic imposibil de aplicat pentru determinarea răspunsului structurilor multietajate plane sau spațiale. Mai mult, aceste modele introduc adeseori erori numerice datorate fenomenelor de tip *shear locking* și *hourglassing*, discretizarea și selecția tipurilor de elemente finite (cu sau fără integrare redusă, cu variație liniară sau pătratică a deplasărilor în lungul laturilor) necesitând astfel atenție sporită [95].

2.3.2 Studii numerice via elemente finite special dezvoltate pentru analiza structurilor mixte oțel-beton

Din punct de vedere al formulării, elementele finite de tip bară (liniare) cu două sau mai multe noduri la capetele elementului, dezvoltate pentru analiza structurilor mixte oțel-beton pot fi clasificate în elemente formulate în deplasări, în eforturi și elemente cu formulare mixtă. În prima categorie se încadrează elementele care aproximează pe baza unor funcții de interpolare câmpul de deplasări pe lungimea elementului în funcție de deplasările nodale. Deși formularea și implementarea acestor elemente este relativ simplă, pentru atingerea unui nivel satisfăcător al acurateței rezultatelor, este necesară utilizarea mai multor elemente pentru modelarea fiecărei bare independente a structurii. La cealaltă extremă se situează elementele formulate în eforturi în cadrul cărora variația eforturilor în lungul elementului este exprimată în funcție de forțele nodale. Diagramele de eforturi putând fi trasate în funcție de forțele de la capetele elementului, se poate afirma că, în general, în absența efectelor locale ale neliniarității geometrice și cele asociate efectelor de conectare parțială, un singur element formulat în eforturi este suficient pentru modelarea fiecărei bare independente a structurii [96], fiind astfel mai eficiente din punct de vedere computațional în comparație cu elementele finite formulate în deplasări.

2.3.2.1 Elemente finite formulate în deplasări

Gattesco [97] prezintă formularea în deplasări unui element finit cu opt grade de libertate (4 noduri) dedicat analizei neliniare a grinzilor mixte cu interacțiune parțială. Formularea are la bază ipotezele modelului analitic Newmark și admite astfel că placa de beton și profilul metalic rămân în contact, iar conexiunea din ele este continuă. Gradele de libertate ale nodurilor de la capetele elementului finit sunt reprezentate prin deplasările axiale corespunzătoare componente de beton respectiv celei metalice, rotirea și deplasarea pe verticală, acești ultimi doi parametri având valori egale pentru ambele componente ale elementului mixt. Conducerea analizei neliniare se face printr-un procedeu incremental-iterativ cu control în lungimea de arc, în care matricea de rigiditate tangentă este evaluată la începutul fiecărui increment de încărcare. Odată determinat câmpul de deplasări corespunzător fiecărei iterații, se determină deformațiile axiale și cele datorate încovoierii în fiecare fâșie a secțiunii transversale, iar pe baza relațiilor constitutive se evaluează tensiunile corespunzătoare. Eforturile interioare se obțin apoi prin integrarea tensiunilor pe înălțimea secțiunii transversale, prin divizarea acestora în mai multe fâșii și aplicarea cuadraturii Gauss-Legendre pe fiecare fâșie. Deplasarea orizontală relativă dintre cele două componente este calculată pe baza condițiilor de compatibilitate a deplasărilor de la capetele elementului finit. Exemplele numerice de validare evidențiază capacitatea metodei propuse de a surprinde cu acuratețe răspunsul structural al grinzilor cu interacțiune parțială, însă nu ține cont de deformațiile unghiulare aferente grinzii Timoshenko și nu surprinde fenomenul de flambaj.

Dall'Asta & Zona [98] prezintă sintetic rezultatele unui studiu numeric prin care s-a dorit evidențierea diferențelor ce apar între rezultatele furnizate folosind trei tipuri de elemente finite (EF) formulate în deplasări. Astfel, în baza condițiilor de echilibru și de compatibilitate asociate modelului Newmark de interacțiune parțială, autorii formulează în deplasări trei EF

pentru analiza neliniară a grinzilor mixte cu conexiune incompletă, diferențiate prin numărul gradelor de libertate (GDL) considerate: 8GDL (4 noduri), 10GDL (6 noduri) respectiv 16GDL (10 noduri) (Fig. 2.1).

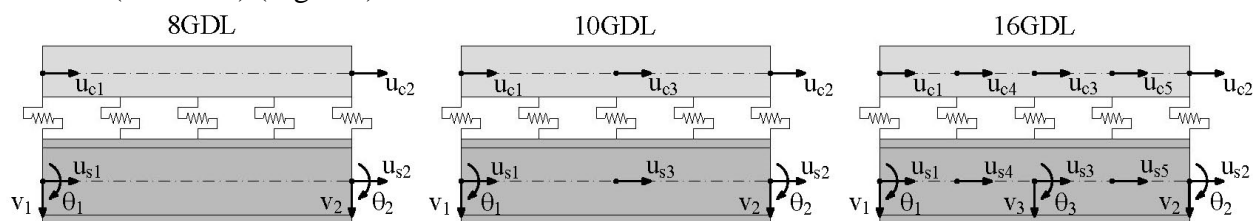


Fig. 2.1 Elemente finite formulate în deplasări cu 8GDL, 10GDL și 16GDL

Elementul cu 8GDL este cel care dispune de numărul minim de GDL necesare descrierii câmpului de deplasări. Variația deplasărilor axiale în lungul elementului se consideră a fi liniară, iar săgețile sunt approximate prin polinoame Hermite de ordinul trei. EF cu 10GDL este obținut prin adăugarea a două noduri interioare, translațiile orizontale fiind astfel descrise prin polinoame de gradul doi. În cazul elementului cu 16GDL, prin introducerea a câte trei noduri interioare în fiecare componentă, respectiv a unui nod interior în lungul interfeței de contact, deplasările orizontale și verticale sunt approximate prin polinoame Hermite de gradul patru respectiv de gradul cinci. Eficiența și nivelul de acuratețe oferit de fiecare tip de EF este testată pe un exemplu numeric constituit dintr-o grindă mixtă continuă cu două deschideri. Pentru același număr total de GDL per grindă, folosirea EF cu 8GDL introduce erori semnificative în răspunsul structural al grinzii și, mai mult, prezintă instabilități numerice în cazul grinzilor caracterizate prin valori mari ale rigidității conexiunii. Aceste concluzii privind problemele și erorile ce intervin prin utilizarea EF cu 8GDL sunt semnalate și de *Ranzi ș.a.* [99]. Elementele finite de ordin superior sunt capabile să prezică răspunsul grinzii mixte în domeniul neliniar, însă este impusă o discretizare fină rezultând astfel un număr mare de GDL și implicit valori însemnate ale timpilor de analiză și a resurselor computaționale utilizate. Efectele neliniarității geometrice și a deformațiilor unghiulare nu sunt luate în considerare în modelele descrise anterior. Utilizând EF cu 10GDL, *Zona ș.a.* [100] studiază comportarea în domeniul neliniar a cadrelor mixte supuse acțiunii seismice. Autorii punctează necesitatea considerării deformabilității conexiunii profil metalic-placă de beton, acest aspect având un impact semnificativ asupra perioadelor de vibrație și a deplasărilor relative de nivel. Mai mult, se arată că gradul de conectare prezintă influență majoră asupra rigidității de ansamblu a structurii.

Ranzi ș.a. [101] prezintă formularea în deplasări a unui EF cu 14GDL (6 noduri) (Fig. 2.2) dedicat analizei grinzilor mixte în ipoteza comportării elastice a materialelor constituențe. Spre deosebire de formulările anterioare, prezentul model este fundamentat pe abordarea analitică descrisă de *Adekola* [44] conform căreia componenta de beton și cea metalică au rotații și deplasări verticale distincte, luându-se astfel în considerare separarea transversală dintre cele două componente. Exemplele numerice prezentate, evidențiază că pentru sisteme static determinate, rezultatele (săgeți maxime, variația deplasărilor axiale relative) obținute cu procedeul propus nu diferă substanțial față de cele obținute cu modelul simplificat propus de Newmark.

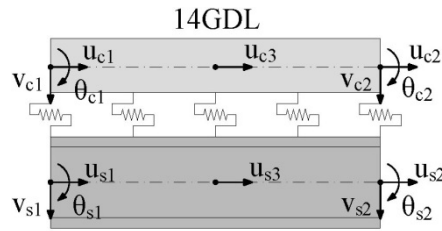


Fig. 2.2 Element finit formulat în deplasări cu 14GDL

Deformațiile unghiulare ale componentei metalice sunt luate în considerare de *Ranzi & Zona* [102] prin formularea de elemente finite compuse din două componente distincte. Prima, utilizată pentru modelarea comportării plăcii de beton este formulată în teoria Euler-Bernoulli (EB), iar a doua, aferentă profilului metalic, este formulată în teoria de bară Timoshenko (T). Mai mult se prezintă trei astfel de EF compuse (10GDL, 13GDL și 21GDL), diferențiate prin numărul GDL considerate și implicit prin gradul polinoamelor alese pentru descrierea câmpului de deplasări. Comportarea oțelului și a conexiunii se consideră liniar-elastică, în timp ce efectele de lungă durată asociate betonului (curgerea lentă) sunt incluse în formulare. Un prim studiu numeric scoate în evidență faptul că utilizarea EF cu 10GDL atrage după sine erori substanțiale în răspunsul structural al elementului mixt analizat, datorită incompatibilității funcțiilor de formă ce descriu câmpul de deplasări al acestui element. În continuare, studiul parametric condus pe 200 de grinzi simplu rezemate și continue, relevă că luarea în considerare a deformațiilor unghiulare asociate componentei metalice conduce, în general, la diferențe de până la 10% în ceea ce privește răspunsul structural în deplasări, rotații, curburi, eforturi interioare față de rezultatele obținute cu modelul clasic Newmark. Mai mult, diferențele mai mari sunt observate în cazul grinzilor caracterizate prin valori ridicate ale rigidității conexiunii profil-placă și efectele de lungă durată asociate betonului tind să minimizeze aceste diferențe. *Zona & Ranzi* [103] realizează un studiu comparativ în care testează abilitatea diferitelor tipuri de elemente finite formulate în deplasări de a surprinde răspunsul neliniar al grinzilor mixte cu interacțiune parțială. În acest scop sunt preluate EF cu 10GDL și 13GDL descrise de *Dall'Asta & Zona* [98], care nu țin cont de efectul deformațiilor unghiulare, ambele componente ale elementului mixt fiind formulate în teoria EB, fiind astfel denumite sintetic EB-EB. O alta categorie de EF incluse în studiu sunt cele cu 13GDL și 21GDL propuse de *Ranzi & Zona* [102] care iau în considerare deformațiile unghiulare ale componentei metalice, în consecință fiind denumite EB-T. În fine, autorii includ în studiu și un EF cu 16GDL, a cărui componente (profil metalic respectiv placă de beton) sunt formulate în teoria de bară Timoshenko, deformațiile unghiulare fiind astfel considerate și pentru componenta din beton. Acest ultim model, denumit T-T, nu ține cont de interacțiunea moment încovoietor-forță tăietoare, ci consideră două relații constitutive decuplate pentru modelarea betonului. Toate EF incluse în studiu, consideră o conexiune continuă între cele două componente ale sistemului mixt. Analiza neliniară este condusă printr-un procedeu incremental-iterativ cu control în deplasări. În cazul elementelor mixte a căror cedare este datorată încovoierii, cele trei categorii de EF furnizează, în general, rezultate care sunt în bună concordanță cu cele obținute experimental, deși în numeroase situații este necesară o discretizare fină (20 de EF/grindă) pentru trasarea cu acuratețe a curbelor ce descriu variația eforturilor interioare la diferite niveluri ale forței concentrate

aplicate. În cazul grinzilor scurte, dominate de cedări datorate forțelor tăietoare mari, EF din categoria EB-EB supraestimează grosier capacitatea portantă, chiar dacă discretizarea aleasă este fină. Rezultatele obținute în spațiul forță-deplasare prin utilizarea celorlalte două categorii de EF (EB-T respectiv T-T) încadrează răspunsul experimental. Modelul EB-T supraestimează răspunsul deoarece influența forței tăietoare asupra componentei din beton nu este luată în considerare, iar modelul T-T tinde să subestimeze încărcarea capabilă, datorită relațiilor constitutive decuplate considerate pentru beton.

Ranzi & Bradford [104] rafinează formularea EF cu 6GDL [55] respectiv cu 8GDL [56] astfel încât să includă efectele neliniarității materialelor constitutive. Spre deosebire de formulările precedente, aceste EF prezintă avantajul determinării câmpului de deplasări folosind matricea de rigiditate asamblată în concordanță cu soluția exactă a ecuației diferențiale de ordinul II având necunoscuta *slip*, caracteristică modelului analitic Newmark. Calculul neliniar este condus printr-un procedeu incremental-iterativ, iar în cadrul fiecărei iterații caracteristicile secționale sunt evaluate pe baza modulilor de elasticitate secanți corespunzători fiecărei fâșii componente a secțiunii transversale. Caracteristicile de rigiditate aferente fiecărui EF se obțin sumarea ponderată a caracteristicilor unui număr discret de secțiuni transversale localizate în punctele schemei de integrare Gauss-Legendre. Pentru obținerea de rezultate caracterizate prin acuratețe ridicată, grinzile mixte necesită divizarea în EF al căror raport lungime-grosime să fie 0.5, rezultând astfel un număr însemnat de EF. Mai mult în lungul fiecărui EF se impune considerarea a 3-5 puncte de integrare.

Cas ș.a. [105] prezintă formularea matematică a unui EF în cadrul căreia se apelează la o formă modificată a principiului lucrului mecanic virtual care are ca necunoscute deformațiile și nu deplasările. În consecință, implementarea metodei presupune interpolarea curburii și a deformațiilor axiale corespunzătoare celor două componente, de exemplu, prin intermediul polinoamelor Lagrange. Utilizând aceste deformații și apelând la o serie de ecuații diferențiale, se determină câmpul de deplasări asociat EF (translațiile orizontale aferente profilului metalic respectiv plăcii de beton, săgeata și rotirea, acestea din urmă considerate a fi egale în cele două componente). EF are opt grade de libertate exterioare (săgeata, rotirea și deplasările axiale la cele două extremități) respectiv $3N+4$ GDL interioare, unde N reprezintă numărul de puncte de interpolare selectate. Exemplele numerice prezentate atestă capacitatea modelului de a surprinde cu acuratețe pronunțată comportarea grinzilor mixte cu interacțiune parțială, incluzând efectele neliniarității fizice și geometrice [106].

Liew ș.a. [10] propun o metodă eficientă de analiză a cadrelor spațiale alcătuite din stâlpi metalici și grinzi mixte oțel-beton supuse acțiunii combinate a încărcărilor gravitaționale și laterale. Neliniaritatea fizică este luată în considerare utilizând conceptul de articulație plastică, iar adoptând relațiile neliniare $M-N-\Phi$ propuse de *Attalla* [107] se i-a în considerare în mod aproximativ degradarea rigidității la încovoiere a secțiunilor transversale asociate stâlpilor metalici. Același principiu este aplicat și în cazul grinzilor, însă relațiile $M-\Phi$ propuse pentru modelarea inelasticității la nivel de secțiune, introduc în mod aproximativ efectul conectării parțiale dintre placa de beton și profilul metalic asupra rigidității la încovoiere. În vederea considerării dezvoltării zonelor plastice în lungul elementului, bara

este divizată într-un număr de segmente, iar pentru fiecare nod interior obținut se evaluează rigiditatea la încovoiere în baza relațiilor neliniare $M-\Phi$. Matricea de rigiditate la nivel de element se obține apoi prin procedeul de condensare statică. Prin exemplele numerice de validare prezentate, modelul propus s-a dovedit a fi unul eficient din punct de vedere computațional, oferind totodată rezultate cu un grad acceptabil de acuratețe. Dezavantajul major al metodei prezentate constă în necesitatea cunoașterii curbelor $M-\Phi$ înaintea efectuării unei analize globale.

Iu [108] prezintă un procedeu de analiză a grinzilor mixte solicitate la încovoiere pură, având la baza modelul articulațiilor plastice punctuale cu formare graduală, plasticizarea materialului fiind astfel concentrată în secțiunile de la extremitățile elementului, iar barele păstrează o comportare liniar elastică deoarece sarcinile exterioare sunt aplicate numai în noduri. Efectul neliniarității fizice este luat în considerare prin actualizarea, în funcție de nivelul de solicitare, a rigidității resorturilor asociate articulațiilor plastice de la capetele elementului. Momentele încovoietoare capabile aferente domeniului elastic respectiv plastic (necesare în formularea modelului adoptat de articulație plastică) se evaluează folosind caracteristicile geometrice propuse de codul american AISC [3], ținând astfel cont în mod aproximativ de efectele conectării parțiale dintre profilul metalic și placa de beton. Modelul propus nu este capabil să introducă efectele comportării neliniare a conectorilor și necesită divizarea grinzii în sub-elemente caracterizate prin momente încovoietoare de același semn. Acest model a fost extins de *Iu ș.a.* [12] în vederea aplicării acestuia pentru studiul comportării neliniare a cadrelor mixte oțel-beton. Plastificarea graduală a secțiunilor transversale de la capetele elementului este considerată prin intermediul a două suprafețe de plastificare $N-M_y-M_z$, prima corespunzătoare inițierii curgerii, respectiv cea de-a doua aferentă plastificării totale. Efectele neliniarității geometrice globale sunt luate în considerare prin formularea Lagrangiană actualizată, deci prin modificarea configurației geometrice a structurii în cadrul fiecărui increment de încărcare. Determinarea soluției problemei neliniare se face prin aplicarea metodei incremental-iterative cu control în încărcări, Newton-Raphson, astfel matricea de rigiditate a structurii fiind actualizată în timpul fiecărei iterații. Un dezavantaj al acestei metode numerice constă în imposibilitatea luării în considerare a fenomenelor de tip *snap-back* și *snap-through*. Acest model este completat de *Iu* [13] cu un procedeu de analiză secțională ce permite trasarea curbelor de interacțiune plastică $N-M_y-M_z$. Suplimentar, pentru interpolarea deplasărilor transversale se adoptă funcții de interpolare de ordin superior (maxim 5) care satisfac atât condițiile de compatibilitate a deformațiilor cât și cele de echilibru a eforturilor. Acest procedeu, spre deosebire de modelele precedente, permite considerarea efectelor datorate încărcărilor distribuite aplicate în lungul elementelor structurii, însă necesită introducerea a două eforturi concentrate echivalente (moment încovoietor și forță tăietoare) la mijlocul acestora. Exemplele numerice prezentate demonstrează capacitatea modelului de a trasa cu suficientă acuratețe curba de comportare a stâlpilor micști și a cadrelor mixte, însă aplicarea procedeuului pentru analiza grinzilor mixte cu conectare parțială poate furniza rezultate nesatisfăcătoare datorită modului aproximativ prin care se i-a în considerare conectarea incompletă dintre placa de beton și profilul metalic. Un model similar este raportat de *Lemes ș.a.* [109] însă acesta poate fi aplicat doar pe structuri plane.

Landesmann [110] propune un procedeu de analiză a elementelor și cadrelor plane mixte bazat pe un model rafinat al articulațiilor plastice punctuale, în care relațiile secționale moment încovoietor – curbura parametrice în efort axial sunt determinate prin divizarea secțiunilor transversale în fibre și determinarea eforturilor respectiv a caracteristicilor de rigiditate secționale aplicând un procedeu incremental. Parametrii de degradare a rigidității la încovoiere a secțiunilor de la capetele barei, asociați unui nivel intermediar de plastificare, se calculează ca raportul dintre rigiditatea la încovoiere tangentă aferentă nivelului curent de solicitare și rigiditate elastică la încovoiere. Acești parametri precum și funcțiile de stabilitate convenționale afectează matricea de rigiditate elastică a elementului de bară. Distribuția zonelor plastice în lungul barelor supuse la forțe axiale de compresiune este luată în considerare în mod aproximativ prin utilizarea modulului de elasticitate tangent pentru determinarea caracteristicilor de rigiditate secționale. Modelul prezentat nu permite includerea efectelor conectării incomplete dintre componentele răspunsul structural al grinzilor mixte. Mai mult, pentru obținerea unor rezultate cu acuratețe apreciabilă, barele structurii trebuie discretizate în mai multe elemente finite. Un model similar de analiză, care ia în considerare plastificarea graduală a secțiunilor asociate segmentelor de la capetele elementului prin împărțirea acestor secțiuni într-un număr mare de fibre și urmărirea evoluției tensiunilor ca urmare a creșterii nivelului de solicitare, este propus de *Ngo-Huu & Kim* [111]. În prezenta formulare, efectul tensiunilor reziduale este luat în considerare prin atribuirea de tensiuni inițiale fiecărei fibre componente a secțiunii metalice.

2.3.2.2 Elemente finite formulate în eforturi

Salari ș.a. [112,113] prezintă un EF formulat în eforturi a cărui formulare are la bază ecuațiile de echilibru și compatibilitate asociate modelului Newmark de comportare a grinzilor mixte cu interacțiune parțială. În cadrul acestei clase de EF, principalele necunoscute sunt reprezentate de eforturile interioare a căror variație în lungul elementului este descrisă în funcție de eforturile nodale prin intermediul unor funcții de formă.

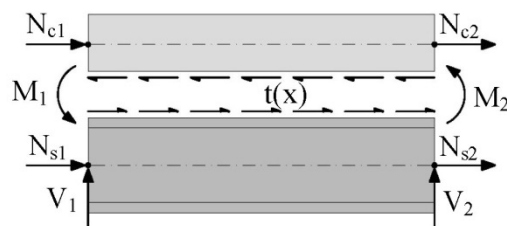


Fig. 2.3 Element finit formulat în eforturi

În Fig. 2.3 se prezintă GDL ale unui EF reprezentativ formulat în eforturi. În cazul particular al grinzilor mixte cu interacțiune incompletă, care sunt sisteme static nedeterminate interior, distribuția exactă a eforturilor interioare nu este cunoscută decât în anumite situații particulare în care comportarea materialelor este liniar-elastică. În consecință, autorii folosesc o funcție de interpolare cubică pentru descrierea variației forței longitudinale uniform distribuite ($t(x)$ în Fig. 2.3), ce apare în lungul suprafeței de contact dintre placa de beton și grinda metalică, iar celelalte eforturi sunt apoi obținute pe baza ecuațiilor de echilibru. Ecuația matriceală dintre eforturi și deplasări pune în evidență matricea de flexibilitate a

elementului de bară și, în consecință, pentru implementarea prezentei formulării în forma standard a metodei elementului finit, este necesară inversarea matricei de flexibilitate pentru obținerea matricei de rigiditate asociate. Prin studiile de validare efectuate pe o serie de elemente mixte simplu rezemate și continue, autorii demonstrează eficiența, acuratețea și superioritatea EF formulate în eforturi față de EF formulate în deplasări. Modelul a fost apoi extins în vederea utilizării lui pentru analiza cadrelor plane alcătuite din stâlpi metalici și grinzi mixte oțel-beton [114]. În acest ultim model se ține cont de fisurarea betonului și de comportarea neliniară a conectorilor.

Formularea în eforturi a unui EF, capabil să surprindă comportarea de ansamblu a grinzilor mixte cu conectare parțială supuse și acțiunii încărcărilor distribuite, este descrisă de *Ayoub* în [115]. Elementul propus este alcătuit din trei sub-elemente, două dintre ele utilizate pentru modelarea comportării fizic neliniare a componentelor de beton respectiv oțel, iar al treilea este introdus pentru definirea legăturii continue dintre primele două. Modelul admite, în lungul elementului, o variație liniară a momentului încovoietor și a forței de conectare respectiv o variație constantă a efortului axial. Testele numerice descrise de autor evidențiază acuratețea și eficiența modelului însă este necesară discretizarea fizică a fiecărei bare (în exemplele prezentate grinzile au fost divizate în 8 EF) și, mai mult, discretizarea este impusă și la nivel de secțiune.

Spre deosebire de formulările precedente, în care efectele interacțiunii incomplete sunt luate în considerare în mod aproximativ prin utilizarea relațiilor propuse de codurile de proiectare pentru reducerea rigidității la încovoiere în prezența acestui fenomen, *Valipour & Bradford* [116] prezintă o abordare mai consistentă pentru considerarea efectelor ce apar ca urmare a lunecărilor relative dintre placa de beton și grinda metalică. Astfel, se evaluează deformația de lunecare longitudinală într-un număr de secțiuni transversale dispuse în punctele schemei de integrare Simpson, iar apoi se admite o variație parabolică a acestor deformații pe porțiunea cuprinsă între două puncte succesive de integrare urmând ca în final să se determine variația forțelor de lunecare în lungul interfeței de contact. Cunoscând această variație se poate determina câmpul de eforturi în lungul EF, utilizând relațiile de echilibru secțional. Dacă se alege un număr suficient de puncte de integrare pe lungimea fiecărui EF, modelul trasează cu acuratețe considerabilă curba de comportare a sistemelor mixte cu interacțiune incompletă, folosind un singur EF cu 4 noduri pe fiecare jumătate de grinda însă, pentru predicția corectă a deformației de lunecare longitudinală la nivel de secțiune, aceasta din urmă trebuie împărțită într-o serie de fâșii.

Chiorean [11] extinde modelul descris în [9] astfel încât să poată fi utilizat pentru analiza elementelor și cadrelor mixte plane și spațiale. Modelul propus integrează majoritatea particularităților de comportare neliniară specifice structurilor în cadre compozite oțel-beton și anume: plastificarea graduală și distribuită în secțiuni și în lungul barelor; cuplarea neliniarității fizice cu cea geometrică la nivel de element; efectul global al neliniarității geometrice (deplasări și rotiri mari); comportarea liniară și neliniară a conexiunilor semi-rigide de prindere a barelor în noduri; efectul deformațiilor de lunecare asupra rigidității de ansamblu a elementelor de bară compozite; efectul imperfecțiunilor mecanice (tensiuni

reziduale); considerarea relațiilor constitutive complexe. Interacțiunea dintre placa de beton și profilul metalic (în cazul grinzilor mixte) se consideră perfectă, admitând astfel o distribuție liniară și continuă a deformațiilor pe înălțimea secțiunilor transversale. Starea de tensiune și deformație a secțiunilor de control este monitorizată la nivel de fibră (punct), iar relațiile de echilibru între eforturile exterioare și cele interioare sunt exprimate explicit prin integrarea tensiunilor asociate unei anumite stări de deformații pe secțiune. Comportarea elasto-plastică a barelor structurii se consideră în cel mai evoluat mod, și anume cel al plastificării distribuite, prin determinarea răspunsului neliniar inelastic la nivel de element prin însumarea ponderată a răspunsului unui număr discret de secțiuni transversale ce reprezintă puncte de control ale stării de plastificare în lungul elementului și a căror localizare depinde de schema de integrare numerică adoptată. Pentru determinarea stării de solicitare și deformație a structurii, sub acțiunea unui sistem oarecare de forțe statice, ținându-se seama de efectele neliniarității materiale și geometrice, se aplică un calcul incremental-iterativ, întreaga rezolvare fiind condusă în metoda pașilor controlați de lungimea de arc. Numeroasele studii numerice prezentate validează capacitatea procedurii propus de a surprinde cu acuratețe ridicată comportarea în domeniul liniar și neliniar a sistemelor structurale alcătuite din bare cu secțiune mixtă, utilizând un singur EF cu 12 GDL (2 noduri) pentru modelarea fiecărei bare componente a structurii, reducând astfel semnificativ memoria calculator solicitată și volumul calculului.

2.3.2.3 Elemente finite cu formulare mixtă

Ayoub & Filippou [117] descrie elementele cheie ale formulării unui EF dedicat analizei neliniare a grinzilor cu secțiune mixtă oțel-beton. Spre deosebire de categoriile de EF discutate în secțiunile anterioare, în acest caz se face o predicție atât asupra variației câmpului de deplasări cât și asupra variației câmpului de eforturi din lungul elementului, iar formularea mixtă constă în utilizarea formei integrale a ecuațiilor de echilibru și compatibilitate asociate grinzilor compozite cu interacțiune incompletă. Ecuațiile de echilibru ce stau la baza modelului sunt formulate în concordanță cu modelul de interacțiune parțială propus de Adekola [44] și, în consecință, se ține cont și de posibilitatea de separare în plan transversal a componentelor grinzii compozite. EF descris dispune de 10 GDL (6 noduri) în termeni de deplasări și 6 GDL (4 noduri) în termeni de eforturi, așa cum se poate observa în Fig. 2.4.

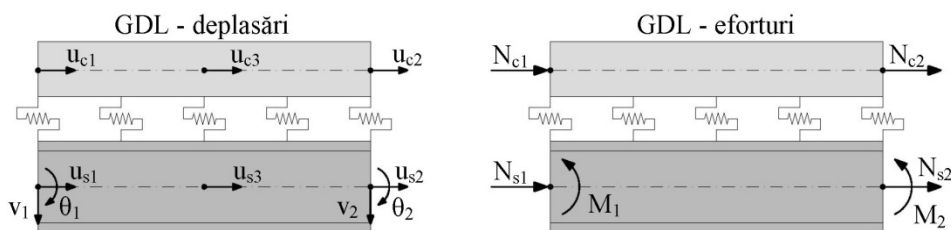


Fig. 2.4 Element finit cu formulare mixtă

Variația deplasărilor axiale în cele două componente se aproximează prin funcții de interpolare de gradul II în timp ce distribuția săgeților în lungul elementului este definită prin polinoame Hermite de ordinul III. În ceea ce privește eforturile (momentul încovoietor respectiv eforturile axiale din placa de beton și din profilul metalic), acestea se consideră a

avea variație liniară pe lungimea EF. Efectele neliniarității fizice sunt luate în considerare la nivel de secțiune prin divizarea acesteia într-un în fâșii și atribuirea de curbe constitutive neliniare fiecărei porțiuni componente a secțiunii. Studiile de validare atestă superioritatea EF cu formulare mixtă față de EF formulate în deplasări, cele din prima categorie fiind capabile să traseze cu acuratețe ridicată atât răspunsul în eforturi cât și în deformații, folosind un număr redus de EF (cel mult 4 EF/bară au fost utilizate în exemplele prezentate).

Spre deosebire de EF descris anterior, în formularea căruia se admit funcții de interpolare în două câmpuri distincte (deplasări și eforturi), *Dall'Asta & Zona* [118,119] propun un EF cu formulare mixtă în care se recurge la funcții de interpolare pentru descrierea variabilelor cuprinse în trei câmpuri distincte și anume: deplasări, deformații și eforturi. Asumând o variație particulară a câmpului de deplasări, sunt posibile diferite variante în ceea ce privește reprezentarea variației variabilelor independente aparținând celorlalte două câmpuri. Astfel, în prezenta formulare, câmpul deplasărilor este aproximat folosind aceleași funcții de interpolare ca în modelul precedent, deformațiile axiale și curbura admit variație liniară, iar lunecarea relativă dintre componente este aproximată în lungul EF prin polinoame de ordinul II. Câmpul de forțe (eforturi axiale în cele două componente, moment încovoietor și efort de lunecare în lungul interfeței de contact) este definit prin funcții de interpolare de același ordin cu cele acceptate pentru descrierea variației deformațiilor. Trebuie menționat, că autorii au optat pentru această formulare mixtă în vederea îmbunătățirii predicției variației eforturilor în domeniul neliniar de comportare și nu pentru eliminarea unor probleme numerice ce apar în cazul anumitor EF formulate în deplasări. De altfel, performanțele EF cu formulare mixtă și cu formulare în deplasări, în ceea ce privește sensibilitatea la instabilități numerice caracteristice EF dedicate analizei grinzilor mixte cu interacțiune parțială, sunt studiate de *Dall'Asta & Zona* în [120].

Nguyen ș.a. [121] propun un EF cu formulare mixtă, asemănător cu cel propus de *Ayoub & Filippou* [117] dar care prezintă doar 8 GDL în termeni de deplasări respectiv 4 GDL în termeni de eforturi. O altă deosebire față de modelul amintit constă în considerarea discretă și nu continuă a conexiunii dintre placa de beton și grinda metalică, acest aspect conducând automat la necesitatea considerării de noduri interioare în punctele de amplasare a conectorilor. Matricea de rigiditate globală a barei se obține prin asamblarea matricelor de rigiditate a EF (formulate fără a ține cont de caracteristicile conexiunii) cu matricele de rigiditate aferente conectorilor. Modelul propus surprinde cu acuratețe ridicată comportarea grinzilor mixte însă este necesară discretizarea fină a elementelor analizate (în studiile numerice prezentate, grinzile mixte au fost simulate utilizând între 80 și 139 de elemente).

2.4 Concluzii parțiale

În urma acestui studiu se constată actualitatea tematicii abordate în prezenta lucrare, atât în ceea ce privește studiile experimentale cât mai cu seama cu privire la abordările numerice. Deși studiile cu privire la dezvoltarea unor modele de calcul performante capabile să releve principalele particularități de comportare ale structurilor compozite oțel-beton sunt întinse pe o perioadă semnificativă de timp, putem concluziona ca anumite aspecte specifice comportării neliniare ale acestor tipuri de structuri nu sunt complet soluționate. În acest sens

putem evidenția în primul rând lipsa unui model consistent și eficient din punct de vedere computațional care să permită abordarea structurilor compozite reale de mari dimensiuni și totodată capabil să surprindă efectele acțiunii compozite parțiale, a efectelor locale ale neliniarității geometrice, comportarea neliniară complexă la nivelul interfeței de contact între dala de beton și profilul metalic (în cazul grinzilor compozite), considerarea cu acuratețe ridicată a formei geometrice secționale precum și a comportării neliniare a conexiunilor semi-rigide de prindere a barelor în noduri. Majoritatea procedurilor numerice consacrate sunt bazate pe metoda elementelor finite cu interpolarea deplasărilor sau a eforturilor necesitând astfel fie un număr semnificativ de elemente pentru atingerea unui nivel de acuratețe dorit (interpolarea deplasărilor) fie asumarea unor aproximații pentru predicția câmpului de deplasări sau deformații în interiorul elementului (interpolarea eforturilor). Deși au fost făcuți pași importanți în ultimul timp în dezvoltarea și consolidarea metodelor bazate pe formularea în eforturi („flexibility based approach”) principalul dezavantaj al acestor metode rezidă în faptul că elementele dezvoltate necesită noduri atât în dala de beton cât și în profilul metalic pentru surprinderea efectelor interacțiunii parțiale. Aceasta abordare, pe lângă faptul că poate conduce la o creștere a numărului gradelor de libertate față de modelul clasic al barei drepte de tip cadru (cu 2 noduri), generează complicații în integrarea efectelor conexiunilor semirigide de prindere a barelor în noduri. De asemenea, mai poate fi remarcat faptul că efectele forței tăietoare (inclusiv deformațiile de lunecare transversală) asupra capacitații de deformabilitate și de rezistență a grinzilor compozite reprezintă un subiect de actualitate, în general aceste efecte sunt modelate fie direct în exprimarea ecuațiilor diferențiale de echilibru în domeniul elastic de comportare fie greșit în extinderea unor modele complexe bazate pe metoda elementelor finite. Foarte puține studii, după cunoștințele noastre, încearcă o analiză globală, prin definirea unui modul de rigiditate transversal echivalent inclus în relațiile de echilibru la nivel de element, evitând astfel complicațiile asociate definirii unor grade de libertate suplimentare așa cum sunt prevăzute în metoda elementelor finite. În ceea ce privește modelarea comportării elasto-plastice, modelele de calcul sunt grupate în două categorii, cele bazate pe conceptul de plastificare concentrată respectiv pe conceptul de plastificare distribuită. Cele din prima categorie încearcă rafinarea modelelor ce cuantifică plastificarea prin articulații plastice, simulând formarea graduală a acestora și a plastificării în lungul elementului, respectiv pe baza unor relații empirice încearcă cuantificarea efectului acțiunii compozite parțiale. Modelarea explicită a formării graduale a zonelor plastice la nivel secțional și în lungul elementului reprezintă caracteristicile de baza ale metodelor din cea de-a doua categorie. În final, mai trebuie remarcat că efectele imperfecțiunilor geometrice și mecanice (tensiuni reziduale în cazul profilelor metalice) precum și analiza detaliată a formei geometrice secționale sunt aspecte puțin tratate în literatura de specialitate, deși așa cum se va demonstra pe parcursul prezentei lucrări acestea pot afecta atât capacitatea de deformabilitate cât și cea de rezistență a elementelor compozite otel-beton.

3 Prescripții ale principalelor norme de proiectare asupra calculului elementelor mixte oțel-beton

În cadrul acestui capitol se dorește prezentarea principalelor prevederi referitoare la modul de analiză și de calcul a elementelor cu secțiune mixtă oțel-beton. Analiza prezentată în continuare vizează prevederile principalelor norme de proiectare utilizate pe de-o parte de inginerii proiectanți de structuri, iar pe de altă parte de comunitatea științifică. Studiul acestor norme, care adeseori au un caracter mai mult aplicativ decât fundamental, fiind îndeosebi dedicate activității de proiectare, poate fi deosebit de important deoarece furnizează metode simplificate de calcul care pot constitui baza unor metode avansate de analiză. Pe parcursul acestui capitol se va face trimitere la următoarele norme:

- EN 1994-1-1:2006 *Proiectarea structurilor compozite din oțel și beton. Reguli generale și reguli pentru clădiri* [1]
- AS 2327.1:2003 *Australian Standard: Composite structures. Simply supported beams* [2].
- ANSI/AISC 360-10:2010 *American Institute of Steel Construction. Specification for Structural Steel Buildings* [3]
- GB 50017-2003 *National Standard of the People's Republic of China. Code for Design of Steel Structures* [122]

Deoarece, așa cum se va vedea în capitolele următoare, studiile întreprinse sunt concentrate asupra comportării elementelor (grinzilor) cu conectare/interacțiune parțială, și în cadrul acestui capitol accentul se va pune pe prevederile, descrise în normele mai sus menționate, referitoare la filozofia de calcul a acestor tipuri de elemente. În această categorie se înscriu mai ales grinzile mixte a căror acțiune compozită este asigurată prin folosirea unor dispozitive mecanice de conectare cum ar fi, de exemplu, conectorii de tip dorn cu cap. În cazul stâlpilor, analiza, atât în starea limită de serviciu cât și în starea limită ultimă, se conduce, în majoritatea cazurilor, în ipoteza interacțiunii totale dintre componenta de beton și cea metalică [123]. Această ipoteză este una rezonabilă deoarece aria de contact dintre cele două materiale este relativ mare rezultând astfel o aderență considerabilă între componente și tensiuni relativ mici la interfața de contact dintre ele. Consecința acestei ipoteze rezidă în distribuția liniară a deformațiilor pe întreaga secțiune, fără discontinuități în dreptul zonelor de contact dintre componente. Pe de altă parte, în cazul grinzilor mixte oțel-beton, această ipoteză a interacțiunii totale dintre componente nu mai este în general valabilă, starea de tensiune și deformație a acestor elemente fiind în strânsă legătură cu tipul și modul de comportare al dispozitivelor mecanice de conectare utilizate pentru obținerea efectului compozit dintre beton și oțel. Bine-nțeles, aici ne referim la cazul grinzilor mixte alcătuite dintr-un profil metalic și o placă de beton aflate în contact, dar fără înglobarea parțială sau totală a profilului în componenta de beton. În acest ultim caz, acțiunea compozită este dobândită în principal prin aderența naturală manifestată între componente. În prezent există o varietate largă de dispozitive mecanice de conectare, ce se diferențiază prin formă, dimensiune și mod de fixare, însă toate prezintă următoarele similitudini: au în componență piese dedicate transmiterii forțelor de lunecare longitudinală, au în componență piese dedicate preluării forțelor normale la suprafața de contact, prevenind astfel separarea dintre componente, și toate aceste componente induc forțe concentrate semnificative în componenta

(dala) de beton. În studiile și analizele descrise în această lucrare, dispozitivele de conectare dispuse la interfața de contact dintre grinda metalică și dala de beton sunt de tipul gujoanelor (dornurilor cu cap) care, prezintă ductilitate sporită în spațiul forță-lunecare relativă față de cazul conectorilor de tip tacheți (Fig. 3.1).

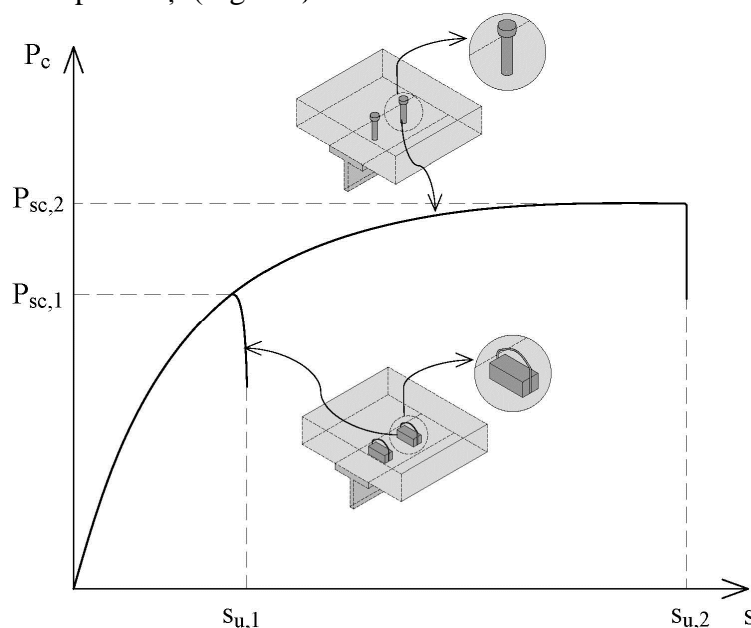


Fig. 3.1 Curbe caracteristice de comportare a conectorilor

Premergător prezentării și comentării principalelor prescripții prevăzute în normele curente de proiectare, se va face o scurtă trecere în revistă a principalelor concepte ce definesc modul de comportare a grinzilor mixte oțel-beton: interacțiune respectiv conectare între profilul metalic și placa de beton. Considerăm necesară această secțiune, deoarece în multe studii nu se face distincție între cele două noțiuni (deși aceasta există și e bine definită), de multe ori fiind folosite aleatoriu în același context. Așa cum se va prezenta în continuare cele două noțiuni derivă din exprimarea condițiilor de echilibru secționale și a celor de compatibilitate a deformațiilor.

3.1 Echilibru. Grad de conectare.

Exprimarea echilibrului se va descrie pentru cazul unei secțiuni transversale compozite oțel-beton, solicitată de un moment încovoietor pozitiv, aflată la distanța x față de o extremitate a elementului mixt. Fie grinda mixtă din pentru care se prezintă succesiv vederea laterală a grinzii, secțiunea transversală, distribuția tensiunilor pe înălțimea secțiunii și eforturile interioare rezultante în cele două componente, în stadiul elasto-plastic de comportare. Exprimând ecuația de echilibru pe orizontală se obține următoarea relație:

$$N_c = N_s \quad (3.1)$$

unde N_c și N_s reprezintă rezultantele tensiunilor normale din componenta de beton respectiv din cea de oțel. Exprimând apoi condiția de echilibru a momentelor încovoietoare, suntem conduși la expresia următoare:

$$M = M_c + M_s + N_c \left(\frac{h_c}{2} + \frac{h_s}{2} \right) \quad (3.2)$$

unde M_c și M_s reprezintă momentul încovoietor interior din placa de beton respectiv din profilul metalic, iar h_c și h_s denotă grosimea componentei de beton respectiv înălțimea profilului metalic.

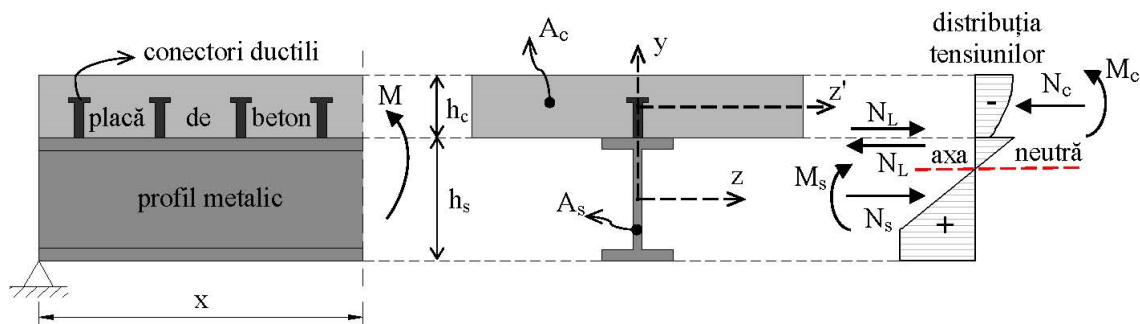


Fig. 3.2 Grindă mixtă oțel-beton. Distribuția tensiunilor normale pe secțiune.

Scriind apoi echilibrul pe orizontală doar pentru componenta de beton (Fig. 3.2) se obține următoarea relație între efortul axial din placa de beton corespunzător secțiunii x și suma forțelor de forfecare din conectorii dispuși pe distanța curentă x , notată cu N_L :

$$N_L = N_c \quad (3.3)$$

unde :

$$N_L = \sum_{j=1}^n P_{cj} \quad (3.4)$$

și unde n reprezintă numărul de conectori dispuși pe distanța x , iar P_{cj} reprezintă forța de forfecare din conectorul j . Folosind relația (3.3), expresia (3.2) devine:

$$M = M_c + M_s + N_L \left(\frac{h_c}{2} + \frac{h_s}{2} \right) \quad (3.5)$$

Se observă acum cu ușurință că valoarea momentului încovoietor depinde de capacitatea portantă a conectorilor prin ultimul termen al sumei din relația (3.5). Se poate astfel afirma că acest ultim termen din expresia momentului încovoietor reprezintă contribuția acțiunii compozite dintre componenta de beton și cea metalică.

Trecând acum la stadiul plastic de comportare, corespunzător stării limită ultime, se disting trei situații posibile pentru distribuția tensiunilor și a deformațiilor (Fig. 3.3) în funcție de valorile $N_{c,pl}$, $N_{s,pl}$ și $N_{L,pl}$ corespunzătoare acestui stadiu. Schematizarea prezentată în Fig. 3.3.a este asociată cazului în care capacitatea portantă a profilului metalic $N_{s,pl}$ este mai mică decât capacitatea portantă a componentei de beton $N_{c,pl}$ și capacitatea portantă a conectorilor $N_{L,pl}$ este superioară efortului $N_{s,pl}$, conectorii fiind astfel capabili să preia efortul din componenta de beton, care în conformitate cu relația (3.5) este egală în acest caz cu $N_{s,pl}$. Aceste condiții corespund cazului *conectării totale* deoarece capacitatea portantă a conectorilor nu influențează capacitatea portantă a elementului mixt. Așa cum se observă, în acest caz axa neutră este localizată în dala de beton. Dacă însă, $N_{s,pl} < N_{c,pl}$ dar $N_{L,pl} < N_{s,pl}$ (Fig. 3.3.b) atunci ne situăm în condițiile *conectării parțiale* deoarece conectorii nu pot transmite în întregime efortul $N_{s,pl}$ dalei de beton, ci doar o fracțiune din aceasta egală cu $N_{L,pl}$. Astfel efortul axial din beton va fi $N_{L,pl}$, iar pentru respectarea echilibrului, efortul din profilul metalic va fi tot $P_{L,pl}$. Spre deosebire de cazul precedent (Fig. 3.3.a) se observă existența a două axe neutre, prima în beton respectiv cea de-a doua, în profilul metalic. Un raționament

similar poate fi condus și pentru cazul $N_{s,pl} > N_{c,pl}$. Astfel, dacă suplimentar $N_{L,pl} > N_{c,pl}$ (Fig. 3.3.c) atunci ne situăm în condițiile *conectării totale*, axa neutră fiind localizată de această dată în profilul metalic. În schimb, dacă $N_{L,pl} < N_{c,pl}$ atunci situația este similară cu cea prezentată în (Fig. 3.3.b), *conectarea* dintre componenta de beton și cea metalică fiind *parțială*, capacitatea de rezistență a elementului mixt fiind influențată de capacitatea portantă a conectorilor.

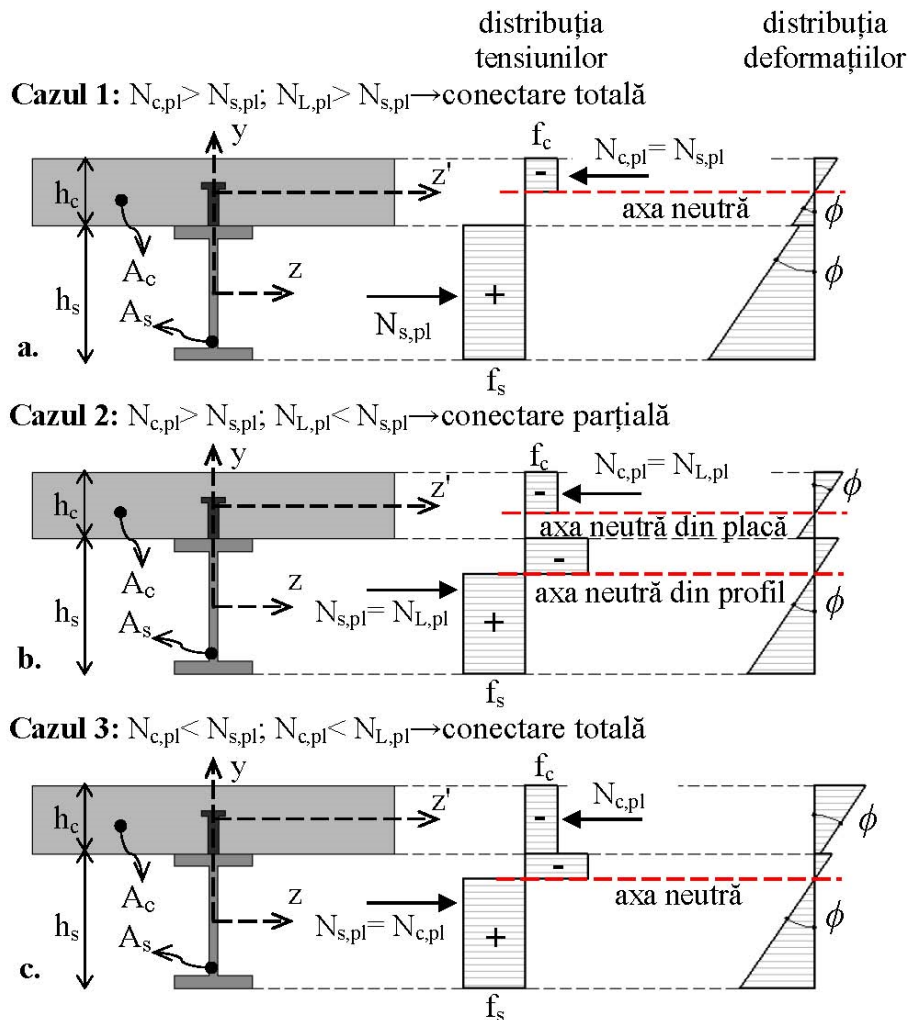


Fig. 3.3 Distribuții tipice de tensiuni și deformații

Analizând cele trei cazuri prezentate anterior, se poate concluziona că în situația *conectării totale*, pe secțiune se poate distinge o singură axă neutră, în timp ce corespunzător situației *conectării parțiale*, se disting două axe neutre. Mai mult, se poate deduce că, pentru asigurarea *conectării totale*, conectorii trebuie să aibă capacitatea portantă mai mare decât valoarea minimă dintre efortul axial capabil al dalei de beton și cel al profilului metalic:

$$N_{L,pl}^{fsc} \geq \min(N_{c,pl}, N_{s,pl}) \quad (3.6)$$

unde, în mod curent (conform normei europene):

$$\begin{aligned} N_{s,pl} &= A_s f_s \\ N_{c,pl} &= 0.85 A_c f_c \end{aligned} \quad (3.7)$$

În calculul efortului axial capabil al dalei de beton $N_{c,pl}$ s-a neglijat aportul betonului întins. În conformitate cu cele discutate anterior se poate defini *gradul de conectare* η ca fiind raportul

dintre capacitatea portantă a conectorilor dispuși pe o lungime critică și valoarea forței de lunecare care asigură conectarea totală:

$$\eta = \frac{N_{L,pl}}{N_{L,pl}^{fsc}} \quad (3.8)$$

Considerând că toți conectorii au aceeași forță de lunecare capabilă, relația 3.8 poate fi exprimată sub o altă formă astfel:

$$\eta = \frac{n_c}{n_c^{fsc}} \quad (3.9)$$

unde n_c este numărul efectiv de conectori dispuși pe lungimea critică, iar n_c^{fsc} reprezintă numărul de conectori necesari asigurării *conectării totale*. Trebuie subliniat faptul că *gradul de conectare* este guvernat de rezistența dispozitivelor de conectare (conectorilor) utilizate. Mai mult, în analiza anterioară, conectorii s-au considerat ductili (Fig. 3.1), capacitatea de lunecare a acestora nefiind atinsă.

3.2 Compatibilitate. Grad de interacțiune.

Modul de comportare al unei grinzi mixte oțel-beton este direct influențat de capacitatea de deformabilitate a elementelor de conectare folosite (Fig. 3.1).

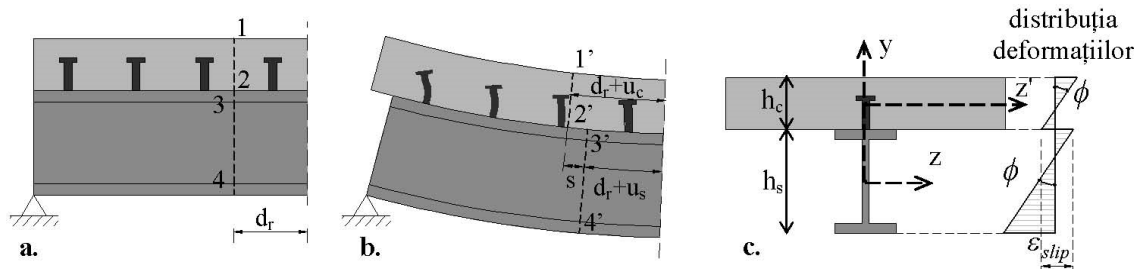


Fig. 3.4 Ilustrarea lunecării și a deformației de lunecare longitudinale

Fie grinda mixtă din Fig. 3.4, a cărei conexiune dintre beton și oțel se realizează prin intermediul unor conectori ductili. În stare inițială, neîncărcată, se consideră secțiunea transversală 1234, punctele 2 și 3 fiind adiacente interfeței de contact dintre cele două componente. Aplicarea unei încărcări transversale atrage după sine o deplasare relativă între cele două componente (Fig. 3.4.b), punctele 2 și 3 nemaifiind aliniate, așa cum se întâmpla în starea inițială (Fig. 3.4.a). Această deplasare relativă poartă denumirea de lunecare longitudinală și se poate exprima ca diferența dintre deplasarea relativă a punctului 2 aparținând dalei de beton, u_c , respectiv a punctului 3 aparținând profilului metalic, u_s :

$$s = u_c - u_s \quad (3.10)$$

Această modificare a configurației de la nivelul interfeței de contact dintre cele două componente, poate fi cuantificată și prin intermediul deformațiilor distincte manifestate în zona de contact. În acest sens, în Fig. 3.4.c se prezintă distribuția deformațiilor datorate încovoierii, pe înălțimea secțiunii transversale, trasată în ipoteza curburilor egale în cele două sub-elemente. Se observă o discontinuitate în această distribuție a deformațiilor, manifestată în dreptul interfeței de contact, și datorată tocmai lunecării relative dintre componente. Se poate astfel evalua deformația de lunecare longitudinală astfel:

$$\varepsilon_{slip} = \frac{ds}{dx} = \varepsilon_{c_inf} - \varepsilon_{s_sup} \quad (3.11)$$

unde ε_{c_inf} reprezintă deformația din beton de la nivelul interfeței de contact, iar ε_{s_sup} este deformația din oțel de la același nivel. Deformația ε_{slip} este în directă dependență cu rigiditatea conexiunii și implicit cu rigiditatea conectorilor. În funcție de mărimea acestei deformații, se disting trei cazuri ale nivelului de interacțiune dintre beton și oțel, schematizate în Fig. 3.5.

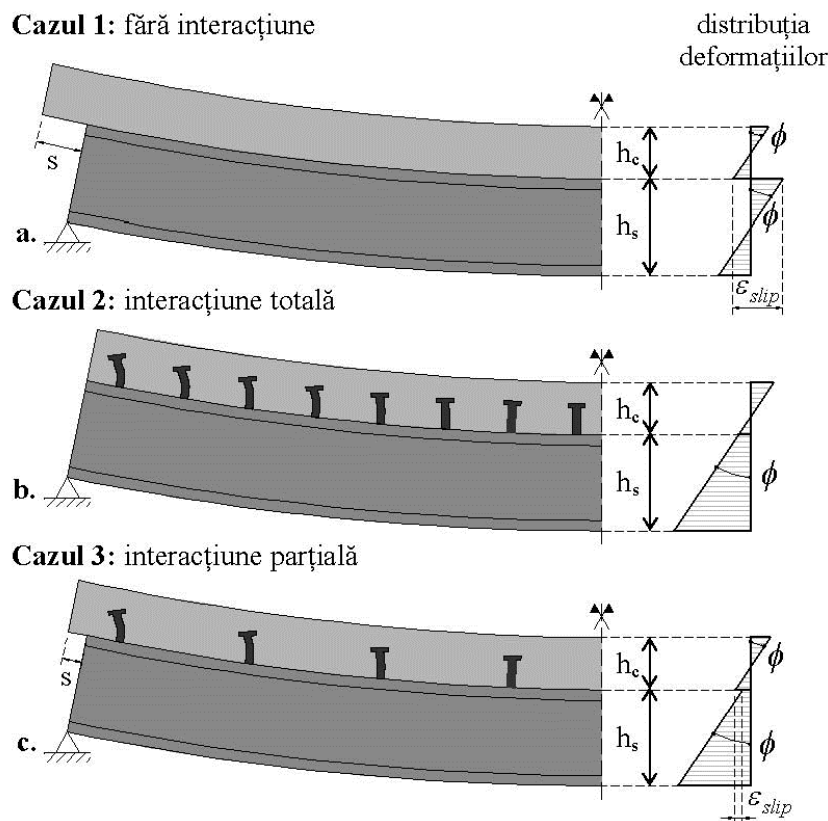


Fig. 3.5 Situații de interacțiune

Primul caz (Fig. 3.5.a), denumit sintetic *fără interacțiune*, corespunde situației în care nu se dispun elemente de conectare între beton și oțel, astfel rigiditatea conexiunii fiind practic zero (neglijând aderența naturală dintre componente). În acest caz efectul compozit nu este manifestat, ansamblul fiind compus din două elemente independente sollicitate la încovoiere. La cealaltă extremă se situează cazul teoretic în care numărul conectorilor dispuși conferă rigiditate infinită conexiunii, neexistând astfel alunecări relative între componente, obținându-se, prin urmare, *interacțiune totală* sau *completă* (Fig. 3.5.b) între dala de beton și profilul metalic. Consecința acestei situații se răsfrânge asupra continuității distribuției deformațiilor, ε_{slip} fiind zero. *Interacțiunea parțială* (Fig. 3.5.c) corespunde unei situații intermediare, în care conectorii dispuși conferă un anumit nivel de rigiditate al conexiunii, însă, cu toate acestea, în distribuția deformațiilor pe înălțimea secțiunii se observă o discontinuitate în dreptul interfeței de contact dintre componente, care spre deosebire de cazul *fără interacțiune*, se înregistrează între deformații de același semn, rezultând astfel un ε_{slip} mai mic. În urma acestei analize se poate afirma că *gradul de interacțiune* este asociat cu caracteristica de

rigiditate a conectorilor, în timp ce *gradul de conectare* este asociat cu rezistența acestora. Totuși aceste concepte sunt interdependente deoarece sporirea numărului de conectori dispuși într-un element (grindă) are ca efect atât creșterea rezistenței cât și a rigidității conexiunii. Acest aspect poate fi observat și prin analiza distribuției deformațiilor prezentate în Fig. 3.3 pentru *conectarea totală* respectiv *parțială*. Astfel, în cazul *conectării totale* discontinuitatea deformațiilor de la nivelul interfeței de contact implică deformații de același semn în componenta de beton respectiv cea metalică, acest lucru fiind cauzat de existența unei singure axe neutre. Situația *conectării parțiale* implică existența a două axe neutre și, în consecință, saltul din distribuția deformațiilor se produce între deformații de semne contrare. Prin urmare, putem afirma că ε_{slip} este semnificativ mai mare în cazul grinzilor mixte cu *conectare parțială* față de cel al grinzilor mixte cu *conectare totală*. Totodată, distribuțiile deformațiilor prezentate în Fig. 3.3 indică faptul că *interacțiunea* dintre dală și profil este *parțială* chiar și în cazul *conectării totale*.

3.3 Prevederi asupra grinzilor mixte oțel-beton

În cele ce urmează se prezintă sintetic principalele prescripții de calcul referitoare la grinzile mixte oțel-beton obișnuite, compuse dintr-o placă de beton (sau beton armat) rezemată pe un profil metalic. Efectul compozit se consideră a fi obținut prin dispunerea unor conectori ductili de tip dorn cu cap în lungul interfeței de contact dintre cele două componente. Prevederile ce urmează a fi amintite se referă la calculul grinzilor mixte în starea limită ultimă și în starea limită de serviciu.

3.3.1 Starea limită ultimă

O ramură importantă a calculului în starea limită ultimă este reprezentată de determinarea capacității de rezistență a secțiunilor transversale critice considerate a fi secțiunile de moment încovoiator maxim, cele de reazem, cele supuse la forțe concentrate respectiv cele în care are loc o modificare bruscă a geometriei secțiunii. Prin lungime critică, înțelegem distanța dintre două secțiuni critice succesive.

3.3.1.1 Lățimea efectivă de placă

Lățimea efectivă de placă b_{eff} , necesară în calculul de rezistență al grinzilor mixte oțel-beton, reprezintă lățimea echivalentă pe care tensiunile normale din placa de beton se consideră constante și egale cu tensiunea maximă din placa respectivă. Rezultanta acestor tensiuni obținută prin integrarea acestora pe lățimea b_{eff} este egală cu rezultanta determinată prin integrarea variației reale a tensiunilor normale pe lățimea B (Fig. 3.6). Această lățime efectivă este influențată de o serie de parametri și determinarea ei cu maximă rigurozitate este extrem de dificilă, însă codurile de proiectare furnizează relații simplificate pentru calculul acesteia. Astfel, pentru cazul general al unei grinzi intermediare de planșeu, lățimea efectivă de placă poate fi calculată astfel:

$$b_{eff} = b_{eff}^1 + b_{eff}^2 \quad (3.12)$$

unde, conform normei europene [1] și americane [3]:

$$b_{eff}^{1(2)} = \min\left(\frac{L_{eff}}{8}, \frac{b_{1(2)}}{2}\right) \quad (3.13)$$

și unde L_{eff} reprezintă distanța aproximativă dintre două secțiuni succesive de moment încovoietor nul. Norma australiană [2] prevede următoarea relație pentru $b_{eff}^{1(2)}$:

$$b_{eff}^{1(2)} = \min\left(\frac{L_{eff}}{8}, \frac{b_{1(2)}}{2}, \frac{b_f}{2} + 8h_c\right) \quad (3.14)$$

unde h_c reprezintă grosimea plăcii de beton, iar b_f denotă lățimea tălpii superioare a profilului metalic. Codul chinez [122] propune o relație asemănătoare:

$$b_{eff}^{1(2)} = \min\left(\frac{L_{eff}}{6}, \frac{b_{1(2)}}{2}, \frac{b_f}{2} + 6h_c\right) \quad (3.15)$$

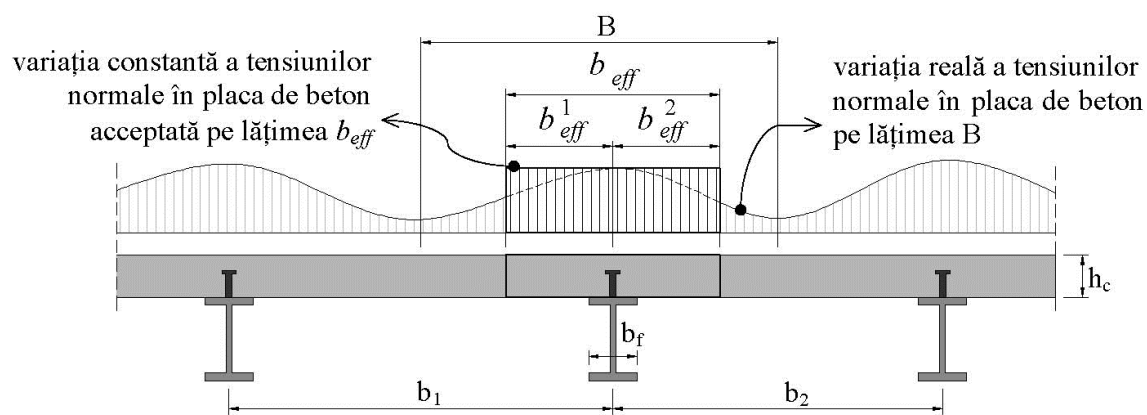


Fig. 3.6 Lățimea efectivă de placă

3.3.1.2 Momentul încovoietor capabil

În toate codurile de proiectare mai sus menționate, momentului încovoietor capabil, pozitiv sau negativ, se determină pe baza unei analize rigid-plastice în care se admit următoarele ipoteze:

- secțiunea efectivă de oțel este plastificată în întregime;
- armăturile sunt solicitate de un efort unitar egal cu rezistența la întindere/compresiune;
- în calculul momentului încovoietor capabil pozitiv, se neglijează aportul armăturilor din placa de beton;
- tensiunile din betonul comprimat sunt egale cu rezistența la compresiune;
- aportul betonului întins este neglijat;
- conectorii și-au atins capacitatea de rezistență, însă nu și-au atins lunecările maxime;
- flambajul local și general al componentei metalice este împiedicat.

În vederea aplicării analizei rigid-plastice pentru evaluarea momentului încovoietor capabil, secțiunile transversale trebuie să dețină capacitate de rotire suficientă, în EC 4 [1] această condiție fiind îndeplinită de secțiunile încadrate în clasa 1 sau 2. În caz contrar, determinarea momentului capabil se efectuează printr-o analiză elastică, în cadrul căreia secțiunea mixtă este transformată într-o secțiune echivalentă de oțel pe baza coeficientului de echivalență [1]. Analiza plastică poate fi utilizată pentru determinarea momentului capabil

pozitiv, atât pentru secțiunile cu *conectare totală* cât și pentru cele cu *conectare parțială*. Diferența majoră între cele două situații se reflectă în valoarea efortului axial din dala de beton. Astfel, pentru cazul *conectării totale*, efortul axial de compresiune din dala de beton, N_c^{fsc} , nu este influențat de capacitatea portantă a conectorilor, și se calculează în mod obișnuit ca fiind produsul dintre aria de beton comprimată și efortul unitar de compresiune (considerat a fi $0.85 \cdot f_c$ în norma EC4 [1], unde f_c reprezintă rezistența de calcul la compresiune a betonului). În celălalt caz, al *conectării parțiale*, efortul axial din dala de beton, N_c^{psc} , este influențat de capacitatea portantă a conectorilor dispuși pe lungimea critică, și se calculează ca fiind o fracțiune din efortul axial din dala de beton calculat în condițiile *conectării totale*:

$$N_c^{psc} = \eta \cdot N_c^{fsc} \quad (3.16)$$

În calculul momentului încovoietor capabil negativ, codurile de proiectare, amintite în acest capitol al lucrării, impun asigurarea *conectării totale* între placa de beton și grinda metalică. Astfel, conectorii dispuși pe lungimea critică aferentă secțiunii de calcul trebuie să dețină capacitate portantă superioară efortului axial maxim din armăturile longitudinale dispuse în zona de moment negativ.

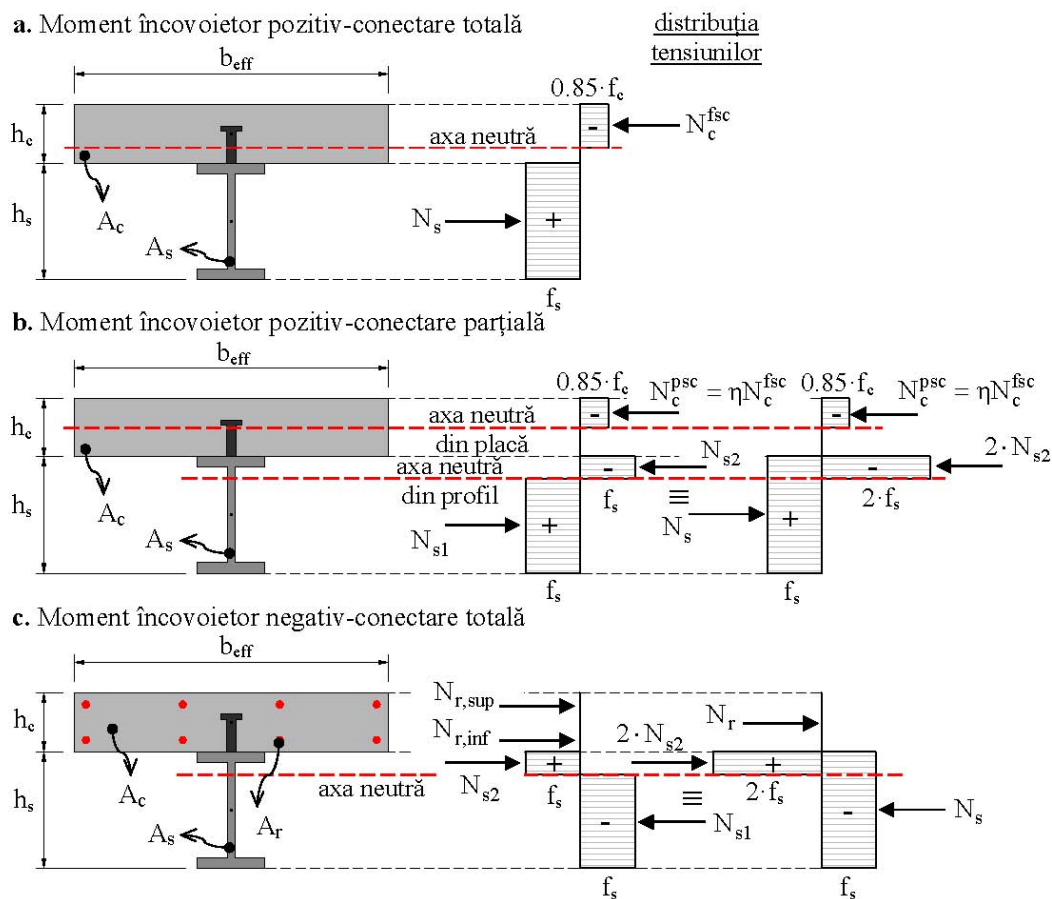


Fig. 3.7 Distribuții plastice de tensiuni normale pentru determinarea momentului încovoietor capabil

Betonul fiind fisurat nu se i-a în considerare la preluarea momentului încovoietor, el având doar rolul unui mediu de legătură între conectori și armături. Rigiditatea redusă a betonului în stadiul fisurat este unul dintre motivele care stau în spatele impunerii *conectării totale* în zone

solicitate la moment încovoiitor negativ deși în literatura de specialitate se regăesc studii care indică faptul că utilizarea *conectării parțiale* în aceste zone nu conduce la efecte nefavorabile [124]. În Fig. 3.7 se prezintă trei situații posibile de distribuții plastice ale eforturilor unitare, aferente cazurilor discutate anterior. Astfel Fig. 3.7 a și Fig. 3.7 b prezintă distribuții plastice uzuale pentru determinarea momentului încovoiitor pozitiv capabil al unei secțiuni cu *conectare totală* respectiv *conectare parțială*. Fig. 3.7 c prezintă distribuția tensiunilor aferentă unei secțiuni cu *conectare totală*, solicitată la moment încovoiitor negativ. În fiecare din cele trei cazuri prezentate în Fig. 3.7, momentul încovoiitor capabil al secțiunii se determină prin scrierea unei ecuații de echilibru a momentelor încovoiitoare în raport cu un punct ales convenabil. Distribuții similare pot fi trasate pentru alte poziții ale axei (axelor) neutre. Analizând Fig. 3.7 b, se poate deduce cu ușurință că momentul încovoiitor capabil al unei secțiuni scade odată cu reducerea gradului de conectare η . În acest sens, în Fig. 3.8 se prezintă variația momentului plastic pozitiv în funcție de gradul de conectare dintre placa de beton și profilul metalic.

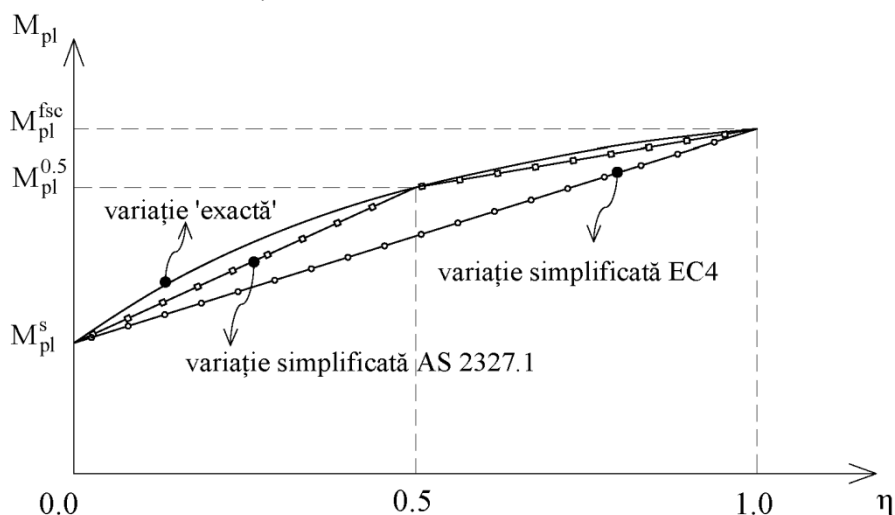


Fig. 3.8 Variația momentului plastic pozitiv în funcție de gradul de conectare

Cu linie continuă este reprezentată variația parabolică a momentului încovoiitor capabil pozitiv, rezultată printr-un calcul plastic pentru diferite valori ale gradului de conectare η . Norma europeană acceptă, în mod aproximativ, calcularea momentului plastic al unei secțiuni cu conectare parțială ($\eta < 1$), prin interpolare liniară între momentul capabil al secțiunii de oțel M_{pl}^s și momentul capabil asociat secțiunii compozite cu conectare totală M_{pl}^{fsc} . De asemenea, și standardul australian admite o variație simplificată pentru calculul M_{pl} , dar biliniară de această dată, care așa cum se observă descrie mai riguros decât codul EC4 variația reală a momentului încovoiitor capabil al grinzilor cu conectare parțială.

Prescripțiile privind calculul și analiza grinzilor mixte continue sunt extrem de limitate. În toate codurile amintite se permite utilizarea analizei rigid-plastice pentru determinarea eforturilor capabile, însă prevederi suplimentare nu sunt prevăzute în codul american [3], australian [2] și chinez [122]. Norma europeană [1] impune anumite condiții pentru folosirea analizei rigid-plastice, referitoare la clasa secțiunilor transversale în zona de moment pozitiv respectiv negativ, la diferențele admise între deschiderile vecine și la modul de conformare a

grinzii astfel încât pierderea stabilității tălpii comprimate să nu fie posibilă. Pentru cazul secțiunilor transversale clasificate ca fiind de clasă 2, 3 sau 4, se impune utilizarea unei analize elastice cu redistribuirea momentelor, pentru determinarea eforturilor capabile la încovoiere. Efectul fisurării betonului pe zona aferentă reazemelor intermediare se introduce prin neglijarea betonului în calculul momentului de inerție.

3.3.1.3 Forța tăietoare capabilă

Toate normele de proiectare, consideră în mod simplificat că forța tăietoare este preluată în totalitate de inima profilului metalic, neglijând în acest fel contribuția plăcii de beton în ceea ce privește calculul la forța tăietoare. Astfel, capacitatea portantă la forfecare (forța tăietoare capabilă) se determină astfel:

$$T_{pl} = A_w \cdot f_{yw} \quad (3.17)$$

unde A_w reprezintă aria inimii profilului iar f_{yw} reprezintă rezistența la forfecare a oțelului. Această abordare conduce evident la o proiectare conservativă a grinzilor mixte oțel-beton. În literatura de specialitate pot fi consultate studii care indică aportul componentei de beton în valoarea forței tăietoare capabile a secțiunii mixte [125].

Norma europeană EC4 [1] și cea australiană AS 2327.1 [2] impun considerarea influenței forței tăietoare asupra momentului încovoietor capabil în cazul în care forța tăietoarea exterioară T este mai mare decât jumătate din forța tăietoare capabilă T_{pl} calculată cu relația 3.17. Fig. 3.9 prezintă curbele de interacțiune moment încovoietor-forță tăietoare propuse de cele două norme mai sus amintite.

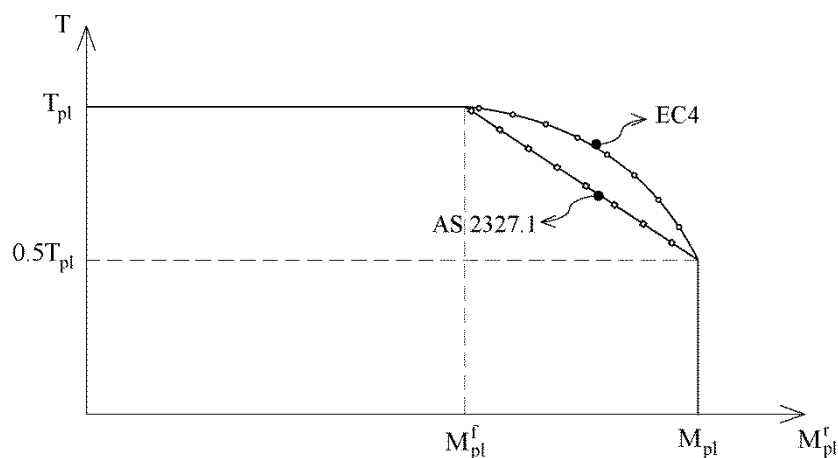


Fig. 3.9 Curba de interacțiune moment-forță tăietoare

Se observă că norma europeană recomandă o interpolare parabolică pentru determinarea momentului încovoietor redus M_{pl}^r , descrisă de următoarea relație:

$$M_{pl}^r = M_{pl} + (M_{pl} - M_{pl}^f) \left(\frac{2 \cdot T}{T_{pl}} - 1 \right)^2 \quad (3.18)$$

unde M_{pl}^f reprezintă plastic rezistent al secțiunii mixte calculat fără a lua în considerare aportul inimii profilului metalic. Norma australiană în schimb propune o relație de interpolare liniară pentru calculul momentului încovoietor redus ținând cont de influența forței tăietoare:

$$M_{pl}^r = M_{pl} + (M_{pl} - M_{pl}^f) \left(\frac{2 \cdot T}{T_{pl}} - 1 \right) \quad (3.19)$$

În codul chinez se menționează că se poate neglija influența forței tăietoare asupra momentului plastic pozitiv și asupra celui negativ dacă efortul capabil al armăturilor este mai mare decât 15% din efortul capabil al profilului metalic. Codul american nu face referire la acest aspect. Cu toate acestea, neglijarea efectului forței tăietoare poate fi acceptată având în vedere că se neglijează aportul betonului în preluarea acestui efort.

3.3.1.4 Conectarea la lunecare

Determinarea numărului de conectori ce trebuie dispuși pe fiecare lungime critică pentru asigurarea *conectării totale* se face în conformitate cu secțiunea 3.1 din cadrul acestui capitol. Astfel pentru zone solicitate la moment încovoietor pozitiv:

$$n_c^{fsc} = \frac{\min(N_{c,pl}, N_{s,pl})}{P_{sc}} \quad (3.20)$$

unde P_{sc} reprezintă rezistența la forfecare a unui conector și se determină în conformitate cu relațiile prescrise în normele de proiectare [1–3,122]. Dimensionarea conexiunii în zone solicitate la moment încovoietor negativ se face în mod similar:

$$n_c^{fsc} = \frac{\min(N_{r,pl}, N_{s,pl})}{P_{sc}} \quad (3.21)$$

unde $N_{r,pl}$ reprezintă efortul axial capabil al armăturilor dispuse în placa de beton în zona de moment negativ. Determinarea numărului de conectori în această manieră, presupune utilizarea unor conectori ductili, cu capacitate suficientă de deformare (lunecare longitudinală) astfel încât un asemenea calcul plastic să fie justificat. Conform EC4 un conector se poate considera ductil dacă capacitatea de deformare a acestuia este de cel puțin 6 mm. În cazul în care numărul de conectori dispuși pe lungimea critică este mai mic decât n_c^{fsc} atunci conectarea este parțială. În general codurile impun limitări ale gradului minim de conectare în vederea evitării cedării premature a conectorilor, înainte de a se dezvolta momentul plastic redus. Astfel, se disting următoarele limitări:

- $\eta \geq 0.5 \rightarrow$ conform codului chinez GB 50017
- $\eta \geq 0.25 \rightarrow$ conform codului american ANSI/AISC 360-10
- $\eta \geq 0.4$ pentru $L \leq 5.0\text{m}$
 $\eta \geq 0.25 + 0.03L$ pentru $5.0\text{m} \leq L \leq 25.0\text{m}$
 $\eta \geq 1$ pentru $L \geq 25.0\text{m}$ } \rightarrow conform codului european EC4

Gradul minim de conectare corespunzător normei australiene AS 2327.1 se determină în funcție de valoarea momentului încovoietor exterior.

3.3.2 Starea limită de serviciu

Proiectarea elementelor cu secțiune mixtă în starea limită de serviciu presupune limitarea săgeților, a deschiderii fisurilor și controlul vibrațiilor. În cadrul acestei secțiuni se vor prezenta principalele prevederi cu privire la calculul săgeților grinzilor mixte oțel-beton cu conectare totală și parțială. Filosofia de calcul a deplasărilor are la bază utilizarea

Această pagină a fost eliminată din conținutul electronic al acestei lucrări

$$I_{psc} = \frac{I_{fsc}}{1 + \zeta} \quad (3.28)$$

unde ζ reprezintă factorul de reducere ce ține cont de rigiditatea conexiunii și implicit a conectorilor dispuși pe lungimea critică. Trebuie observată diferența de abordare dintre codul chinez și celelalte norme, în ceea ce privește modul de includere a efectelor interacțiunii incomplete în calculul deplasărilor. Dacă standardul european, australian și american reduc momentul de inerție în funcție de gradul de conectare (care se calculează în funcție de rezistența conectorilor), codul chinez în schimb, introduce într-o manieră mai rațională efectele interacțiunii incomplete prin intermediul rigidității elastice a conectorilor.

În cazul grinzilor continue, norma europeană EC4 și cea chineză GB 50017 sugerează includerea efectelor fisurării betonului din zonele de moment negativ, prin utilizarea unui moment de inerție redus, pe o distanță egală cu 15% din deschidere pe fiecare parte a reazemului intermediar. Acest moment de inerție redus se calculează neglijând aportul betonului întins dar luând în considerare contribuția armăturilor.

În cele ce urmează se prezintă un exemplu numeric prin care se dorește ilustrarea modului de variație al săgeții maxime și a momentului de inerție în funcție de gradul de conectare. În acest sens, în Fig. 3.10 se prezintă schema statică și dimensiunile grinzii EI testată experimental de Chapman & Balakrishan [17].

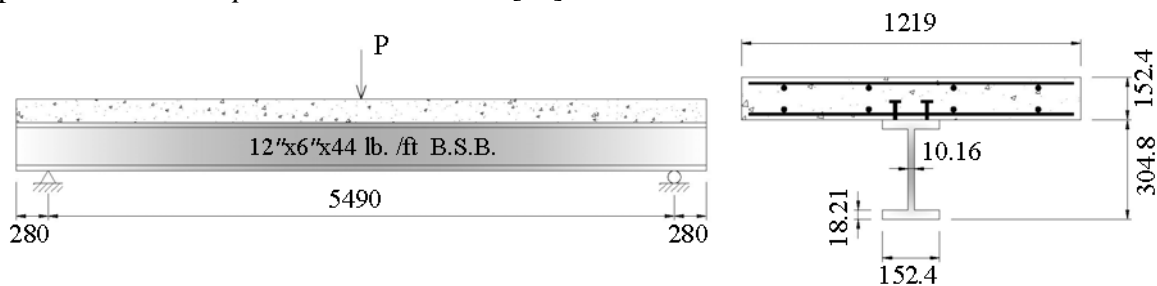


Fig. 3.10 Schema statică și dimensiunile grinzii EI

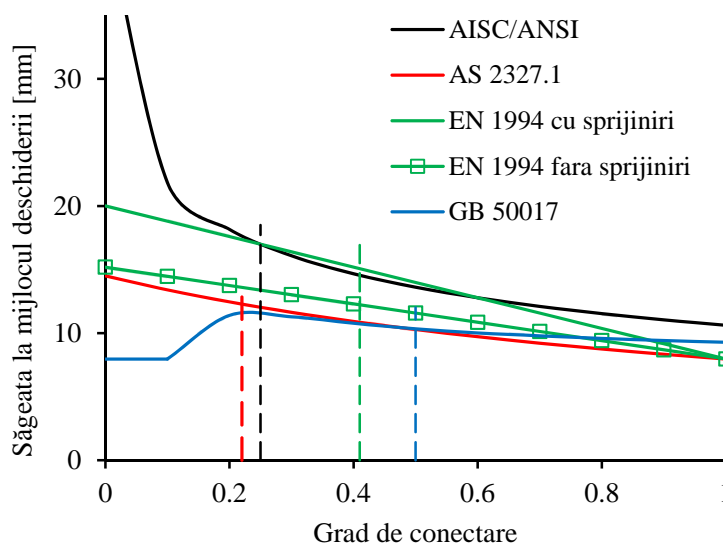


Fig. 3.11 Variația săgeții elastice maxime funcție de gradul de conectare

Modulul de elasticitate al betonului s-a considerat 32680 N/mm^2 , iar cel al oțelului 206000

N/mm^2 . Deplasările pe verticală au fost determinate considerând că asupra elementului s-a aplicat o forță $P=250 \text{ kN}$. Rigiditatea inițială a conectorilor, ce intră în expresia rigidității echivalente la încovoiere asociate standardului chinez, s-a considerat 141953 N/mm .

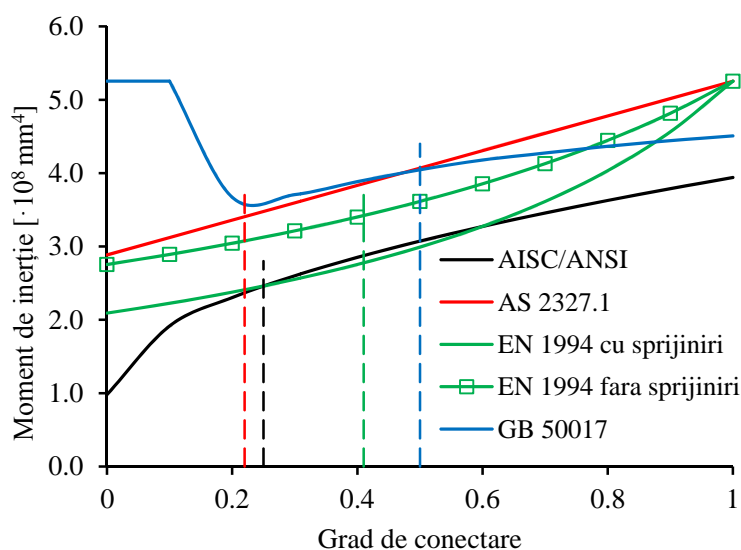


Fig. 3.12 Variația momentului de inerție funcție de gradul de conectare

Fig. 3.11 și Fig. 3.12 prezintă succesiv variația săgeții maxime respectiv a momentului de inerție în raport cu gradul de conectare η . În ambele figuri, cu linii punctate verticale s-au marcat limitele gradului de conectare asociate fiecărui standard de proiectare. Se observă că pentru valori mici ale gradului de conectare, norma chineză furnizează valori eronate ale rigidității la încovoiere deoarece parametrul ζ rezultă negativ. Norma americană neglijează aportul betonului în situația în care $\eta=0$ ceea ce evident reprezintă o aproximație. De asemenea, se poate constata că norma europeană (cazul elementelor executate fără sprijiniri) și cea australiană furnizează valori relative apropiate. Privind în ansamblu cele două figuri de mai sus, se poate observa caracterul aleatoriu al rezultatelor obținute aplicând relațiile prevăzute în diferitele coduri de proiectare. În consecință, este evidentă necesitatea unor relații mai exacte pentru calculul momentelor de inerție secționale (și implicit al săgeților) asociate grinzilor cu conectare parțială ($\eta < 1$).

3.4 Prevederi asupra stâlpilor cu secțiune mixtă oțel-beton

În continuare se prezintă câteva particularități privind calculul și analiza stâlpilor cu secțiune mixtă constituite din profile metalice înglobate total sau parțial în beton. Prescripțiile sunt preluate în general din norma europeană EN 1994 1-1 [1] și cea americană ANSI/AISC 360-10 [3] deoarece standardul chinez GB 50017 [122] și cel australian [2] nu conțin, după cunoștințele noastre, prevederi referitoare acestor tipuri de elemente mixte. Metodele de dimensionare consideră interacțiunea completă dintre beton și oțel până la cedare.

3.4.1 Stâlpi supuși la compresiune centrică

Efortul axial capabil plastic se determină prin sumarea forțelor capabile plastice ale componentelor:

$$N_{pl} = 0.85 \cdot N_{c,pl} + N_{s,pl} + N_{r,pl} \quad (3.29)$$

unde, termenii sumei se calculează la fel ca în cazul prezentat în secțiunea aferentă grinzilor. Conform EC4, un stâlp este considerat mixt dacă indicele de contribuție a oțelului ρ este cuprins între limitele 0.2 și 0.9:

$$\rho = \frac{N_{s,pl}}{N_{pl}} \quad (3.30)$$

Verificarea elementelor comprimate centric ține cont de zveltețea adimensională a acestora $\bar{\lambda}$, evaluată în funcție de forța critică de flambaj N_{cr} :

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{N_{pl}}{N_{cr}}} \quad (3.31)$$

Rigiditatea elastică la încovoiere ce intervine în calculul lui N_{cr} se determină astfel:

$$(EI) = E_s I_s + 0.8 \cdot E_c I_c + E_r I_r \quad (3.32)$$

unde indicii s , c , r fac referire la oțel, beton respectiv armături. Includerea efectelor încărcărilor de lungă durată (contractia și curgerea lentă a betonului) se simulează prin modificarea modului de elasticitate al betonului conform relațiilor prescrise în EC4. Norma americană propune următoarea relație pentru evaluarea rigidității elastice la încovoiere fără a face comentarii suplimentare asupra efectelor de lungă durată:

$$(EI) = E_s I_s + \left(0.1 + \frac{2A_s}{A_s + A_c} \right) \cdot E_c I_c + 0.5 \cdot E_r I_r \quad (3.33)$$

3.4.2 Stâlpi supuși la încovoiere cu efort axial

Metoda simplificată de calcul a acestor elemente se bazează pe curba de interacțiune plastică M-N determinată prin aplicarea metodei rigid-plastice în patru puncte caracteristice A, B, C și D (Fig. 3.13) și calcularea, pentru fiecare punct, a combinațiilor de eforturi ce produc cedarea plastică. Punctul A este asociat cu capacitatea portantă la compresiune centrică, punctul B corespunde capacității portante la încovoiere, iar efortul axial corespunzător punctului C (N_{pm}) este reprezentat de efortul capabil al ariei de beton. Trebuie notat că, analiza rigid plastică poate fi utilizată doar dacă interacțiunea dintre beton și oțel este totală (distribuție liniară a deformațiilor, fără discontinuități), voalarea locală a tălpilor este prevenită și secțiunea este dublu simetrică.

În ceea ce privește efectele de ordinul doi, corespunzătoare stâlpilor zvelți, EC4 propune o metodă simplificată de considerare a acestora, prin multiplicarea momentelor de ordinul unu cu un factor de corecție supraunitar calculat astfel:

$$k_{II} = \frac{\vartheta}{1 - \frac{N}{N_{cr}}} \quad (3.34)$$

unde N reprezintă efortul axial solicitant iar ϑ este un coeficient ce ține cont de variația diagramei de momente încovoietoare și ia următoarele valori:

$$\begin{aligned} \vartheta &= 1 \rightarrow \text{când, pe lungimea stâlpului, sunt aplicate încărcări transversale} \\ \vartheta &= 0.66 + 0.44 \cdot r_M \rightarrow \text{pentru stâlpi solicitați de momente încovoietoare la extremități,} \end{aligned} \quad (3.35)$$

r_M reprezentând raportul acestora

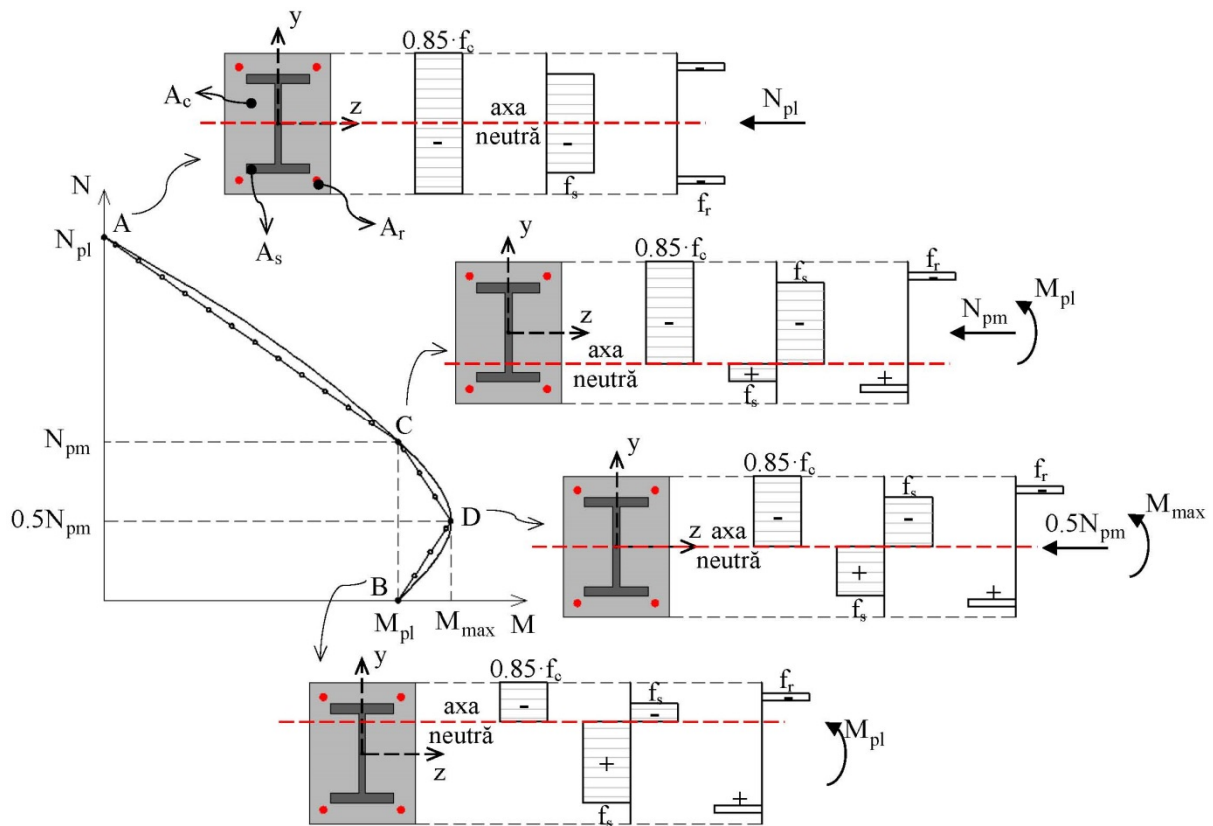


Fig. 3.13 Curba de interacțiune moment încovoietor-efort axial

În cazul compresiunii excentrice (simplă excentricitate), momentului încovoietor capabil al secțiunii i se aplică un coeficient de corecție ce ține cont de amplificarea fenomenului de flambaj datorat prezenței momentului încovoietor. Succesiunea de etape necesare determinării acestui coeficient de flambaj sunt prezentate în EC4-Exemple de calcul [126].

Dimensionarea stâlpilor supuși la efort axial și încovoiere oblică, presupune verificarea acestora pentru fiecare plan de încovoiere, imperfecțiunile luându-se în considerare doar pe direcția axei slabe de inerție.

3.5 Concluzii parțiale

Din analiza întreprinsă în această secțiune a lucrării se poate desprinde o concluzie importantă și anume faptul că la ora actuală nu există o formulare unitară, consistentă și unanim acceptată cu privire la evaluarea capacității de deformabilitate (în domeniul elastic) și a capacității de rezistență (moment încovoietor capabil) pentru grinzile compozite cu conectare parțială. Dacă codul de proiectare american și cel australian propun o relație empirică cu privire la evaluarea modulului de rigiditate la încovoiere, standardul european propune relații mai sofisticate bazate pentru exprimarea săgeților grinzilor simplu rezemate corectate în funcție de diferiți factori, calibrați prin experimente numerice, care iau în considerare efectul conectării parțiale dintre cele două componente ale grinzii mixte. Aceste standarde, în esență, reduc momentul de inerție în funcție de gradul de conectare (care se calculează în funcție de capacitatea portantă a conectorilor), în timp ce codul chinez sugerează o relație de evaluare a rigidității la încovoiere asociate conectării parțiale în care se ține cont, într-un mod mai rațional, de rigiditatea elastică a conectorilor și nu de capacitatea

portantă a acestora. Toate aceste normative fundamentează calculul de deformabilitate și cel de rezistență prin introducerea conceptului de grad de conectare. Astfel, în ceea ce privește calculul la starea ultimă a grinzilor compozite cu conectare parțială, acesta se efectuează *la nivel de secțiune* prin evaluarea momentului capabil în baza unei analize rigid-plastice, exprimând condițiile de echilibru secțional coroborate cu admiterea unei valori prestabilite a forței axiale din dala de beton comprimată, exprimată în funcție de gradul de conectare. Prin urmare, în baza prescripțiilor menționate mai sus, fenomenul complex al conectării parțiale manifestat la nivel de element prin comportarea neliniară complexă a conectorilor, de pe întreaga lungime a elementului, și a materialelor constitutive poate fi surprins doar simplificat. Dezvoltarea unor relații care să acopere întreg domeniul de comportare al acestor tipuri de structuri, de la elastic și până la atingerea capacității ultime de rezistență sunt imperios necesare atât pentru conferirea unui grad cât mai uniform de siguranță cât mai cu seama pentru relevarea beneficiilor de ductilitate sporită pe care le pot conferi astfel de elemente structurale.

4 Ecuția diferențială de echilibru a grinzilor cu interacțiune parțială solicitate în domeniul elastic

4.1 Introducere

În cadrul acestui capitol se dorește prezentarea cadrului general al analizei grinzilor mixte oțel-beton cu interacțiune parțială, în domeniul elastic de comportare. Studiul elastic are o importanță considerabilă deoarece, pe de-o parte reprezintă o metodă exactă de verificare a rezultatelor furnizate de normele de proiectare pentru calculul săgeților elastice în condițiile conectării (și implicit a interacțiunii) parțiale dintre placa de beton și grinda metalică, iar pe de altă parte furnizează informații prețioase și detaliate asupra modului de comportare a acestor elemente, informații ce reprezintă temelia metodelor avansate de calcul care i-au în considerare comportarea inelastică a materialelor și conectorilor. În cazul grinzilor mixte alcătuite dintr-o placă de beton ce reazemă pe un profil metalic, dispozitivele de conectare de tipul dornurilor cu cap dispuse în lungul suprafeței de contact, permit în exploatare lunecări relative între componentele sistemului, rezultând astfel un salt în diagrama de variație a deformațiilor pe înălțimea secțiunii, așa cum s-a arătat în capitolul 3. Cuantificarea efectelor acestor deplasări relative asupra efortului axial din dala de beton reprezintă principalul obiectiv al acestui capitol. Cel mai vehiculat și utilizat model de analiză elastică a grinzilor mixte cu interacțiune parțială este modelul propus de Newmark [14]. Varianta originală a modelului este inclusă într-un raport nepublicat întocmit de autor în 1943, urmând a fi publicată într-o formă condensată în 1951 [14] și detaliată în 1952 [42]. Modelul propus de Newmark reprezintă fundamentul mai multor propuneri de analiză a grinzilor mixte oțel-beton cu interacțiune parțială dintre care amintim lucrările publicate de *Girhammar ș.a.* [45–48,127], *Faella ș.a.* [52–54,57–59], *Li & Li* [60] și *Luan ș.a.* [61].

4.2 Modelul Newmark pentru analiza elastică a grinzilor mixte oțel-beton cu interacțiune parțială

Modelul analitic propus de Newmark [42] pentru analiza grinzilor mixte oțel-beton cu interacțiune parțială are la bază următoarele ipoteze simplificatoare:

- 1) Materialele componente au comportare elastică;
- 2) Dispozitivele mecanice de conectare dintre dala de beton și grinda metalică au, de asemenea, o comportare liniar elastică (*Fig. 4.1*);
- 3) Conexiunea dintre componentele grinzii compozite se consideră continuă, deși dispozitivele de conectare (conectorii) sunt dispuse discret în lungul elementului, la interfața de contact dintre placa de beton și profilul metalic;
- 4) Secțiunile transversale rămân plane și normale la axa barei după deformare, rezultând astfel o distribuție liniară a deformațiilor pe înălțimea secțiunii;
- 5) Dala de beton și grinda metalică rămân în contact indiferent de nivelul de solicitare, săgeata componentei din beton fiind astfel identică cu cea a componentei metalice în oricare secțiune transversală din lungul elementului, acest aspect implicând curburi egale în cele două sub-elemente ale grinzii;
- 6) Deformațiile unghiulare nu sunt luate în considerare.

Trebuie menționat că în cele ce urmează se tratează cazul grinzilor compozite alcătuite dintr-un profil metalic și o placă de beton aflate în contact, dar fără înglobarea parțială sau totală a profilului în componenta de beton. Dispozitivele de conectare utilizate sunt de tip gujoanelor (dornurilor cu cap) care prezintă ductilitate sporită în spațiul forță-lunecare relativă.

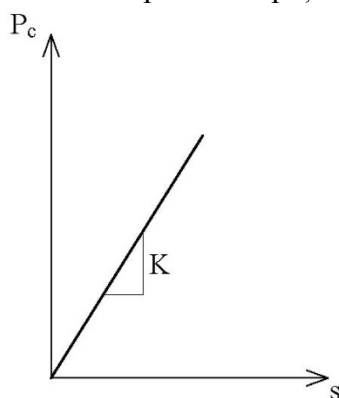


Fig. 4.1 Comportarea idealizată liniar-elastică a conectorilor

În Fig. 4.2 se prezintă succesiv un element infinitesimal de grindă compozită oțel beton și o secțiune transversală tipică cu distribuția deformațiilor pe înălțimea acesteia. Se observă variația liniară a deformațiilor pe înălțimea secțiunii transversale caracterizată prin curburi egale în cele două componente. În dreptul interfeței de contact dintre beton și oțel se distinge o discontinuitate în distribuția deformațiilor datorată interacțiunii incomplete dintre componente, așa cum s-a descris în detaliu în capitolul 3.

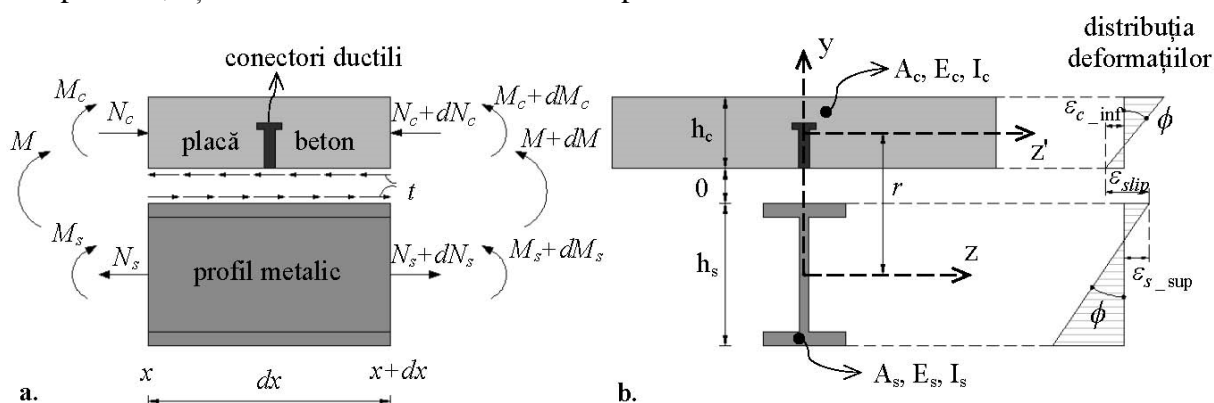


Fig. 4.2.a. Element infinitesimal de grindă compozită oțel-beton b. Distribuția deformațiilor pe înălțimea secțiunii transversale

Exprimând echilibrul axial pentru cele două componente, se obțin următoarele relații diferențiale:

$$\begin{aligned} \frac{dN_c}{dx} &= -t \\ \frac{dN_s}{dx} &= -t \end{aligned} \quad (4.1)$$

unde, N_c și N_s reprezintă eforturile axiale interioare în placa de beton respectiv în profilul metalic, iar t reprezintă fluxul de lunecare la interfața de contact dintre componentele elementului mixt și se exprimă în baza relației următoare:

$$t = \frac{P_c}{i_c} \quad (4.2)$$

unde, P_c este efortul de forfecare din conectori, iar i_c reprezintă spațierea acestora.

În baza ipotezei 2) de mai sus, prin care se admite comportarea elastică a fiecărui conector, efortul de forfecare P_c poate fi determinat astfel:

$$P_c = K \cdot s \quad (4.3)$$

În relația (4.3), K reprezintă rigiditatea conectorului iar s este lunecarea relativă aferentă (vezi Fig. 4.1). Combinând relațiile (4.1), (4.2) și (4.3), s poate fi exprimat astfel:

$$s = -\frac{i_c}{K} \frac{dN_c}{dx} \quad (4.4)$$

Datorită interacțiunii incomplete (parțiale) dintre dala de beton și componenta metalică, în dreptul interfeței de contact dintre acestea se înregistrează un salt în distribuția deformațiilor, care poate fi exprimat astfel:

$$\varepsilon_{slip} = \varepsilon_{c_inf} - \varepsilon_{s_sup} \quad (4.5)$$

unde ε_{c_inf} și ε_{s_sup} reprezintă deformația în fibra inferioară a dalei respectiv în fibra superioară a profilului metalic și se calculează folosind relațiile:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{c_inf} &= -\frac{N_c}{E_c A_c} + \frac{M_c}{E_c I_c} \frac{h_c}{2} \\ \varepsilon_{s_sup} &= \frac{N_s}{E_s A_s} - \frac{M_s}{E_s I_s} \frac{h_s}{2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

unde primul termen al fiecărei sume reprezintă deformația axială, iar cel de-al doilea termen reprezintă deformația datorată încovoierii, și unde $E_{c(s)}$, $A_{c(s)}$ și $I_{c(s)}$ desemnează modulul de elasticitate longitudinal, aria și momentul de inerție axial al dalei de beton (c) respectiv al profilului metalic (s). În baza echilibrului, efortul axial N_c din dală este egal cu efortul axial N_s din profilul metalic. Folosind această observație și introducând expresiile (4.6) în relația (4.5) se obține următoarea expresie pentru deformația de lunecare longitudinală:

$$\varepsilon_{slip} = -N_c \left(\frac{1}{E_c A_c} + \frac{1}{E_s A_s} \right) + \frac{M_c}{E_c I_c} \frac{h_c}{2} + \frac{M_s}{E_s I_s} \frac{h_s}{2} \quad (4.7)$$

Mai departe, în baza consecinței ipotezelor 4) și 5), curbura ϕ poate fi evaluată astfel:

$$\phi = \frac{M_c}{E_c I_c} = \frac{M_s}{E_s I_s} = \frac{M_c + M_s}{E_c I_c + E_s I_s} \quad (4.8)$$

Utilizând expresia curburii, relația (4.7) poate fi scrisă sub următoarea formă:

$$\varepsilon_{slip} = -N_c \left(\frac{1}{E_c A_c} + \frac{1}{E_s A_s} \right) + \phi \left(\frac{h_c}{2} + \frac{h_s}{2} \right) \quad (4.9)$$

sau, mai departe:

$$\varepsilon_{slip} = -N_c \left(\frac{1}{E_c A_c} + \frac{1}{E_s A_s} \right) + \frac{M_c + M_s}{E_c I_c + E_s I_s} r \quad (4.10)$$

unde r reprezintă distanța dintre centrele de greutate ale celor două componente. Momentul încovoiator total în secțiunea curentă x , evaluat față de centrul de greutate al profilului metalic, are următoarea expresie:

$$M = M_c + M_s + N_c \cdot r \quad (4.11)$$

Astfel, relația (4.10) devine:

$$\varepsilon_{slip} = -N_c \left(\frac{1}{E_c A_c} + \frac{1}{E_c A_s} \right) + \frac{M - N_c \cdot r}{E_c I_c + E_s I_s} r \quad (4.12)$$

Derivând relația (4.4) obținem:

$$\varepsilon_{slip} = \frac{ds}{dx} = -\frac{i_c}{K} \frac{d^2 N_c}{dx^2} \quad (4.13)$$

Egalând expresiile (4.12) și (4.13) rezultă:

$$-\frac{i_c}{K} \frac{d^2 N_c}{dx^2} = -N_c \left(\frac{1}{E_c A_c} + \frac{1}{E_c A_s} \right) + \frac{M - N_c \cdot r}{E_c I_c + E_s I_s} r \quad (4.14)$$

Separând termenii obținem ecuația diferențială neomogenă de ordinul 2 cu coeficienți constanți a grinzii compozite oțel-beton cu interacțiune parțială:

$$\frac{d^2 N_c}{dx^2} - \frac{K}{i_c} \frac{(EI)^\infty}{EA(EI)^0} N_c = -\frac{K}{i_c} \frac{r}{(EI)^0} M \quad (4.15)$$

unde:

$$\begin{aligned} \frac{1}{EA} &= \frac{E_c A_c + E_c A_s}{E_c A_c E_s A_s}; \\ (EI)^0 &= E_c I_c + E_c I_s; \\ (EI)^\infty &= (EI)^0 + r^2 \overline{EA}; \end{aligned} \quad (4.16)$$

Mai mult, $(EI)^0$ și $(EI)^\infty$ reprezintă rigiditatea la încovoiere a secțiunii compozite în cazul lipsei interacțiunii respectiv a interacțiunii totale.

Se fac următoarele notații:

$$\begin{aligned} k &= \frac{K}{i_c} \\ \alpha^2 &= k \frac{(EI)^\infty}{EA(EI)^0} \\ \chi &= k \frac{r}{(EI)^0} = \alpha^2 \frac{r \cdot \overline{EA}}{(EI)^\infty} \end{aligned} \quad (4.17)$$

unde k reprezintă rigiditatea conexiunii. Cu notațiile (4.17), ecuația diferențială se scrie în formă condensată astfel:

$$\frac{d^2 N_c}{dx^2} - \alpha^2 N_c = -\alpha^2 \frac{r \cdot \overline{EA}}{(EI)^\infty} M \quad (4.18)$$

Necunoscuta ecuației diferențiale este efortul axial din dala de beton a cărei valoare este influențată de valoarea momentului încovoiător din secțiunea curentă x . Astfel, pentru rezolvarea ecuației diferențiale (determinarea expresiei efortului axial din dala de beton) se impune cunoașterea expresiei momentului încovoiător în lungul elementului și prin urmare aplicabilitatea ecuației diferențiale se limitează la cazuri particulare de încărcare și rezemare a grinzilor mixte oțel-beton pentru care expresia momentului încovoiător este cunoscută.

Odată determinată soluția ecuației diferențiale, se poate evalua atât lunecarea longitudinală în baza relației (4.4) cât și săgeată, prin dubla integrare a următoarei relații:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{(EI)^\infty} + \frac{r}{k} \frac{\overline{EA}}{(EI)^\infty} \frac{d^2 N_c}{dx^2} \quad (4.19)$$

obținute prin exprimarea curburii în funcție de momentul încovoietor total M și de efortul axial din dala de beton N_c și ținând cont de ecuația diferențială de ordinul II a axei deformată:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\phi = -\frac{M}{(EI)^0} + \frac{N_c \cdot r}{(EI)^0} \quad (4.20)$$

Exprimându-l apoi pe N_c din relația (4.15) și inserând expresia obținută în (4.20), se obține ecuația diferențială de ordinul II (4.19) ce definește săgeata grinzii mixte cu interacțiune parțială în funcție de valoarea momentului încovoietor și a efortului axial din dala de beton. Observând că dubla integrare a primului termen al sumei din relația (4.19) reprezintă săgeata elementului mixt în condițiile interacțiunii totale w_{fi} , soluția ecuației diferențiale (4.19) poate fi scrisă astfel [42]:

$$w_{pi} = w_{fi} + \frac{r}{k} \frac{\overline{EA}}{(EI)^\infty} N_c \quad (4.21)$$

unde cu w_{pi} s-a notat săgeata elementului mixt în cazul interacțiunii parțiale dintre cele două componente, în stadiul elastic de solicitare. Spre deosebire de relațiile propuse de nomele de proiectare pentru evaluarea săgeților grinzilor mixte în condițiile conectării parțiale (relații prezentate și discutate în capitolul anterior), relația (4.21) include riguros rigiditatea efectivă a conexiunii (prin intermediul parametrului k) în evaluarea săgeții acestor tipuri de elemente. Așadar cunoașterea variației efortului axial din dala de beton permite implicit determinarea variației lunecării longitudinale și a săgeții în lungul elementului mixt.

4.2.1 Alte forme ale ecuației diferențiale

În literatura de specialitate se disting și alte forme ale ecuației diferențiale de echilibru a grinzilor compozite oțel-beton cu interacțiune incompletă care, de asemenea, au la bază modelul *Newmark* [14,42] de analiză și ipotezele asociate. Aceste forme particulare se diferențiază de ecuația (4.18) în special prin variabila aleasă ca necunoscută. Prin urmare, dacă în forma ecuației diferențiale prezentate anterior, necunoscuta este reprezentată de efortul axial din dala de beton, în variantele ce urmează a fi prezentate succint, necunoscutele sunt definite în termeni de curbura, lunecare relativă sau săgeată.

4.2.1.1 Ecuația diferențială de ordinul II cu necunoscuta în curbura

Această formă a ecuației diferențiale este descrisă, printre altele, în lucrările publicate de *Faella ș.a.* [52–54,57–59]. Autorii includ în formulare și efectele contracției betonului prin luarea în considerare a deformației produse de acest fenomen. Ecuația diferențială de ordinul II este dedusă pentru cazul particular al unei grinzi mixte oțel-beton simplu rezemate supusă acțiunii unei sarcini uniform distribuite q .

Lunecarea relativă dintre placa de beton și grinda metalică poate fi evaluată astfel [53]:

$$s = u_s - u_c - \theta \cdot r \quad (4.22)$$

unde u_s și u_c reprezintă deplasările axiale evaluate în dreptul centrului de greutate al profilului metalic respectiv al dalei de beton, iar θ reprezintă rotirea celor două componente. Derivând relația (4.22) se obține expresia deformației de lunecare longitudinală:

$$\frac{ds}{dx} = \varepsilon_s - \varepsilon_c - \varepsilon_{cs} - \phi \cdot r \quad (4.23)$$

unde ε_{cs} reprezintă deformația datorată contracției betonului. Folosind relațiile (4.8) și (4.11), curbura ϕ poate fi exprimată astfel:

$$\phi = \frac{M - N_L \cdot r}{(EI)^0} \quad (4.24)$$

unde s-a ținut cont că, în baza echilibrului axial exprimat pe componenta de beton, efortul axial interior din dala de beton N_c este egal N_L ce reprezintă suma eforturilor din conectorii dispuși până la secțiunea curentă x . Această condiție de echilibru a fost exprimată și în capitolul 3. Derivând apoi expresia curburii de două ori, obținem:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{q}{(EI)^0} - \frac{k \cdot s' \cdot r}{(EI)^0} \quad (4.25)$$

unde s-a ținut cont că [53]:

$$\frac{dN_L}{dx} = k \cdot s \quad (4.26)$$

unde k reprezintă rigiditatea conexiunii dintre dala de beton și profilul metalic. Utilizând apoi relația (4.23) se deduce ecuația diferențială de ordinul II a grinzilor mixte oțel-beton cu interacțiune incompletă, având necunoscută curbura ϕ :

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - \alpha^2\phi = \frac{q}{(EI)^0} - \alpha^2 \frac{M}{(EI)^\infty} - \frac{k \cdot \varepsilon_{cs} \cdot r}{(EI)^0} \quad (4.27)$$

unde α^2 este definit în relația (4.17). Folosind soluția ecuației diferențiale și aplicând principiul lucrului mecanic virtual, se poate deduce matricea elastică de rigiditate (prin inversarea matricei de flexibilitate) a elementului de bară plan cu șase grade de libertate, așa cum este prezentat în [52–54]. Includerea efectelor neliniarității fizice în răspunsul structural al grinzii, se realizează prin divizarea fiecărui element de bară în mai multe elemente finite și aplicarea unei metode iterative, așa cum se prezintă în [57,58].

4.2.1.2 Ecuația diferențială de ordinul II cu necunoscuta în lunecarea longitudinală

Utilizând notațiile (4.16), relația (4.12) ce definește deformația de lunecare longitudinală poate fi scrisă sub următoarea formă:

$$\frac{ds}{dx} = \varepsilon_{slip} = -\frac{N_c}{EA} + \frac{M - N_c \cdot r}{(EI)^0} \quad (4.28)$$

Derivând relația (4.28) obținem următoarea expresie:

$$\frac{d^2s}{dx^2} = \frac{t}{EA} + \frac{r}{(EI)^0} \left(\frac{dM}{dx} + t \cdot r \right) \quad (4.29)$$

unde t reprezintă fluxul de lunecare la interfața de contact dintre componentele elementului mixt și combinând relațiile (4.2) și (4.3) poate fi definit astfel:

$$t = k \cdot s \quad (4.30)$$

unde k reprezintă rigiditatea conexiunii. Introducând relația (4.30) în (4.29) se obține următoarea ecuație diferențială de ordinul II în lunecare relativă s :

$$\frac{d^2s}{dx^2} - k \left(\frac{1}{EA} + \frac{r^2}{(EI)^0} \right) \cdot s = \frac{r}{(EI)^0} \frac{dM}{dx} \quad (4.31)$$

sau, introducând parametrul α^2 definit de relația (4.17):

$$\frac{d^2 s}{dx^2} - \alpha^2 \cdot s = \alpha^2 \frac{r}{k} \frac{\overline{EA}}{(EI)^\infty} \frac{dM}{dx} \quad (4.32)$$

Se observă și în acest caz interdependența dintre soluția ecuației diferențiale și condițiile de încărcare/rezemare și, prin urmare, fiecărui caz particular de schemă statică i se asociază soluția corespunzătoare. Această variantă a ecuației diferențiale de ordinul II a elementului de grindă compozită oțel-beton cu interacțiune parțială este descrisă în lucrarea publicată de Luan ș.a [61]. Pentru cazul particular al unei grinzi mixte dublu încastrate, autorii, făcând uz de soluția ecuației (4.32), prezintă formularea unui element finit cu douăsprezece respectiv opt grade de libertate capabil să surprindă comportarea elementului mixt în domeniul elastic de solicitare, cu includerea efectelor interacțiunii parțiale dintre componente. Trebuie menționat că soluția generală a ecuației diferențiale se obține impunând condiții de lunecare zero la capetele elementului ceea ce reprezintă o aproximare, în realitatea existând deplasări relative între cele două componente.

4.2.1.3 Ecuația diferențială de ordinul IV cu necunoscuta în săgeată

Pentru obținerea acestei forme a ecuației diferențiale a grinzii compozite oțel-beton cu interacțiunea parțială, se aranjează relația (4.14) sub următoarea formă, în baza ecuațiilor (4.8) și (4.17):

$$\frac{d^2 N_c}{dx^2} - N_c \left(\frac{1}{E_c A_c} + \frac{1}{E_c A_s} \right) k + \phi \cdot r \cdot k = 0 \quad (4.33)$$

În ipoteza micilor deformații, poate fi acceptată următoarea relație:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\phi = -\frac{M_c + M_s}{E_c I_c + E_s I_s} \quad (4.34)$$

unde w reprezintă săgeată elementului în secțiunea curentă. În baza relației de mai sus, efortul axial în dala de beton poate fi evaluat astfel:

$$N_c = \frac{M}{r} + \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{(EI)^0}{r} \quad (4.35)$$

Introducând cea de-a doua derivată a expresiei (4.35) în relația (4.33) se obține:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{k \cdot (EI)^\infty}{EA \cdot (EI)^0} \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{k}{EA \cdot (EI)^0} M - \frac{1}{(EI)^0} \frac{d^2 M}{dx^2} \quad (4.36)$$

sau, utilizând notațiile (4.17):

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \alpha^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = \alpha^2 \frac{M}{(EI)^\infty} - \frac{1}{(EI)^0} \frac{d^2 M}{dx^2} \quad (4.37)$$

Relația (4.37) reprezintă ecuația diferențială de ordinul IV a grinzilor compozite oțel-beton cu interacțiune parțială având ca necunoscută săgeata w . Soluția acestei forme a ecuației diferențiale de echilibru este utilizată de Li & Li [60] pentru determinarea matricei elastice de rigiditate a elementului de cadru plan pentru câteva cazuri particulare de încărcare.

4.2.2 Soluționarea ecuației diferențiale pentru diferite cazuri de încărcare

Soluția ecuației diferențiale se obține în mod obișnuit prin însumarea soluției $N_{c,0}$ a ecuației omogene cu soluția particulară $N_{c,p}$, aceasta din urmă fiind dependentă de cazul de încărcare studiat. Ecuația omogenă atașată este:

$$\frac{d^2 N_c}{dx^2} - \alpha^2 N_c = 0 \quad (4.38)$$

unde coeficientul α^2 definit de relația (4.17). Soluția ecuației (4.38) poate fi scrisă sub următoarea formă:

$$N_{c,0} = C_1 \cdot ch(\alpha x) + C_2 \cdot sh(\alpha x) \quad (4.39)$$

unde C_1 și C_2 sunt constantele de integrare și se calculează în funcție de condițiile particulare impuse, așa cum se prezintă în secțiunea 4.2.3. a prezentului capitol. Soluția particulară $N_{c,p}$ a ecuației diferențiale variază în funcție de expresia momentului încovoietor în lungul elementului, deci implicit variază în funcție de condițiile de rezemare și încărcare studiate. În continuare se prezintă soluția particulară și cea generală pentru câteva cazuri de încărcare des întâlnite în practica curentă:

4.2.2.1 Element de bară plan supus acțiunii momentelor încovoietoare nodale

Fie elementul de bară plan, în sistemul coordonatelor de bază, din Fig. 4.3.

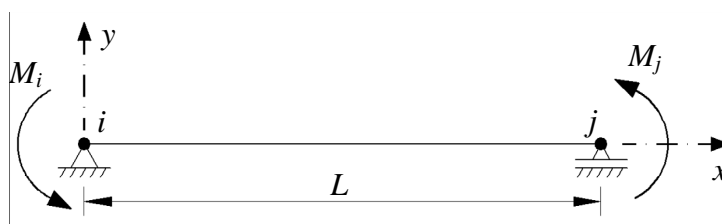


Fig. 4.3 Element de bară supus acțiunii momentelor încovoietoare nodale

Considerând că elementul de bară este încărcat doar în nodurile de la capetele elementului, în orice secțiune transversală, aflată la distanța x de capătul i , momentul încovoietor are următoarea expresie:

$$M(x) = \frac{M_i + M_j}{L} x - M_i \quad (4.40)$$

Pentru acest caz de încărcare, soluția particulară a ecuației diferențiale (4.18) este un polinom de gradul I, deci are forma termenului liber a ecuației diferențiale:

$$N_{c,p} = A \cdot x + B \quad (4.41)$$

unde constantele A și B au următoarele expresii:

$$A = \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \frac{M_i + M_j}{L}; \quad (4.42)$$

$$B = -\frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} M_i$$

unde (\overline{EA}) și $(EI)^\infty$ sunt definite prin relațiile (4.16) iar r reprezintă distanța dintre centrele de greutate ale celor două componente. Însumând soluția ecuației omogene cu soluția

particulară, se obține soluția generală a ecuației diferențiale, pentru cazul barei încărcate cu momente încovoietoare nodale:

$$N_c(x) = C_1 \cdot ch(\alpha x) + C_2 \cdot sh(\alpha x) + \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left(\frac{M_i + M_j}{L} x - M_i \right) \quad (4.43)$$

unde C_1 și C_2 sunt constante de integrare care se determină în funcție de condiții prescrise în anumite puncte caracteristice din lungul elementului, așa cum se va vedea în secțiunile următoare. Folosind notația:

$$\xi = \frac{x}{L} \quad (4.44)$$

relația (4.43) poate fi scrisă sub următoarea formă:

$$N_c(x) = C_1 \cdot ch(\alpha \xi L) + C_2 \cdot sh(\alpha \xi L) + \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} [M_i(\xi - 1) + M_j \xi] \quad (4.45)$$

4.2.2.2 Element de bară plan supus acțiunii momentelor încovoietoare nodale și a unei sarcini uniform distribuite

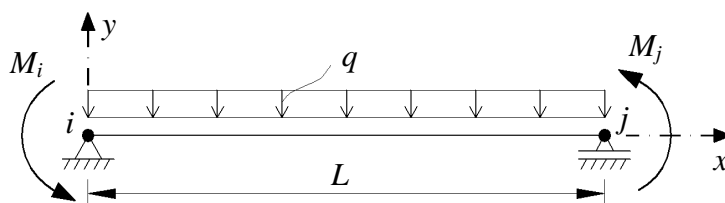


Fig. 4.4 Element de bară supus acțiunii momentelor încovoietoare nodale și sarcinii uniform distribuite q

Fie elementul de bară plan, în sistemul coordonatelor de bază, din Fig. 4.4 solicitat de momentele încovoietoare nodale M_i și M_j și de încărcarea uniform distribuită q . În aceste condiții de solicitare, momentul încovoietor într-o secțiune curentă x raportată la capătul i al barei are următoarea expresie:

$$M(x) = -\frac{q}{2} x^2 + \left(\frac{M_i + M_j}{L} + \frac{qL}{2} \right) x - M_i \quad (4.46)$$

Astfel, soluția particulară constă într-un polinom de gradul II de forma:

$$N_{c,p} = A \cdot x^2 + B \cdot x + C \quad (4.47)$$

Derivând expresia (4.47), înlocuind în relația (4.18) și făcând identificarea termen cu termen se obțin expresiile constantelor A , B și C :

$$\begin{aligned} A &= -\frac{q r \cdot (\overline{EA})}{2 (EI)^\infty}; \\ B &= \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left(\frac{M_i + M_j}{L} + \frac{qL}{2} \right); \\ C &= -\frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left(M_i + \frac{q}{\alpha^2} \right) \end{aligned} \quad (4.48)$$

Însumând soluțiile (4.39) și (4.47) se obține expresia efortului axial din dala de beton pentru cel de-al doilea caz de încărcare considerat:

$$N_c(x) = C_1 \cdot ch(\alpha x) + C_2 \cdot sh(\alpha x) + \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left(\frac{M_i + M_j}{L} x - M_i - \frac{q}{2} x^2 + \frac{qL}{2} x - \frac{q}{\alpha^2} \right) \quad (4.49)$$

sau, folosind notația (4.44):

$$N_c(x) = C_1 \cdot ch(\alpha \xi L) + C_2 \cdot sh(\alpha \xi L) + \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left[M_i(\xi - 1) + M_j \xi + \frac{qL^2 \xi(1 - \xi)}{2} - \frac{q}{\alpha^2} \right] \quad (4.50)$$

unde C_1 și C_2 sunt constante de integrare care se determină în funcție de condiții prescrise în anumite puncte caracteristice din lungul elementului.

4.2.2.3 Element de bară plan supus acțiunii momentelor încovoietoare nodale și a unei forțe concentrate la mijlocul deschiderii

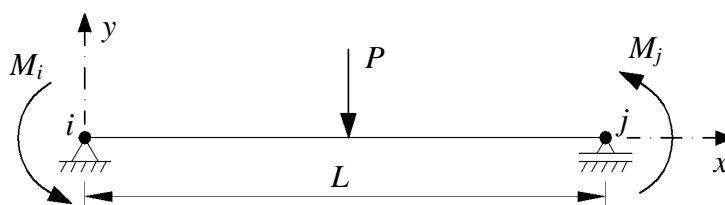


Fig. 4.5 Element de bară supus acțiunii momentelor încovoietoare nodale și forței concentrate P

Fie elementul de bară plan, în sistemul coordonatelor de bază, din Fig. 4.5 solicitat de momentele încovoietoare nodale M_i și M_j și o forță concentrată aplicată la mijlocul deschiderii. Expresia momentului încovoietor pentru acest caz particular de încărcare este:

$$M(x) = \begin{cases} \frac{M_i + M_j}{L} x - M_i + \frac{P}{2} x \rightarrow x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{M_i + M_j}{L} x - M_i - \frac{P}{2} x + \frac{PL}{2} \rightarrow x \geq \frac{L}{2} \end{cases} \quad (4.51)$$

Se observă că în acest caz particular de încărcare expresia momentului încovoietor diferă funcție de poziția curentă x față de secțiunea corespunzătoare punctului de aplicare a forței concentrate. În consecință ecuația diferențială (4.18) prezintă două soluții independente. Soluțiile particulare asociate sunt exprimate sub forma unor polinoame de gradul I de tipul (4.41) iar soluțiile generale aferente acestui tip de încărcare pot fi scrise sub următoarea formă:

$$N'_c(x) = C'_1 \cdot ch(\alpha x) + C'_2 \cdot sh(\alpha x) + \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left[\frac{M_i + M_j}{L} x - M_i + \frac{P}{2} x \right] \rightarrow x \leq \frac{L}{2} \quad (4.52)$$

$$N''_c(x) = C''_1 \cdot ch(\alpha x) + C''_2 \cdot sh(\alpha x) + \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left[\frac{M_i + M_j}{L} x - M_i - \frac{P}{2} x + \frac{PL}{2} \right] \rightarrow x \geq \frac{L}{2}$$

sau, introducând parametrul adimensional definit de relația (4.44):

$$N'_c(x) = C'_1 \cdot ch(\alpha \xi L) + C'_2 \cdot sh(\alpha \xi L) + \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left[M_i(\xi - 1) + M_j \xi + \frac{P}{2} \xi L \right] \rightarrow x \leq \frac{L}{2} \quad (4.53)$$

$$N_c''(x) = C_1'' \cdot ch(\alpha \xi L) + C_2'' \cdot sh(\alpha \xi L) + \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left[M_i(\xi - 1) + M_j \xi - \frac{P}{2} \xi L + \frac{PL}{2} \right] \rightarrow x \geq \frac{L}{2}$$

Cele patru constante de integrare se vor determina în secțiunile următoare în funcție de condițiile specifice fiecărei scheme statice adoptate.

4.2.2.4 Element de bară plan supus acțiunii momentelor încovoietoare nodale și a două forțe concentrate

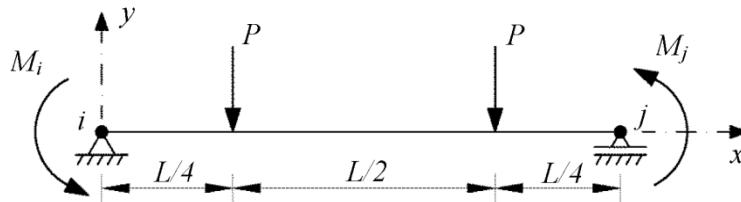


Fig. 4.6 Element de bară supus acțiunii momentelor încovoietoare nodale și forțelor concentrate P

Fie elementul de bară plan, în sistemul coordonatelor de bază, solicitat de momentele încovoietoare nodale M_i și M_j și două forțe concentrate, ca în Fig. 4.6. Variația momentului încovoietor în lungul elementului pentru acest caz particular de încărcare poate fi exprimată prin intermediul următoarelor relații:

$$M(x) = \begin{cases} \frac{M_i + M_j}{L} x - M_i + Px \rightarrow x \leq \frac{L}{4} \\ \frac{M_i + M_j}{L} x - M_i + \frac{PL}{4} \rightarrow \frac{L}{4} \leq x \leq \frac{3L}{4} \\ \frac{M_i + M_j}{L} x - M_i + P(L - x) \rightarrow x \geq \frac{3L}{4} \end{cases} \quad (4.54)$$

Soluțiile particulare asociate fiecărui tronson de variație a momentului încovoietor sunt reprezentate de polinoame de gradul I de tipul celei prezentate în relația (4.41). Înlocuind expresiile soluțiilor particulare în ecuația diferențială (4.18), se deduc constantele A și B aferente fiecărei soluții particulare. Cu aceste constante determinate, efortul axial din dala de beton, pentru fiecare tronson de variație a momentului încovoietor, se scrie astfel:

$$\begin{aligned} N_c'(x) &= C_1' \cdot ch(\alpha x) + C_2' \cdot sh(\alpha x) + \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left(\frac{M_i + M_j}{L} x - M_i + P \cdot x \right) \rightarrow x \leq \frac{L}{4} \\ N_c''(x) &= C_1'' \cdot ch(\alpha x) + C_2'' \cdot sh(\alpha x) + \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left(\frac{M_i + M_j}{L} x - M_i + \frac{PL}{4} \right) \rightarrow \frac{L}{4} \leq x \leq \frac{3L}{4} \\ N_c'''(x) &= C_1''' \cdot ch(\alpha x) + C_2''' \cdot sh(\alpha x) + \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left(\frac{M_i + M_j}{L} x - M_i - P \cdot x + PL \right) \rightarrow x \geq \frac{3L}{4} \end{aligned} \quad (4.55)$$

Folosind parametrul adimensional ξ definit cu relația (4.44) soluțiile descrise de relațiile (4.58) pot fi scrise într-o nouă formă astfel:

$$N_c'(x) = C_1' \cdot ch(\alpha \xi L) + C_2' \cdot sh(\alpha \xi L) + \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} [M_i(\xi - 1) + M_j \xi + P \cdot \xi L] \rightarrow x \leq \frac{L}{4} \quad (4.56)$$

$$N_c''(x) = C_1'' \cdot ch(\alpha \xi L) + C_2'' \cdot sh(\alpha \xi L) + \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left[M_i (\xi - 1) + M_j \xi + \frac{PL}{4} \right] \rightarrow \frac{L}{4} \leq x \leq \frac{3L}{4}$$

$$N_c'''(x) = C_1''' \cdot ch(\alpha \xi L) + C_2''' \cdot sh(\alpha \xi L) + \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left[M_i (\xi - 1) + M_j \xi - P \xi L + PL \right] \rightarrow x \geq \frac{3L}{4}$$

Cele șase constante de integrare se vor determina în secțiunile următoare în funcție de condițiile specifice fiecărei scheme statice adoptate.

Trebuie remarcat că dintre toate cazurile de încărcare studiate, doar în situația aplicării unei sarcini uniform distribuite, soluția particulară depinde și de valoarea parametrului α ce ține seama de nivelul de interacțiune dintre componentele elementului (a se vedea relația 4.49). În celelalte cazuri, soluția particulară depinde doar de caracteristicile secționale și de expresia momentului încovoietor din secțiunea curentă de calcul.

Soluții ale ecuației diferențiale (4.18) pot fi determinate similar și pentru alte cazuri de încărcare cu condiția cunoașterii variației momentului încovoietor în lungul elementului.

4.2.3 Determinarea constantelor de integrare

Constantele de integrare, din soluția ecuației diferențiale, se determină în funcție de condițiile de rezemare ale elementului de bară, datorită particularităților ce se desprind în punctele caracteristice corespunzătoare fiecărui caz particular de rezemare. Astfel, în continuare se vor calcula constatele de integrare pentru două cazuri de rezemare des întâlnite:

4.2.3.1 Grinda dublu încastrată

În acest caz particular de rezemare, constantele de integrare se vor determina impunând condiția de lunecare relativă zero între dala de beton și profilul metalic, la capetele elementului. Evident aceste condiții sunt ipotetice, deoarece în realitate se produc lunecări relative la capetele elementului dublu încastrat. Totuși, aceste condiții sunt acceptate și utilizate de comunitatea științifică [60,61] deoarece erorile introduse sunt neglijabile având în vedere că valorile lunecărilor în secțiunile de încastrare sunt mici comparativ cu cele din lungul elementului. Astfel:

$$\begin{aligned} s|_{x=0} &= 0; \\ s|_{x=L} &= 0; \end{aligned} \tag{4.57}$$

În baza relației (4.4), consecințele acestor condiții se restrâng asupra valorii primei derivate a efortului axial din dala de beton în secțiunile de la capetele grinzii, astfel:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dN_c}{dx} \right|_{x=0} &= 0; \\ \left. \frac{dN_c}{dx} \right|_{x=L} &= 0; \end{aligned} \tag{4.58}$$

Folosind condițiile (4.58) se determină constantele de integrare pentru cazurile particulare de încărcare pentru care s-au determinat soluțiile ecuației diferențiale. Astfel pentru:

- Elementul de bară plan supus acțiunii momentelor încovoietoare nodale:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \frac{M_i + M_j}{L} \frac{ch(\alpha L) - 1}{sh(\alpha L)}; \\
C_2 &= -\frac{1}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \frac{M_i + M_j}{L};
\end{aligned}
\tag{4.59}$$

- Elementul de bară plan supus acțiunii momentelor încovoietoare nodale și a unei sarcini uniform distribuite:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left[\frac{M_i + M_j}{L} \frac{ch(\alpha L) - 1}{sh(\alpha L)} + \frac{qL}{2} \frac{ch(\alpha L) + 1}{sh(\alpha L)} \right]; \\
C_2 &= -\frac{1}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left(\frac{M_i + M_j}{L} + \frac{qL}{2} \right);
\end{aligned}
\tag{4.60}$$

- Elementul de bară plan supus acțiunii momentelor încovoietoare nodale și a unei forțe concentrate la mijlocul deschiderii

Pentru acest caz particular de încărcare, în care expresia momentului încovoietor variază funcție de poziția secțiunii curente x (înainte sau după punctul de aplicare a forței concentrate), pentru determinarea constantelor de integrare este necesară impunerea unor condiții suplimentare de compatibilitate a efortului axial din dala de beton și a primei derivate a acestuia, la stânga respectiv dreapta punctului de aplicarea a încărcării concentrate:

$$\begin{aligned}
N'_c \Big|_{x=\frac{L}{2}} &= N''_c \Big|_{x=\frac{L}{2}}; \\
\frac{dN'_c}{dx} \Big|_{x=\frac{L}{2}} &= \frac{dN''_c}{dx} \Big|_{x=\frac{L}{2}};
\end{aligned}
\tag{4.61}$$

Impunând aceste condiții se obțin patru constante de integrare, primele două caracterizând variația efortului axial în dala de beton în orice secțiune x , aparținând primei jumătăți din lungimea elementului, iar ultimele două sunt folosite pentru evaluarea efortului axial din componenta de beton, într-o secțiune localizată după punctul de aplicarea a forței P :

$$\begin{aligned}
C'_1 &= \frac{1}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left[\frac{M_i + M_j}{L} \frac{sh\left(\frac{\alpha L}{2}\right)}{ch\left(\frac{\alpha L}{2}\right)} + P \frac{ch^2\left(\frac{\alpha L}{2}\right) - ch\left(\frac{\alpha L}{2}\right)}{sh(\alpha L)} \right]; \\
C'_2 &= -\frac{1}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left(\frac{M_i + M_j}{L} + \frac{P}{2} \right); \\
C''_1 &= \frac{1}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left[\frac{M_i + M_j}{L} \frac{ch(\alpha L) - 1}{sh(\alpha L)} + \frac{P}{2} \left(\frac{ch(\alpha L) + 1}{sh(\alpha L)} - \frac{ch\left(\frac{\alpha L}{2}\right)}{sh\left(\frac{\alpha L}{2}\right)} \right) \right];
\end{aligned}
\tag{4.62}$$

$$C_2'' = -\frac{1}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left[\frac{M_i + M_j}{L} + \frac{P}{2} \left(1 - \frac{sh(\alpha L)}{sh\left(\frac{\alpha L}{2}\right)} \right) \right];$$

- Elementul de bară plan supus acțiunii momentelor încovoietoare nodale și a două forțe concentrate

Asemănător situației precedente, și în acest caz, pentru determinarea celor șase constante de integrare ce caracterizează efortului axial din dala de beton pe cele trei tronsoane de variație a momentului încovoietor, este necesară impunerea unor condiții suplimentare de compatibilitate a efortului axial din dala de beton și a primei derivate a acestuia în secțiunile în care sunt aplicate forțele concentrate. Cele patru relații suplimentare de constrângere sunt:

$$\begin{aligned} N_c' \Big|_{x=\frac{L}{4}} &= N_c'' \Big|_{x=\frac{L}{4}}; \\ \frac{dN_c'}{dx} \Big|_{x=\frac{L}{4}} &= \frac{dN_c''}{dx} \Big|_{x=\frac{L}{4}}; \\ N_c'' \Big|_{x=\frac{3L}{4}} &= N_c''' \Big|_{x=\frac{3L}{4}}; \\ \frac{dN_c''}{dx} \Big|_{x=\frac{3L}{4}} &= \frac{dN_c'''}{dx} \Big|_{x=\frac{3L}{4}}; \end{aligned} \quad (4.63)$$

În baza soluției generale (4.55) și a condițiilor (4.58) respectiv (4.63) se formează un sistem cu șase ecuații a cărui soluție definește constantele de integrare pentru cazul curent de rezemare:

$$\begin{aligned} C_1' &= \frac{1}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left[\frac{M_i + M_j}{L} \frac{ch(\alpha L) - 1}{sh(\alpha L)} + P \frac{ch(\alpha L) - ch\left(\frac{\alpha L}{4}\right) - 2ch\left(\frac{\alpha L}{2}\right)}{sh(\alpha L)} \right]; \\ C_2' &= -\frac{1}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left(\frac{M_i + M_j}{L} + P \right); \\ C_1'' &= \frac{1}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left[\frac{M_i + M_j}{L} \frac{ch(\alpha L) - 1}{sh(\alpha L)} - P \frac{ch\left(\frac{\alpha L}{4}\right) + 1}{sh(\alpha L)} \right]; \\ C_2'' &= -\frac{1}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \frac{M_i + M_j}{L}; \\ C_1''' &= \frac{1}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left[\frac{M_i + M_j}{L} \frac{ch(\alpha L) - 1}{sh(\alpha L)} - P \frac{ch\left(\frac{3\alpha L}{4}\right)ch(\alpha L) + 1}{sh(\alpha L)} \right]; \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$C_2''' = -\frac{1}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left[\frac{M_i + M_j}{L} - P \cdot ch\left(\frac{3\alpha L}{4}\right) \right];$$

Pentru alte condiții de încărcare ale grinzii dublu încastrate, se procedează în mod asemănător pentru determinarea constantelor de integrare, însă se observă că obținerea și forma acestora devine tot mai complicată.

4.2.3.2 Grinda simplu rezemată

Maniera de stabilirea a constantelor de integrare în cazul grinzii simplu rezemate este similar cu cel prezentat pentru cazul precedent de rezemare, cu mențiunea că în această situație condițiile inițiale derivă din considerarea momentelor încovoietoare nule la extremitățile elementului simplu rezemat. Prin urmare, în baza relației (4.11), și efortul axial din dala de beton este nul în secțiunile corespunzătoare punctelor de rezemare. Aceste condiții pot fi exprimate sintetic astfel:

$$\begin{aligned} N_c|_{x=0} &= 0; \\ N_c|_{x=L} &= 0; \end{aligned} \tag{4.65}$$

În baza restricțiilor (4.65) se precizează constantele de integrare pentru cazurile de încărcare studiate. Astfel pentru:

- Elementul de bară plan supus acțiunii unei sarcini uniform distribuite:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{q}{\alpha^2} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty}; \\ C_2 &= \frac{q}{\alpha^2} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \frac{1 - ch(\alpha L)}{sh(\alpha L)}; \end{aligned} \tag{4.66}$$

- Elementul de bară plan supus acțiunii unei forțe concentrate la mijlocul deschiderii:

Determinarea constantelor de integrare pentru acest caz de încărcare necesită, ca și în cazul grinzii dublu încastrate, impunerea condițiilor de compatibilitate (4.61), obținându-se astfel patru constanțe de integrare:

$$\begin{aligned} C_1' &= 0; \\ C_2' &= -\frac{P}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \frac{sh\left(\frac{\alpha L}{2}\right)}{sh(\alpha L)}; \\ C_1'' &= -\frac{P}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} sh\left(\frac{\alpha L}{2}\right); \\ C_2'' &= \frac{P}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} sh\left(\frac{\alpha L}{2}\right) \frac{ch(\alpha L)}{sh(\alpha L)}; \end{aligned} \tag{4.67}$$

- Elementul de bară plan supus acțiunii momentelor încovoietoare nodale și a două forțe concentrate

Impunând condițiile de capăt (4.65) respectiv cele de compatibilitate (4.63) se obțin următoarele șase constante de integrare:

$$\begin{aligned}
 C'_1 &= 0; \\
 C'_2 &= -\frac{P r \cdot (\overline{EA})}{\alpha (EI)^\infty} \frac{sh\left(\frac{\alpha L}{4}\right) + sh\left(\frac{3\alpha L}{4}\right)}{sh(\alpha L)}; \\
 C''_1 &= -\frac{P r \cdot (\overline{EA})}{\alpha (EI)^\infty} sh\left(\frac{\alpha L}{4}\right); \\
 C''_2 &= \frac{P r \cdot (\overline{EA})}{\alpha (EI)^\infty} \frac{sh\left(\frac{\alpha L}{4}\right) [ch(\alpha L) - 1]}{sh(\alpha L)}; \\
 C'''_1 &= -\frac{P r \cdot (\overline{EA})}{\alpha (EI)^\infty} \left[sh\left(\frac{\alpha L}{4}\right) + sh\left(\frac{3\alpha L}{4}\right) \right]; \\
 C'''_2 &= \frac{P r \cdot (\overline{EA})}{\alpha (EI)^\infty} \left[sh\left(\frac{\alpha L}{4}\right) + sh\left(\frac{3\alpha L}{4}\right) \right] \frac{ch(\alpha L)}{sh(\alpha L)};
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

4.2.4 Soluția generală a ecuației diferențiale pentru cazurile studiate

În secțiunile anterioare s-a descris modul de soluționare a ecuației diferențiale și s-au determinat constantele de integrare corespunzătoare condițiilor de rezemare și încărcare studiate urmând ca în cadrul acestui subcapitol să se scrie expresiile efortului axial din componenta de beton (soluția generală a ecuației diferențiale) pentru fiecare din cazurile analizate. Mai mult, expresia efortului axial din dala de beton se va exprima și în funcție de efortul axial corespunzător interacțiunii totale (N_{cf}) dintre componenta de beton și cea de oțel. În acest scop se folosește relația, dintre N_{cf} și momentul încovoietor, aferentă domeniului elastic de solicitare, relație dedusă în Capitolul 5, în secțiunea corespunzătoare analizei la nivel de secțiune în condițiile interacțiunii totale dintre componente:

$$N_{cf}(x) = M(x) \frac{r(\overline{EA})}{(EI)^\infty}; \tag{4.69}$$

În acest fel, se poate pune în evidență variația efortului axial din dala de beton în funcție de efortul axial din componenta de beton aferent interacțiunii totale:

$$N_c(x) = N_{cf}(x) \cdot f(\alpha L); \tag{4.70}$$

unde, $f(\alpha L)$ este o funcție ce depinde de rigiditatea conexiunii și implicit de gradul de conectare și de lungimea elementului, admitând valori subunitare. La limita, dacă nu se dispun dispozitive de conectare la interfața de contact dintre beton și oțel, valoarea funcției $f(\alpha L)=0$, iar la cealaltă extremă, $f(\alpha L)=1$ corespunde cazului în care interacțiunea dintre beton și oțel este totală, deci nu se produc alunecări relative între cele două componente, acest caz fiind practic imposibil de obținut.

4.2.4.1 Grinda dublu încastrată

- Elementul de bară plan supus acțiunii momentelor încovoietoare nodale:

$$N_c(x) = \frac{1}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \frac{M_i + M_j}{L} \frac{ch(\alpha L) - 1}{sh(\alpha L)} \cdot ch(\alpha x) - \frac{1}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \frac{M_i + M_j}{L} \cdot sh(\alpha x) + \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left(\frac{M_i + M_j}{L} x - M_i \right); \quad (4.71)$$

sau, utilizând relația (4.70):

$$N_c(x) = N_{cf}(x) \left[1 + \frac{1}{\alpha \cdot M(x)} \frac{M_i + M_j}{L} \frac{ch(\alpha L - \alpha x) - ch(\alpha x)}{sh(\alpha L)} \right]; \quad (4.72)$$

unde $N_{cf}(x)$ reprezintă efortul axial din dala de beton în secțiunea curentă x asociat interacțiunii perfecte dintre componente.

- Elementul de bară plan supus acțiunii unei sarcini uniforme distribuite:

$$N_c(x) = \frac{1}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left[\frac{M_i + M_j}{L} \frac{ch(\alpha L) - 1}{sh(\alpha L)} + \frac{qL}{2} \frac{ch(\alpha L) + 1}{sh(\alpha L)} \right] \cdot ch(\alpha x) - \frac{1}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left(\frac{M_i + M_j}{L} + \frac{qL}{2} \right) \cdot sh(\alpha x) + \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left(\frac{M_i + M_j}{L} x - M_i - \frac{q}{2} x^2 + \frac{qL}{2} x - \frac{q}{\alpha^2} \right); \quad (4.73)$$

sau, punând în evidență efortul axial din dala de beton aferent conexiunii perfecte:

$$N_c(x) = N_{cf}(x) \left[1 - \frac{q}{\alpha^2 \cdot M(x)} + \frac{1}{\alpha \cdot M(x)} \left(\frac{M_i + M_j}{L} \frac{ch(\alpha L - \alpha x) - ch(\alpha x)}{sh(\alpha L)} + \frac{qL}{2} \frac{ch(\alpha L - \alpha x) + ch(\alpha x)}{sh(\alpha L)} \right) \right]; \quad (4.74)$$

- Elementul de bară plan supus acțiunii unei forțe concentrate la mijlocul deschiderii

Pentru acest caz de încărcare se vor prezenta două expresii ale efortului axial din dala de beton, corespunzătoare celor două tronsoane de variație ale momentului încovoietor:

$$N'_c(x) = \frac{1}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left(\frac{M_i + M_j}{L} \frac{sh\left(\frac{\alpha L}{2}\right)}{ch\left(\frac{\alpha L}{2}\right)} + P \frac{ch^2\left(\frac{\alpha L}{2}\right) - ch\left(\frac{\alpha L}{2}\right)}{sh(\alpha L)} \right) \cdot ch(\alpha x) - \frac{1}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left(\frac{M_i + M_j}{L} + \frac{P}{2} \right) \cdot sh(\alpha x) + \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left(\frac{M_i + M_j}{L} x - M_i + \frac{P}{2} x \right), \quad x \leq \frac{L}{2}; \quad (4.75)$$

$$\begin{aligned}
N_c''(x) = & \frac{1}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left[\frac{M_i + M_j}{L} \frac{ch(\alpha L) - 1}{sh(\alpha L)} + \frac{P}{2} \left(\frac{ch(\alpha L) + 1}{sh(\alpha L)} - \frac{ch(\alpha L)}{sh\left(\frac{\alpha L}{2}\right)} \right) \right] \cdot ch(\alpha x) - \\
& - \frac{1}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left[\frac{M_i + M_j}{L} + \frac{P}{2} \left(1 - \frac{sh(\alpha L)}{sh\left(\frac{\alpha L}{2}\right)} \right) \right] \cdot sh(\alpha x) + \\
& + \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left(\frac{M_i + M_j}{L} x - M_i - \frac{P}{2} x + \frac{PL}{2} \right), \quad x \geq \frac{L}{2};
\end{aligned}$$

sau, în baza relației (4.70):

$$\begin{aligned}
N_c'(x) = N_{cf}'(x) & \left[1 + \frac{1}{\alpha \cdot M(x)} \left(\frac{M_i + M_j}{L} \frac{sh\left(\frac{\alpha L}{2} - \alpha x\right)}{ch\left(\frac{\alpha L}{2}\right)} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{P}{2} \frac{ch(\alpha L - \alpha x) + ch(\alpha x) \cdot \left(1 - 2ch\left(\frac{\alpha L}{2}\right)\right)}{sh(\alpha L)} \right) \right], \quad x \leq \frac{L}{2}; \\
N_c''(x) = N_{cf}''(x) & \left[1 + \frac{1}{\alpha \cdot M(x)} \left(\frac{M_i + M_j}{L} \frac{ch(\alpha L - \alpha x) - ch(\alpha x)}{sh(\alpha L)} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{P}{2} \left(\frac{ch(\alpha L - \alpha x) + ch(\alpha x)}{sh(\alpha L)} - \frac{ch(\alpha L - \alpha x)}{sh\left(\frac{\alpha L}{2}\right)} \right) \right) \right], \quad x \geq \frac{L}{2};
\end{aligned} \tag{4.76}$$

- Elementul de bară plan supus acțiunii a două forțe concentrate

Similar situației precedente, se vor preciza trei expresii ale variației efortului axial din dala de beton, ținând cont de soluțiile generale (4.55) și de constantele de integrare (4.64):

$$\begin{aligned}
N_c'(x) = & \frac{1}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left[\frac{M_i + M_j}{L} \frac{ch(\alpha L) - 1}{sh(\alpha L)} + P \frac{ch(\alpha L) - ch\left(\frac{\alpha L}{4}\right) - 2ch\left(\frac{\alpha L}{2}\right)}{sh(\alpha L)} \right] \cdot ch(\alpha x) - \\
& - \frac{1}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left(\frac{M_i + M_j}{L} + P \right) \cdot sh(\alpha x) + \\
& + \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left(\frac{M_i + M_j}{L} x - M_i + Px \right), \quad x \leq \frac{L}{4};
\end{aligned} \tag{4.77}$$

$$\begin{aligned}
N_c''(x) &= \frac{1}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left[\frac{M_i + M_j}{L} \frac{ch(\alpha L) - 1}{sh(\alpha L)} - P \frac{ch\left(\frac{\alpha L}{4}\right) + 1}{sh(\alpha L)} \right] \cdot ch(\alpha x) - \\
&\quad - \frac{1}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \frac{M_i + M_j}{L} \cdot sh(\alpha x) + \\
&\quad + \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left(\frac{M_i + M_j}{L} x - M_i + \frac{PL}{4} \right), \quad \frac{L}{4} \leq x \leq \frac{3L}{4}; \\
N_c'''(x) &= \frac{1}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left[\frac{M_i + M_j}{L} \frac{ch(\alpha L) - 1}{sh(\alpha L)} - P \frac{ch\left(\frac{3\alpha L}{4}\right) ch(\alpha L) + 1}{sh(\alpha L)} \right] \cdot ch(\alpha x) - \\
&\quad - \frac{1}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left[\frac{M_i + M_j}{L} - P \cdot ch\left(\frac{3\alpha L}{4}\right) \right] \cdot sh(\alpha x) + \\
&\quad + \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left(\frac{M_i + M_j}{L} x - M_i - Px + PL \right), \quad x \geq \frac{3L}{4};
\end{aligned}$$

sau, punând în evidență efortul axial din dala de beton aferent conexiunii perfecte:

$$\begin{aligned}
N_c'(x) &= N_{cf}'(x) \left\{ 1 + \frac{1}{\alpha \cdot M(x)} \left[\frac{M_i + M_j}{L} \frac{ch(\alpha L - \alpha x) - ch(\alpha x)}{sh(\alpha L)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + P \frac{ch(\alpha L - \alpha x) - ch(\alpha x) \left(ch\left(\frac{\alpha L}{4}\right) + 2ch\left(\frac{\alpha L}{2}\right) \right)}{sh(\alpha L)} \right] \right\}, \quad x \leq \frac{L}{4};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_c''(x) &= N_{cf}''(x) \left\{ 1 + \frac{1}{\alpha \cdot M(x)} \left[\frac{M_i + M_j}{L} \frac{ch(\alpha L - \alpha x) - ch(\alpha x)}{sh(\alpha L)} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - P \frac{ch(\alpha x) \left(ch\left(\frac{\alpha L}{4}\right) + 1 \right)}{sh(\alpha L)} \right] \right\}, \quad \frac{L}{4} \leq x \leq \frac{3L}{4};
\end{aligned} \tag{4.78}$$

$$\begin{aligned}
N_c'''(x) &= N_{cf}'''(x) \left\{ 1 + \frac{1}{\alpha \cdot M(x)} \left[\frac{M_i + M_j}{L} \frac{ch(\alpha L - \alpha x) - ch(\alpha x)}{sh(\alpha L)} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - P \frac{ch(\alpha L - \alpha x) \cdot ch\left(\frac{3\alpha L}{4}\right) + ch(\alpha x)}{sh(\alpha L)} \right] \right\}, \quad x \geq \frac{3L}{4};
\end{aligned}$$

4.2.4.2 Grinda simplu rezemată

- Elementul de bară plan supus acțiunii unei sarcini uniform distribuite:

Cuplând soluția generală pentru acest caz de încărcare (4.49) cu constantele (4.66) determinate pentru grinda simplu rezemată:

$$N_c(x) = \frac{q}{\alpha^2} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \cdot ch(\alpha x) + \frac{q}{\alpha^2} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \frac{1 - ch(\alpha L)}{sh(\alpha L)} \cdot sh(\alpha x) + \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left(-\frac{q}{2} x^2 + \frac{qL}{2} x - \frac{q}{\alpha^2} \right); \quad (4.79)$$

sau, în baza relației (4.70):

$$N_c(x) = N_{cf}(x) \left[1 + \frac{q}{\alpha^2 \cdot M(x)} \left(\frac{sh(\alpha L - \alpha x) + sh(\alpha x)}{sh(\alpha L)} - 1 \right) \right]; \quad (4.80)$$

- Elementul de bară plan supus acțiunii unei forțe concentrate la mijlocul deschiderii

Cele două relații ce descriu variația efortului axial din dala de beton se obțin combinând soluțiile generale (4.52) cu constantele (4.67):

$$N'_c(x) = -\frac{P}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} sh\left(\frac{\alpha L}{2}\right) \frac{sh(\alpha x)}{sh(\alpha L)} + \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \frac{P}{2} x, \quad x \leq \frac{L}{2}; \quad (4.81)$$

$$N''_c(x) = -\frac{P}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} sh\left(\frac{\alpha L}{2}\right) \frac{sh(\alpha L - \alpha x)}{sh(\alpha L)} + \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \left(-\frac{P}{2} x + \frac{PL}{2} \right), \quad x \geq \frac{L}{2};$$

sau, punând în evidență efortul axial din dala de beton aferent conexiunii perfecte:

$$N'_c(x) = N'_{cf}(x) \left[1 - \frac{P}{\alpha \cdot M(x)} \frac{sh(\alpha x)}{sh(\alpha L)} sh\left(\frac{\alpha L}{2}\right) \right], \quad x \leq \frac{L}{2}; \quad (4.82)$$

$$N''_c(x) = N''_{cf}(x) \left[1 - \frac{P}{\alpha \cdot M(x)} \frac{sh(\alpha L - \alpha x)}{sh(\alpha L)} sh\left(\frac{\alpha L}{2}\right) \right], \quad x \geq \frac{L}{2};$$

- Elementul de bară plan supus acțiunii a două forțe concentrate

Expresiile efortului axial pe cele trei tronsoane independente de variație a momentului încovoietor $M(x)$, se obțin înlocuind constantele de integrare definite prin relațiile (4.68) în soluțiile generale (4.55):

$$N'_c(x) = -\frac{P}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \frac{sh(\alpha x)}{sh(\alpha L)} \left[sh\left(\frac{\alpha L}{4}\right) + sh\left(\frac{3\alpha L}{4}\right) \right] + \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} Px, \quad x \leq \frac{L}{4};$$

$$N''_c(x) = -\frac{P}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \frac{sh(\alpha L - \alpha x) + sh(\alpha x)}{sh(\alpha L)} sh\left(\frac{\alpha L}{4}\right) + \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \frac{PL}{4}, \quad \frac{L}{4} \leq x \leq \frac{3L}{4}; \quad (4.83)$$

$$N'''_c(x) = -\frac{P}{\alpha} \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} \frac{sh(\alpha L - \alpha x)}{sh(\alpha L)} \left[sh\left(\frac{\alpha L}{4}\right) + sh\left(\frac{3\alpha L}{4}\right) \right] + \frac{r \cdot (\overline{EA})}{(EI)^\infty} (PL - Px), \quad x \geq \frac{3L}{4};$$

sau, în baza relației (4.70):

$$\begin{aligned}
 N'_c(x) &= N'_{cf}(x) \left\{ 1 - \frac{P}{\alpha \cdot M(x)} \frac{sh(\alpha x)}{sh(\alpha L)} \left[sh\left(\frac{\alpha L}{4}\right) + sh\left(\frac{3\alpha L}{4}\right) \right] \right\}, & x \leq \frac{L}{4}; \\
 N''_c(x) &= N''_{cf}(x) \left[1 - \frac{P}{\alpha \cdot M(x)} \frac{sh(\alpha L - \alpha x) + sh(\alpha x)}{sh(\alpha L)} sh\left(\frac{\alpha L}{4}\right) \right], & \frac{L}{4} \leq x \leq \frac{3L}{4}; \\
 N'''_c(x) &= N'''_{cf}(x) \left\{ 1 - \frac{P}{\alpha \cdot M(x)} \frac{sh(\alpha L - \alpha x)}{sh(\alpha L)} \left[sh\left(\frac{\alpha L}{4}\right) + sh\left(\frac{3\alpha L}{4}\right) \right] \right\}, & x \geq \frac{3L}{4};
 \end{aligned} \quad (4.84)$$

Se observă că în toate cazurile studiate, funcția $f(\alpha L)$, ce scalează valoarea efortului axial din dala de beton în ipoteza interacțiunii totale, pentru obținerea efortului axial în cazul interacțiunii incomplete, variază în lungul elementului funcție de poziția secțiunii curente x și de valoarea momentului încovoietor $M(x)$ aferent. Prin parametrul α definit prin relația (4.17) se iau în considerare efectele interacțiunii (și implicit a conectării) parțiale dintre placa de beton și grinda metalică asupra efortului axial din componenta de beton și implicit asupra răspunsului structural al elementului mixt. Deși relațiile prezentate în cadrul acestui capitol sunt valabile doar în limitele domeniului elastic de comportare a materialelor și conectorilor, această metodă este importantă deoarece ajută la conturarea vederii de ansamblu asupra comportării reale a grinzilor mixte cu interacțiune incompletă și furnizează relații "exacte" de calcul a săgeților acestor tipuri de elemente, spre deosebire de standardele de proiectare care propun relații aproximative de estimare a deplasărilor în condițiile conectării totale. Dezavantajul major al metodei prezentate constă în necesitatea particularizării soluției funcție de condițiile de rezemare și încărcare.

În cele ce urmează se prezintă sintetic câteva studii bazate pe relațiile descrise în cadrul acestui capitol. Primul studiu constă în calcularea săgeții unei grinzi mixte simplu rezemate supuse acțiunii unei forțe concentrate la mijlocul deschiderii și compararea rezultatelor cu cele obținute urmând prevederile de calcul propuse de norma europeană EC4 [1]. Schema statică și caracteristicile geometrice, a elementului mixt ce face obiectul acestui studiu, sunt prezentate în cadrul exemplului discutat în capitolul 3.

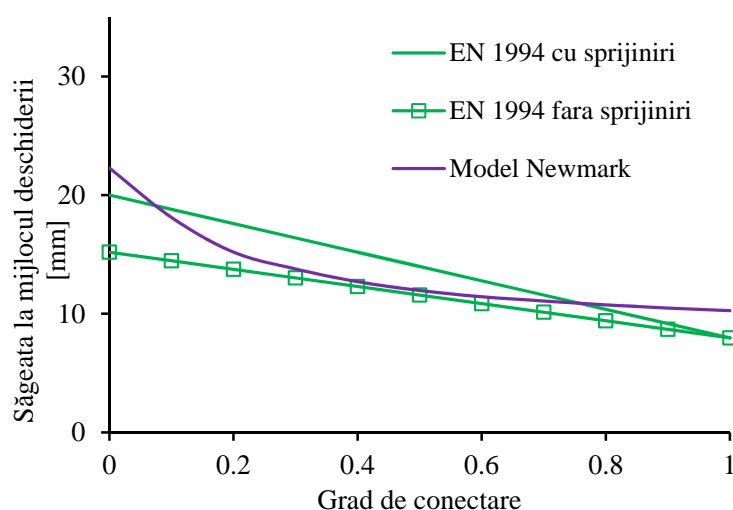


Fig. 4.7 Variația săgeții elastice maxime funcție de gradul de conectare

Fig. 4.7 prezintă comparativ săgețile obținute aplicând relația (4.21) respectiv cele determinate utilizând relațiile directe sugerate de norma EC4 pentru evaluarea săgeților în condițiile conectării parțiale. În calculul exact, bazat pe modelul Newmark [42], fiecărui grad de conectare i s-a asociat numărul corespunzător de conectori și s-a determinat distanța dintre aceștia, putându-se astfel calcula rigiditatea conexiunii k aferentă fiecărui nivel de conectare considerat. Se observă că relațiile propuse de codul EC4 evaluează doar în mod aproximativ săgeata elementului mixt cu conectare parțială, abaterile înregistrate în acest studiu fiind cuprinse între 3.5% și 22.4% în cazul utilizării sprijinirilor în faza de construcție, respectiv de 3.2% și 31.9% în lipsa acestora.

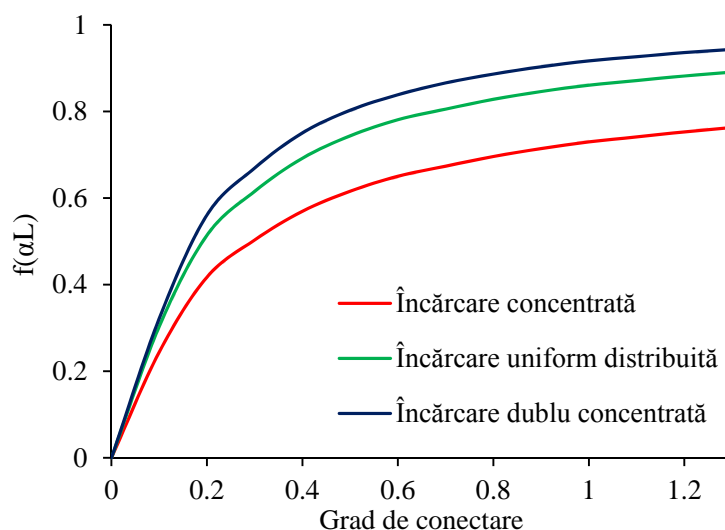


Fig. 4.8 Variația funcției $f(\alpha L)$ funcție de gradul de conectare

În cadrul celui de-al doilea studiu se prezintă variația funcției $f(\alpha L)$, ce scalează valoarea efortului axial din dala de beton în ipoteza interacțiunii totale, pentru obținerea efortului axial în situația interacțiunii incomplete, în funcție de gradul de conectare, pentru trei cazuri distincte de încărcare: concentrată la mijlocul deschiderii, uniform distribuită și concentrată în două puncte situate la distanța $L/4$ față de extremități (Fig. 4.8). Caracteristicile geometrice și mecanice utilizate în acest studiu sunt identice cu cele utilizate în studiul anterior. Trebuie menționat că pentru fiecare grad de conectare, în Fig. 4.8 s-a reprezentat valoare funcției $f(\alpha L)$ corespunzătoare secțiunii de la mijlocul elementului (secțiune cu moment încovoietor maxim). Se observă în toate cele trei cazuri că sporirea gradului de conectare și implicit a rigidității conexiunii duce la majorarea valorii funcției $f(\alpha L)$, aceasta apropiindu-se de valoarea teoretică unu aferentă interacțiunii totale. Trebuie remarcat că pentru valoarea unu a gradului de conectare (aferentă conectării totale) nu se obține valoarea unitară pentru funcția $f(\alpha L)$ ce corespunde interacțiunii totale, ceea ce întărește afirmația conform căreia gradul de conectare diferă de cel de interacțiune.

Fig. 4.9 prezintă rezultatele aceluiași studiu însă de această dată, axa orizontală indică valoarea parametrului αL asociată gradului de conectare din Fig. 4.8. Desigur, valori mari ale parametrului αL atrag după sine valori apropiate de valoarea de referință unu corespunzătoare interacțiunii complete.

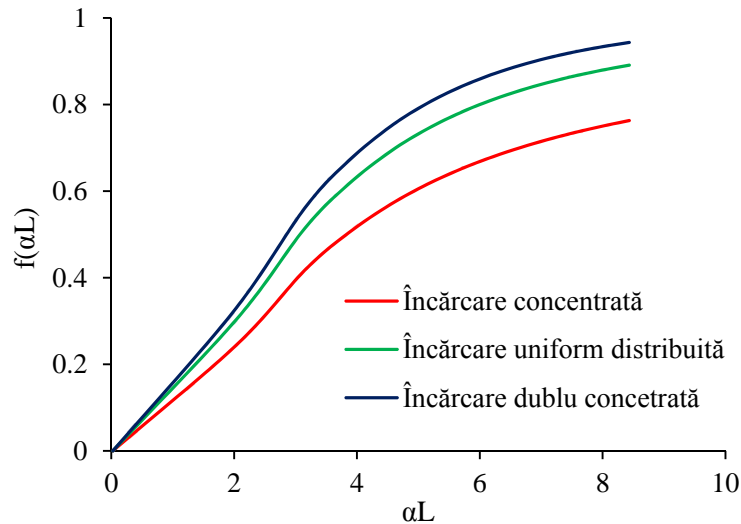


Fig. 4.9 Variația funcției $f(\alpha L)$ funcție parametrul αL

Variația funcției $f(\alpha L)$ în lungul elementului pentru cele trei cazuri de încărcare considerate în condițiile conectării totale (grad de conectare unitar) este ilustrată în Fig. 4.10. Se constată că variația funcției $f(\alpha L)$ în lungul elementului diferă de la un caz de încărcare la altul, o predicție riguroasă asupra modului de variație a efortului axial din dala de beton fiind astfel dificil de furnizat pentru alte cazuri de încărcare, fără determinarea în prealabil a soluției ecuației diferențiale de ordinul II.

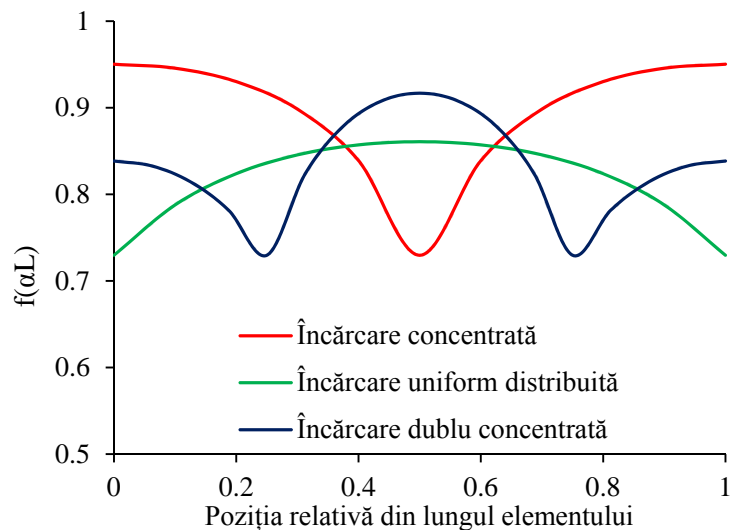


Fig. 4.10 Variația funcției $f(\alpha L)$ în lungul grinzii

Analizând în continuare Fig. 4.10 se constată că valorile funcției $f(\alpha L)$ pentru cazurile studiate aparțin intervalului 0.7-1.0 putându-se astfel pune în discuție considerarea în mod aproximativ a unei valori constante medii a acestei funcții pe întreaga lungime a elementului pentru evaluarea forței axiale în dala de beton fără însă a devia semnificativ de la valoarea reală a acestuia.

4.3 Concluzii parțiale

În cadrul acestui capitol a fost condusă o analiză riguroasă cu privire la modalitățile analitice de soluționare în domeniul elastic a răspunsului grinzilor compozite cu interacțiune parțială. Modelele discutate au la baza modelul Newmark [14], iar soluționarea ecuației diferențiale ce definește echilibrul la nivel de element a fost discutată luând în considerare diferite forme de exprimare a acesteia în funcție de modul de alegere a necunoscutei principale: deplasarea transversală, efortul axial din dala de beton, curbura sau lunecarea longitudinală. Studiul bazat pe rezolvarea ecuației diferențiale cu necunoscuta în forța axială din dala de beton a relevat faptul că acest efort poate fi exprimat ca o fracțiune a forței axiale asociate interacțiunii complete prin intermediul unei funcții $f(\alpha L)$, ce depinde de rigiditatea conexiunii (și implicit de gradul de conectare) și de lungimea elementului. Această observație deschide câmpul unei discuții cu privire la modalități aproximative de cuantificare a efectului acțiunii compozite în analiza liniară și neliniară a grinzilor mixte, ce urmează a fi fundamentată în cadrul capitolului următor al prezentei lucrări.

5 Formularea matematică a metodei de analiză propuse

5.1 Introducere

În ultimele decenii, structurile mixte oțel-beton au înregistrat o utilizare din ce în ce mai pronunțată datorită, în special, beneficiilor multiple care rezultă prin combinarea celor două materiale componente, oțel și beton. Oțelul structural, întins sau comprimat, posedă capacitate portantă și ductilitate ridicată, în timp ce betonul manifestă rigiditate ridicată când este comprimat. Caracterul compozit dintre beton și oțel este dobândit prin intermediul unor dispozitive de conectare (de exemplu gujoane), dispuse la interfața de contact dintre cele două componente. Elementul structural astfel obținut conferă rigiditate și capacitate portantă mărită, în comparație cu cea obținută prin utilizarea independentă a fiecărui material. În cazul grinzilor compozite oțel-beton, un aspect important asupra comportării structurale, este reprezentat de gradul de conectare dintre componentele elementului, concept definit și descris în detaliu, în capitolul 3 al prezentei lucrări. În ultimii ani, s-au înregistrat progrese semnificative în domeniul analizei neliniare a elementelor și structurilor mixte oțel-beton și integrarea acestora în programe ce au la bază conceptul de analiză neliniară avansată, ce presupune orice metodă de calcul global care poate descrie în mod satisfăcător rezistența, rigiditatea și stabilitatea globală a structurii, astfel încât verificarea individuală a fiecărui element component al structurii să nu mai fie necesară asigurând o mai realistă predicție a efectelor acțiunilor asupra structurilor și a performanțelor structurale ale acestora [10–13,60,103,108,109,111,128,129]. O asemenea metodă avansată de analiză trebuie să surprindă simultan cât mai adecvat toți factorii determinanți ce au impact direct asupra comportării de ansamblu a structurilor analizate, și anume: comportarea elasto-plastică a materialelor structurii în procesul de încărcare până la starea limită de cedare; considerarea interacțiunii eforturilor în plastificarea secțiunilor; efectele, locale ($P-\delta$) și globale ($P-\Delta$) de ordinul al doilea a neliniarității geometrice; comportarea neliniară a conexiunilor flexibile (semirigide) în cazul cadrelor metalice; imperfecțiunile geometrice, locale și globale, ale elementelor structurale și ale structurii; efectele imperfecțiunilor mecanice (tensiuni reziduale) asupra capacității portante a structurilor metalice; efectele deformațiilor din curgere lentă în cazul structurilor din beton armat. În literatura de specialitate actuală se disting o serie de metode și programe dedicate analizei grinzilor și structurilor mixte oțel-beton, cu conectare totală și parțială, capabile să descrie comportarea elastică și post-elastică a acestor structuri. Pe de-o parte, analiza structurilor mixte este condusă utilizând pachete comerciale de elemente finite, care pun la dispoziția cercetătorului elemente finite bi- și tri-dimensionale și dau posibilitatea definirii unor legi constitutive neliniare de material, însă prezintă dezavantajul necesității unei discretizări fine, care deseori implică timpi și resurse semnificative de calcul [74,78,82,90]. De cealaltă parte, elemente finite liniare (uni-dimensionale) coroborate cu modele de plasticitate concentrată sau distribuită, au fost dezvoltate pentru analiza neliniară a grinzilor mixte. În cadrul acestor procedee, componenta metalică respectiv cea de beton, se modelează independent, iar legătura dintre acestea se descrie explicit prin grade de libertate suplimentare care iau în considerare alunecarea relativă dintre componentele elementului [10,54,58,59,103,106,108,116,117,121,130]. Proceduri analitice bazate pe modelul *Newmark* [14,42], au fost propuse în ultimii ani pentru analiza

statică a grinzilor compozite cu interacțiune parțială ignorând însă efectul deformațiilor de lunecare [46–48,54,59]. Modele bazate pe teoria *Timoshenko* [131], cu luarea în considerare a efectelor deformațiilor de lunecare asupra răspunsului liniar și neliniar al grinzilor cu interacțiune parțială sunt descrise în [68,102,103,127]. Mai mult, modelele bazate pe elemente finite, pot fi divizate în modele care iau în considerare conexiunea discretă dintre dala de beton și grinda metalică (prin resorturi elastice dispuse în punctele de localizare a conectorilor) [121,132], respectiv în modele care iau în considerare o conexiunea continuă între componente (conexiunea modelată prin intermediul unei rigidități echivalente) [104,119].

Modelele de analiză care iau în considerare plasticizarea distribuită a elementelor cu conectare parțială pot fi divizate în trei mari categorii. În prima categorie, starea de deformație din interiorul barei este determinată pe baza câmpului de deplasări generat în funcție de deplasările nodurilor de la capetele elementelor finite (interpolarea deplasărilor), acuratețea rezultatelor fiind influențată în mod direct de numărul de elemente în care este discretizată bara [104,106]. Cea de-a doua categorie cuprinde proceduri în care starea de deformație din interiorul elementului este determinată pe baza condiției de echilibru static al eforturilor exterioare și interioare pe secțiune (interpolarea eforturilor) [116], în timp ce ultima categorie este reprezentată de metode ce au la baza formulări hibride între clasele de proceduri descrise anterior [115,117,119,121]. În cadrul fiecărei categorii mai sus menționate, includerea deplasărilor independente a componentei de beton și a celei metalice (cazul interacțiunii parțiale), la interfața de contact dintre ele, necesită grade de libertate suplimentare la capetele elementelor finite, conducând astfel la creșterea semnificativă a timpilor de calcul, mai ales în cazul analizei structurilor de mari dimensiuni.

Deși tehnica de calcul cunoaște în prezent un ritm alert de dezvoltare și perfecționare, trecerea calculului complex din domeniul cercetării, care își permite să consume timp nelimitat de calculator, în cel al proiectării curente, la care timpul efectiv de analiză consumat este principalul criteriu de eficiență al programului, reprezintă astăzi una din principalele direcții de cercetare [133]. Pasul de la cercetare la utilizarea curentă în birourile de proiectare nu este încă făcut, fiind necesară elaborarea unor programe de calcul suficient de exacte pentru a nu altera rezultatele, dar în același timp și suficient de simple pentru o utilizare curentă de către proiectanții de structuri [133].

În acest context, lucrarea de față prezintă o metodă și un program de calcul pentru analiza avansată care să permită abordarea structurilor în cadre compozite oțel-beton, cu considerarea interacțiunii (și implicit a conectării) parțiale specifice grinzilor compozite, cu un efort computațional rezonabil și care să devină un instrument eficace și rapid pentru proiectarea curentă a structurilor. Adoptând un procedeu de calcul incremental-iterativ în analiza inelastică se ține seama de efectul plasticizării materialului structurii, în cea mai evoluată formă, considerându-se variația continuă a rigidității structurii în raport cu dezvoltarea zonelor de plasticizare în lungul barelor în funcție de nivelul de solicitare a acestora, considerându-se relațiile constitutive neliniare σ - ε pentru modelarea neliniarității fizice la nivel de fibră. Efectul dezvoltării graduale a zonelor plastice în secțiunile din lungul barei precum și a imperfecțiunilor mecanice (tensiuni reziduale în cazul secțiunilor metalice) asupra rigidității de ansamblu a barelor și implicit a structurii este luat în considerare în mod explicit în aceasta abordare.

Efectele conexiunii parțiale dintre dala de beton și profilul metalic al unei grinzi compozite, sunt luate în considerare printr-un procedeu inovativ, prin introducerea, în mod aproximativ, a unui efort axial în dala de beton ca funcție de gradul efectiv de conexiune asociat elementului de grindă. Efortul axial interior asociat dalei de beton, în ipoteza conexiunii parțiale, este considerat a fi o fracțiune din efortul axial din dala de beton în ipoteza conexiunii totale. Această formulare este bazată pe ipoteza conform căreia distribuția efortului axial din dala de beton, în orice secțiune transversală din lungul grinzii, este cunoscută și poate fi estimată în funcție de gradul de conexiune efectiv al elementului analizat. Astfel, răspunsul nelinier la nivel de secțiune poate fi determinat în baza a trei ecuații de echilibru, așa cum se va arată în secțiunile următoare. În consecință, dezvoltarea graduală a zonelor plastice pe înălțimea secțiunii transversale, supuse acțiunii simultane a momentelor încovoietoare și a efortului axial, este descrisă prin echilibru elementar, compatibilitate, relații constitutive neliniare pentru materiale și conectori, starea de tensiune și deformare fiind monitorizată pe parcursul fiecărui increment de încărcare. Se determină apoi rigiditatea tangentă la încovoiere și la efort axial a secțiunii transversale, iar prin aplicarea metodei forțelor în formulare matriceală, se determină matricea de rigiditate tangentă elasto-plastică și vectorul încărcărilor nodale echivalente a elementului de bară de cadru, cu includerea efectelor deformațiilor unghiulare. În acest context, s-a definit o rigiditate echivalentă la forță tăietoare pentru grinzile cu conexiune parțială și s-a ținut cont valoarea acesteia în relațiile generale forță-deplasare. Termenii matricei de rigiditate se evaluează direct prin calcularea unor coeficienți de corecție care afectează rigiditățile inițiale ale elementului, astfel integrarea numerică fiind necesară doar pentru evaluarea acestor coeficienți de corecție și nu pentru determinarea matricei de rigiditate în totalitate.

5.2 Ipoteze și modele constitutive de comportare adoptate

În formularea modelului analitic se admit următoarele ipoteze și simplificări:

- 1) Secțiunile transversale rămân plane după deformare și în cazul solicitărilor peste limita elastică, deformațiile având o variație liniară pe înălțimea secțiunii. În cazul elementelor cu conexiune parțială, diagrama de variație a deformațiilor pe înălțimea secțiunii înregistrează o discontinuitate la nivelul interfeței de contact dintre dala de beton și profilul metalic. Se neglijează forțele de frecare, dezvoltate în zona de contact dintre componente, și fenomenul de *uplift* (separarea componentelor în sens transversal);
- 2) Deplasarea pe verticală (săgeata) și curbura componentei de beton se consideră a fi egală cu cea corespunzătoare componentei metalice;
- 3) Conexiunea dintre dala de beton și profilul metalic se consideră continuă, deși, în mod curent, dispozitivele mecanice de conectare (de ex. gujoane) sunt dispuse discret în lungul interfeței de contact. În acest context, se determină o rigiditate echivalentă a conexiunii, așa cum se va vedea în secțiunile următoare;
- 4) Se accepta ipoteza micilor deformații dar deplasările și rotirile pot fi mari;
- 5) Fenomenul de flambaj prin încovoiere-răsucire este neglijat. Deplanarea și distorsiunea secțiunilor transversale nu se i-a în considerare;
- 6) Gradul de conexiune este același în toate secțiunile transversale ale elementului;

- 7) Efectul deformațiilor de lunecare transversala este luat în considerare în analiză la nivel de element (modelul Timoshenko) însă este neglijat în analiza de rezistență la nivel de secțiune. Deplasările datorate forței tăietoare sunt luate în considerare într-o manieră simplificată prin intermediul unei rigidități echivalente la forța tăietoare.

Fiecare bară de cadru se reprezintă printr-un element cu două noduri având șase grade de libertate pe fiecare nod (trei translații și trei rotații). Procedul de analiză propus ține seama de plasticizarea materialului în cea mai evoluată formă având la baza modelul plasticizării distribuite, în cadrul căruia comportarea elasto-plastică a elementelor include dezvoltarea graduală a zonelor plastice atât pe înălțimea secțiunii transversale cât și în lungul elementului. Mai mult, pentru analiza fiecărei bare (grindă sau stâlp) se utilizează un singur element, rezultând astfel un număr relativ mic de necunoscute și, implicit, costuri computaționale respectiv timpi de analiză reduși. Ipotezele simplificatoare mai sus enunțate permit formularea procedurii de analiză la două niveluri distincte, la nivel de secțiune și la nivel de element, răspunsul inelastic al elementului de bară fiind obținut ca suma ponderată a răspunsurilor inelastice a unui număr discret de secțiuni transversale localizate în lungul elementului, în punctele schemei de integrare adoptate.

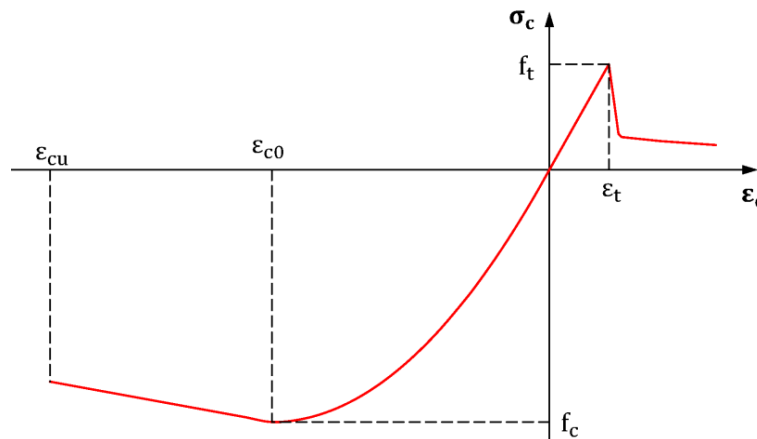


Fig. 5.1 Curba caracteristică a betonului conform Hognestad și Vecchio

$$\sigma_c = \begin{cases} -f_c \left(1 - \gamma \left(\frac{\epsilon - \epsilon_{c0}}{\epsilon_{cu} - \epsilon_{c0}} \right) \right), & \epsilon_{cu} \leq \epsilon < \epsilon_{c0}; \\ -f_c \left(2 \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}} - \frac{\epsilon^2}{\epsilon_{c0}^2} \right), & \epsilon_{c0} \leq \epsilon < 0; \\ E_t \epsilon, & 0 < \epsilon \leq \epsilon_t; \\ \frac{\alpha_1 \alpha_2^2}{1 + \sqrt{500\epsilon}} f_t, & \epsilon > \epsilon_t; \end{cases} \quad (5.1)$$

În ceea ce privește comportarea betonului, au fost adoptate trei modele constitutive distincte pentru modelarea acestuia. În cadrul primului model, betonul comprimat este descris de relația propusă de *Hognestad* [134] și este reprezentat printr-o parabolă de gradul doi, pentru porțiunea ascendentă respectiv printr-o dreaptă pentru porțiunea descendentă (Fig. 5.1). Acest model este completat de cel propus de *Vecchio și Collins* [135] pentru modelarea betonului întins, model compus dintr-o porțiune liniară ascendentă și una parabolică

descendentă (Fig. 5.1). Relațiile (5.1) descriu comportarea betonului reprezentat în Fig. 5.1, iar semnificația termenilor este următoarea :

- f_c este rezistența cilindrică la compresiune a betonului;
- ε_{c0} reprezintă deformația specifică liniară corespunzătoare valorii f_c ;
- ε_{cu} este deformația specifică liniară ultimă a betonului comprimat;
- γ reprezintă gradul de confinare al betonului
- f_t este rezistența la întindere a betonului obținută cu relația $1.4(f_c/10)^{2/3}$;
- ε_t reprezintă deformația specifică liniară corespunzătoare valorii f_t ;
- E_t reprezintă modulul de elasticitate transversal a betonului;
- α_1 este un factor ce ține seama de caracteristicile de aderență ale armăturilor având valoarea 1 în cazul armăturilor deformate și 0.7 pentru armăturile drepte;
- α_2 reprezintă un factor ce ține cont de durata solicitărilor și de încărcările ciclice și are valoarea 1 pentru încărcări monotone de scurtă durată respectiv valoarea 0.7 pentru încărcări de lungă durată sau ciclice.

Cel de-al doilea model adoptat pentru descrierea comportării betonului, comprimat și întins, este cel propus de codul model *CEB-FIP 1990* [136].

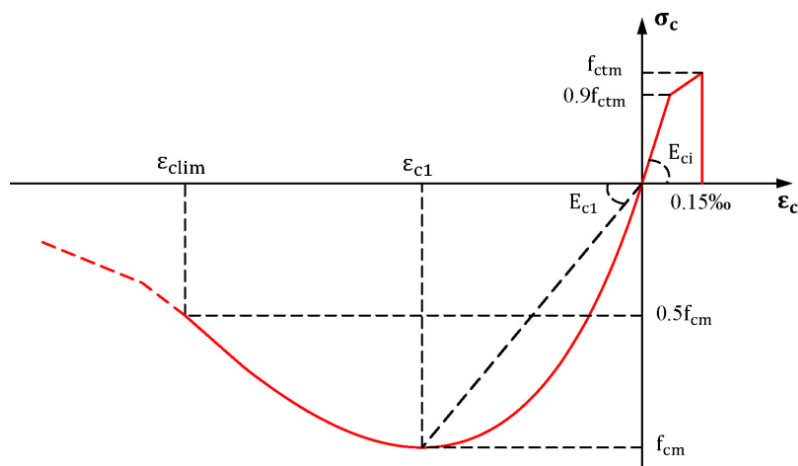


Fig. 5.2 Curba caracteristică a betonului conform codului CEB-FIP 1990

Modelul este prezentat în Fig. 5.2 și este descris complet de următoarele ecuațiile constitutive :

$$\sigma_c = \begin{cases} - \left[\left(\frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{clim}} \xi - 2 \left(\frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{clim}} \right)^2 \right) \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right)^2 + \left(\frac{4\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{clim}} - \xi \right) \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right]^{-1} \cdot f_{cm}, & \varepsilon_c \leq \varepsilon_{clim}; \\ - \left[1 + \left(\frac{E_{ci}}{E_{c1}} - 2 \right) \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right]^{-1} \left[\frac{E_{ci}}{E_{c1}} \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right)^2 \right] \cdot f_{cm}, & \varepsilon_{clim} \leq \varepsilon_c \leq 0; \\ E_{ci} \varepsilon_c, & 0 < \varepsilon_c \leq 0.9 f_{ctm} / E_{ci}; \\ f_{ctm} - \frac{0.1 f_{ctm}}{0.00015 - 0.9 f_{ctm} / E_{ci}} (0.00015 - \varepsilon_c), & 0.9 f_{ctm} / E_{ci} < \varepsilon_c \leq 0.00015; \\ \sigma_c = 0, & \varepsilon_c > 0.00015; \end{cases} \quad (5.2)$$

unde:

$$\xi = 4 \left[1 + \left(\frac{E_{ci}}{E_{c1}} - 2 \right) \left(\frac{\varepsilon_{c \text{ lim}}}{\varepsilon_{c1}} \right) \right]^{-2} \left[\left(\frac{E_{ci}}{E_{c1}} - 2 \right) \left(\frac{\varepsilon_{c \text{ lim}}}{\varepsilon_{c1}} \right)^2 + 2 \frac{\varepsilon_{c \text{ lim}}}{\varepsilon_{c1}} - \frac{E_{ci}}{E_{c1}} \right];$$

$$\varepsilon_{c1} = -0.0022;$$

$$f_{ctm} = 1.4 \left(\frac{f_{ck}}{10} \right)^{2/3}$$
(5.3)

În relațiile de mai sus:

f_{cm} este rezistența medie la compresiune pe cilindru a betonului;

ε_{c1} reprezintă deformația specifică liniară corespunzătoare valorii f_{cm} ;

$\varepsilon_{c \text{ lim}}$ reprezintă deformația specifică liniară corespunzătoare valorii $0.5f_{cm}$;

f_{ctm} este rezistența medie la întindere a betonului;

f_{ck} este rezistența caracteristică la compresiune pe cilindru a betonului;

E_{ci} reprezintă modulul de elasticitate transversal tangent al betonului;

E_{c1} reprezintă modulul de elasticitate transversal secant corespunzător valorii f_{cm} ;

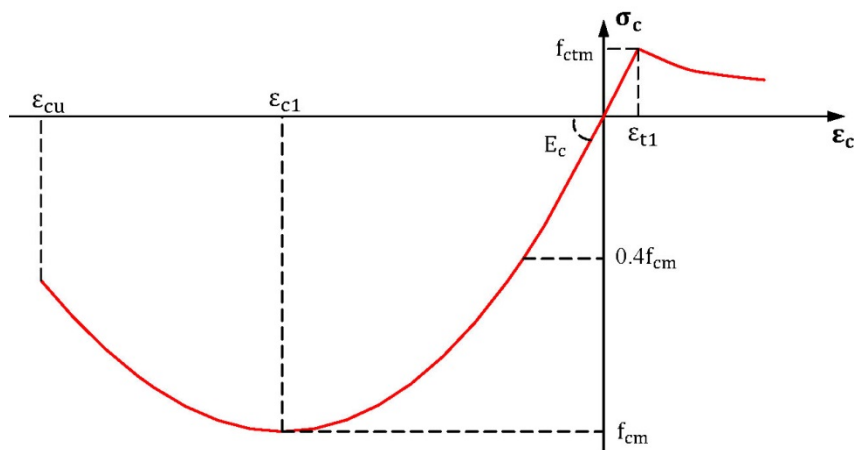


Fig. 5.3 Curba caracteristică a betonului conform standardului EC2

$$\sigma_c = \begin{cases} \left[\frac{\frac{\varepsilon_c k - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right)^2}{\varepsilon_{c1}}}{1 + (k-2) \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}} \right] \cdot f_{cm}, & \varepsilon_{cu} \leq \varepsilon_c \leq 0; \\ E_c \varepsilon_c, & 0 < \varepsilon_c \leq f_{ctm} / E_c; \\ f_{ctm} \left(\frac{\varepsilon_{t1}}{\varepsilon_c} \right), & f_{ctm} / E_{ci} < \varepsilon_c \end{cases}$$
(5.4)

Cel de-al treilea model constitutiv adoptat pentru modelarea comportării betonului comprimat este cel propus de norma europeană EC2 [137] și este completat cu modelul propus de Tamai ș.a. [138] pentru simularea comportării betonului întins. Reprezentarea

grafică a celui de-al treilea model constitutiv al betonului este prezentată în Fig. 5.3, iar relațiile constitutive aferente sunt (5.4) în care:

$$\begin{aligned}
 k &= 1.05 \cdot E_{cm} \cdot \frac{\varepsilon_c}{f_{cm}}; \\
 E_c &= 22000 \left(\frac{f_{cm}}{10} \right)^{0.3}; \\
 \varepsilon_{c1} &= -0.002; \\
 \varepsilon_{cu} &= -0.0035; \\
 f_{ctm} &= 0.3 f_{ck}^{2/3};
 \end{aligned}
 \tag{5.5}$$

În relațiile de mai sus semnificația termenilor este aceeași cu cea adoptată în cazul primelor două modele constitutive.

Comportarea oțelului structural s-a considerat multi-liniară, atât la întindere cât și la compresiune, existând astfel posibilitatea considerării efectului de reconsolidare (Fig. 5.4).

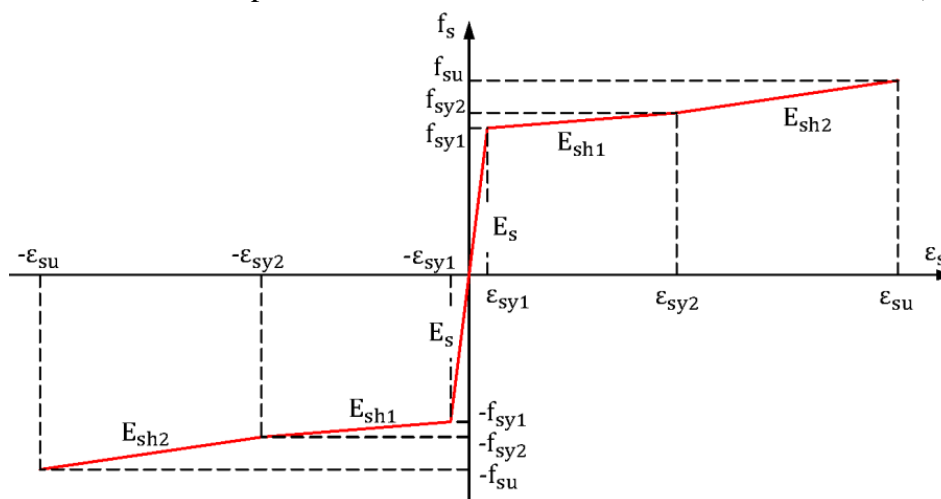


Fig. 5.4 Modelarea oțelului structural

Legea constitutivă a oțelului aferent armăturilor este prezentată în Fig. 5.4. În cazul armăturilor înglobate în betonul întins, se ține cont de distribuția neomogenă a tensiunilor în lungul armăturilor (datorită fisurării betonului), prin modificarea tensiunii de curgere [139]. Relațiile constitutive care descriu comportarea armăturilor întinse sunt:

$$f_r = \begin{cases} E_s \varepsilon, & \varepsilon \leq \varepsilon_{nr} \\ f_{yr} \left[(0.91 - 2B) + (0.02 + 0.25B\varepsilon / \varepsilon_{yr}) \right], & \varepsilon > \varepsilon_{nr} \end{cases}
 \tag{5.6}$$

unde:

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{\left(\frac{f_t}{f_{yr}} \right)^{1.5}}{\rho}; \\
 \varepsilon_{nr} &= \varepsilon_{yr} (0.93 - 2B) / (1 - 0.25B); \\
 f_{nr} &= E_s \varepsilon_{nr}; \\
 \varepsilon_{ur} &= \varepsilon_{yr} (0.07 + 2B) / (0.25B)
 \end{aligned}
 \tag{5.7}$$

În relațiile de mai sus, f_t reprezintă rezistența la întindere a betonului, ρ reprezintă procentul de armare longitudinal (limitat la 0.25%), ε_{nr} este deformația corespunzătoare tensiunii modificate de curgere f_{nr} , iar ε_{ur} reprezintă deformația ultimă. Efectul de reconsolidare nu este considerat în cazul armăturilor comprimate, astfel o comportare elastic-perfect plastică este acceptată pentru aceste bare (Fig. 5.5).

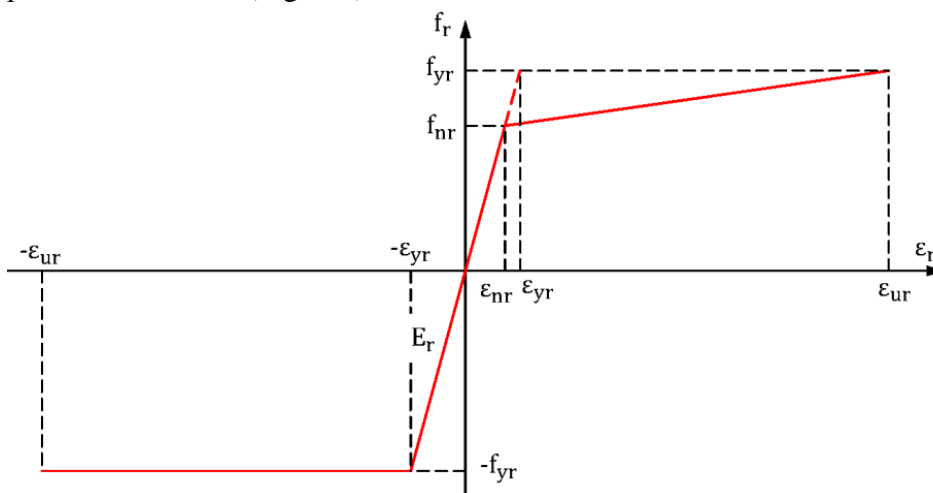


Fig. 5.5 Modelarea armăturilor

În modelul propus, se admite o distribuție uniformă a conectorilor în lungul elementului structural (cazul obișnuit al grinzilor compozite oțel-beton), rezultând astfel forțe de lunecare uniform distribuite, între dala de beton și profilul metalic. Legea constitutivă de comportare a conectorilor, ce descrie relația dintre lunecarea relativă și forța aferentă, este în general obținută experimental prin încercări pe specimene standardizate sau, în lipsa unor astfel de rezultate experimentale, legea de comportare poate fi descrisă de relația propusă de *Ollgaard* [37], relație unanim acceptată în literatura de specialitate. În metoda de analiză propusă, comportarea conectorilor este guvernată de o rigiditate secantă, calculată în funcție de valoarea efortului axial din dala de beton, așa cum se va prezenta în secțiunile următoare ale capitoului.

5.3 Modelarea inelasticității la nivel de secțiune

Prima parte a acestei secțiuni se concentrează pe evaluarea comportării elasto-plastice a unei secțiuni de formă oarecare supusă acțiunii simultane a efortului axial și a momentelor încovoietoare, în ipoteza interacțiunii totale dintre componentele secțiunii. Acest tip de analiză poate fi aplicat, de exemplu, în cazul stâlpilor cu secțiune mixtă oțel-beton. În continuare, se va prezenta modul de conducere a analizei secționale pentru cazul grinzilor mixte alcătuite dintr-o dală de beton respectiv un profil metalic conectate prin intermediul unor conectori ductili de tip dorn cu cap. Analiza se va efectua pentru două cazuri distincte de interacțiune: totală și parțială. Răspunsul elastic și inelastic al acestor elemente structurale este unul complex deoarece conectorii dispuși la interfața de contact dintre oțel și beton permit deplasări longitudinale relative între aceste componente (cazul conexiunii parțiale), care trebuie luate în considerare în cazul unei analize riguroase. Conexiunea totală (rigiditate infinită a conexiunii) și lipsa conexiunii (rigiditate zero a conexiunii) reprezintă limitele

conexiunii parțiale [46]. Conexiunea parțială include atât efectele interacțiunii parțiale (concept ce face referire la rigiditatea conexiunii) cât și cele ale conectării parțiale (concept ce face referire la capacitatea portantă a conexiunii) și astfel, gradul de conexiune poate fi definit prin doi termeni: grad de interacțiune și grad de conectare, însă aceștia sunt în strânsă legătura. De exemplu, sporirea capacității portante a conexiunii prin mărirea numărului de conectori, duce implicit și la sporirea rigidității conexiunii [78,84]. Pentru analiza și proiectarea grinzilor mixte în ipoteza conexiunii parțiale, metodele simplificate propuse în literatura de specialitate și în unele coduri de proiectare [1] sunt foarte utile. De exemplu, în EC4 [1] este introdus conceptul de grad de conectare $\eta=n/n_f$, iar capacitatea portantă la încovoiere a unei grinzi mixte cu conectare parțială se determină prin echilibru plastic elementar considerând în dala de beton un efort axial $N_c=n\cdot P_{sc}$, unde n reprezintă numărul efectiv de conectori, n_f reprezintă numărul de conectori care asigură conectarea totală, iar P_{sc} este capacitatea portantă a unui singur conector. Trebuie scos în evidență faptul că, gradul de conectare și numărul de conectori aferent, se determină în baza unor prescripții de proiectare și sunt în strânsă legătură cu caracteristicile mecanice ale materialelor utilizate.

5.3.1 Determinarea caracteristicilor de rigiditate în domeniul elasto-plastic a secțiunilor cu conexiune totală

5.3.1.1 Cazul unei secțiuni transversale de formă oarecare

Se consideră secțiunea din Fig. 5.6 supusă acțiunii simultane a efortului axial N și a momentelor încovoietoare M_y și M_z . Originea sistemului de axe corespunde cu centrul de greutate al secțiunii transversale. În conformitate cu ipotezele enumerate în secțiunea anterioară, deformațiile specifice totale, pentru un punct oarecare aparținând secțiunii $\mathbf{r} = [y, z]$, pot fi exprimate într-o formă liniară folosind următoarea expresie:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \phi_y z + \phi_z y + \varepsilon_r = u + \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{r}^T + \varepsilon_r \quad (5.8)$$

în care u reprezintă deformația axială, $\mathbf{\Phi} = [\phi_y \ \phi_z]$ este vectorul ce cuprinde curburile în raport cu axele centrale iar ε_r reprezintă deformația datorată tensiunilor reziduale existente, fiind luate în considerare doar pentru profilul metalic. Echilibrul global este satisfăcut când eforturile exterioare (N , M_y , M_z) sunt egale cu cele interioare. Aceste condiții pot fi reprezentate matematic cu ajutorul următorului sistem de ecuații neliniare:

$$\begin{cases} \int_{A_{cs}} \sigma(\varepsilon_0, \phi_y, \phi_z) dA_{cs} - N = 0; \\ \int_{A_{cs}} \sigma(\varepsilon_0, \phi_y, \phi_z) z dA_{cs} - M_y = 0; \\ \int_{A_{cs}} \sigma(\varepsilon_0, \phi_y, \phi_z) y dA_{cs} - M_z = 0; \end{cases} \quad (5.9)$$

sau în formă matriceală condensată:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{f}^{int} - \mathbf{f}^{ext} = \mathbf{0} \quad (5.10)$$

unde, $\mathbf{X} = [\varepsilon_0 \ \phi_y \ \phi_z]^T$ reprezintă vectorul necunoscutelor, iar \mathbf{f}^{int} și \mathbf{f}^{ext} sunt vectorii eforturilor interioare respectiv exterioare și pot fi exprimați astfel:

$$\mathbf{f}^{int} = \begin{bmatrix} N_{int} = \int_{A_{cs}} \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi_y, \phi_z)) dA_{cs} \\ M_y^{int} = \int_{A_{cs}} \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi_y, \phi_z)) z dA_{cs} \\ M_z^{int} = \int_{A_{cs}} \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi_y, \phi_z)) y dA_{cs} \end{bmatrix}; \mathbf{f}^{ext} = \begin{bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

În relațiile de mai sus integralele sunt evaluate pe porțiuni de beton respectiv oțel (A_{cs}). Sistemul de ecuații neliniare poate fi rezolvat folosind, de exemplu, metoda pașilor controlați în încărcări, ținând cont că tensiunile sunt funcții implicite de deformații, a căror expresie generală este dată de relația (5.8).

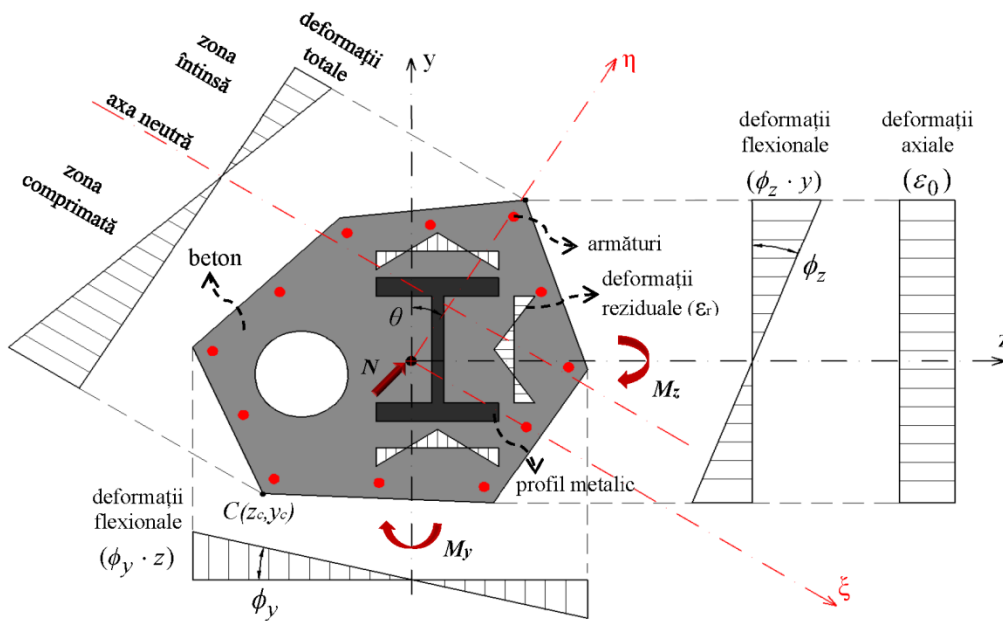


Fig. 5.6 Secțiune transversală mixtă oțel-beton de formă oarecare

Sistemul de ecuații (5.10) se rezolvă numeric folosind metoda Newton-Raphson, obținându-se astfel necunoscutele u , ϕ_y , ϕ_z corespunzătoare unei stări de solicitare date de N , M_y , M_z , iar apoi se calculează rigiditățile la încovoiere (EI_y , EI_z) și la efort axial (EA) aferente [11]. Conform metodei iterative Newton, soluția corespunzătoare iterației $k+1$ poate fi evaluată în funcție de soluția iterației k astfel:

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k - \mathbf{F}'(\mathbf{X}^k)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}^k), k \geq 0 \quad (5.12)$$

unde \mathbf{F}' reprezintă Jacobianul (sau matricea de rigiditate tangentă a secțiunii transversale) sistemului de ecuații neliniare (5.10) și poate fi exprimat astfel:

$$\mathbf{F}' = \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{int}}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial N^{int}}{\partial \phi_y} & \frac{\partial N^{int}}{\partial \phi_z} \\ \frac{\partial M_y^{int}}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial M_y^{int}}{\partial \phi_y} & \frac{\partial M_y^{int}}{\partial \phi_z} \\ \frac{\partial M_z^{int}}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial M_z^{int}}{\partial \phi_y} & \frac{\partial M_z^{int}}{\partial \phi_z} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

sau, explicit coeficienții Jacobianului pot fi exprimați astfel:

$$\begin{aligned}
k_{11} &= \frac{\partial N^{int}}{\partial \varepsilon_0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_0} \left[\int_{A_{cs}} \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi_y, \phi_z)) dA_{cs} \right] = \int_{A_{cs}} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_0} dA_{cs} = \int_{A_{cs}} E_t dA_{cs} \\
k_{12} &= \frac{\partial N^{int}}{\partial \phi_y} = \frac{\partial}{\partial \phi_y} \left[\int_{A_{cs}} \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi_y, \phi_z)) dA_{cs} \right] = \int_{A_{cs}} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi_y} dA_{cs} = \int_{A_{cs}} E_t z dA_{cs} \\
k_{13} &= \frac{\partial N^{int}}{\partial \phi_z} = \frac{\partial}{\partial \phi_z} \left[\int_{A_{cs}} \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi_y, \phi_z)) dA_{cs} \right] = \int_{A_{cs}} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi_z} dA_{cs} = \int_{A_{cs}} E_t y dA_{cs} \\
k_{21} &= \frac{\partial M_y^{int}}{\partial \varepsilon_0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_0} \left[\int_{A_{cs}} \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi_y, \phi_z)) z dA_{cs} \right] = \int_{A_{cs}} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_0} z dA_{cs} = \int_{A_{cs}} E_t z dA_{cs} \\
k_{22} &= \frac{\partial M_y^{int}}{\partial \phi_y} = \frac{\partial}{\partial \phi_y} \left[\int_{A_{cs}} \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi_y, \phi_z)) z dA_{cs} \right] = \int_{A_{cs}} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi_y} z dA_{cs} = \int_{A_{cs}} E_t z^2 dA_{cs} \quad (5.14) \\
k_{23} &= \frac{\partial M_y^{int}}{\partial \phi_z} = \frac{\partial}{\partial \phi_z} \left[\int_{A_{cs}} \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi_y, \phi_z)) z dA_{cs} \right] = \int_{A_{cs}} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi_z} z dA_{cs} = \int_{A_{cs}} E_t y z dA_{cs} \\
k_{31} &= \frac{\partial M_z^{int}}{\partial \varepsilon_0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_0} \left[\int_{A_{cs}} \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi_y, \phi_z)) y dA_{cs} \right] = \int_{A_{cs}} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_0} y dA_{cs} = \int_{A_{cs}} E_t y dA_{cs} \\
k_{32} &= \frac{\partial M_z^{int}}{\partial \phi_y} = \frac{\partial}{\partial \phi_y} \left[\int_{A_{cs}} \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi_y, \phi_z)) y dA_{cs} \right] = \int_{A_{cs}} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi_y} y dA_{cs} = \int_{A_{cs}} E_t y z dA_{cs} \\
k_{33} &= \frac{\partial M_z^{int}}{\partial \phi_z} = \frac{\partial}{\partial \phi_z} \left[\int_{A_{cs}} \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi_y, \phi_z)) y dA_{cs} \right] = \int_{A_{cs}} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi_z} y dA_{cs} = \int_{A_{cs}} E_t y^2 dA_{cs}
\end{aligned}$$

unde, $E_t = d\sigma/d\varepsilon$ reprezintă modulul de elasticitate tangent. Procesul iterativ pornește cu aproximația inițială 0 pentru necunoscutele ε_0 , ϕ_y , ϕ_z iar soluția este obținută după doar câteva iterații prin aplicarea metodei rapid convergente Newton dată de relația (5.12). Criteriul de convergență admis este dat de raportul dintre norma vectorului forțelor neechilibrate și norma vectorului forțelor totale aplicate. Astfel soluția converge dacă criteriul (5.15) este îndeplinit, în care toleranța de calcul TOL s-a considerat $1E-5$.

$$\frac{\sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{F}}}{\sqrt{\mathbf{f}^{extT} \mathbf{f}^{ext}}} \leq TOL \quad (5.15)$$

Astfel, pentru valori cunoscute a efortului axial N și ale momentelor încovoietoare M_y , M_z , se determină starea de tensiune și deformație pe înălțimea secțiunii iar apoi se poate calcula rigiditatea la efort axial și la încovoiere, urmând etapele descrise în secțiunile următoare.

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_0 \\ \Delta \phi_y \\ \Delta \phi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_y \\ \Delta M_z \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Matricea de rigiditate tangentă a secțiunii transversale relevă schimbări minore ale deformațiilor ca urmare a unor modificări de același ordin ale forțelor aplicate. Relațiile

incrementale între eforturi și deformații poate fi exprimate astfel ca în relația (5.16) sau în formă matriceală condensată:

$$\mathbf{k}_t \cdot \Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{F} \quad (5.17)$$

unde \mathbf{k}_t reprezintă matricea de rigiditate tangentă a secțiunii, $\Delta \mathbf{u}$ este vectorul deformațiilor incrementale (deformația axială și curburile în raport cu axele centrale ale secțiunii), iar $\Delta \mathbf{F}$ este vectorul care reține valorile eforturilor incrementale. Coeficienții k_{ij} , ai matricei de rigiditate, sunt calculați în baza relațiilor (5.14) folosind tensiunile și deformațiilor corespunzătoare unei stări de echilibru, sub acțiunea eforturilor exterioare date N , M_y , M_z . Inversarea relației (5.17) conduce la:

$$\mathbf{f}_t \Delta \mathbf{F} = \Delta \mathbf{u} \quad (5.18)$$

unde $\mathbf{f}_t = \mathbf{k}_t^{-1}$ reprezintă matricea de flexibilitate tangentă a secțiunii. Se definește rigiditatea la încovoiere tangentă în raport cu o axă, ca fiind raportul dintre momentul încovoiitor incremental și curbura incrementală în raportul cu acea axă, efortul axial și momentul încovoiitor incremental în raport cu cealaltă axă menținându-se constant (Fig. 5.7) [11]:

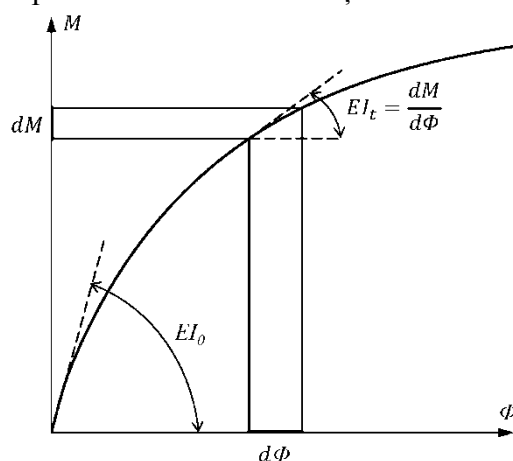


Fig. 5.7 Semnificația fizică a rigidității la încovoiere tangentă

$$EI_{ty} = \frac{\Delta M_y}{\Delta \phi_y}, \quad \Delta N = 0; \quad \Delta M_z = 0 \quad (5.19)$$

$$EI_{tz} = \frac{\Delta M_z}{\Delta \phi_z}, \quad \Delta N = 0; \quad \Delta M_y = 0$$

Rigiditatea la încovoiere tangentă în raport cu axa y , poate fi determinată prin rezolvarea sistemului matriceal (5.18) impunând următoarele restricții:

$$\begin{aligned} \Delta N &= 0 \\ \Delta M_z &= 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

În acest caz particular, eforturile incrementale $\Delta \mathbf{F}$, pot fi exprimate astfel:

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{T} \Delta \hat{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [\Delta M_y] \quad (5.21)$$

Înlocuind expresia lui $\Delta \mathbf{F}$ în relația (5.18) obținem:

$$\mathbf{f}_t \mathbf{T} \Delta \hat{\mathbf{F}} = \Delta \mathbf{u} \quad (5.22)$$

Înmulțind la stânga ambii membri ai relației (5.22) cu \mathbf{T}^T , se deduce următoarea expresie pentru $\Delta\hat{\mathbf{F}}$:

$$\Delta\hat{\mathbf{F}} = (\mathbf{T}^T \mathbf{f}_t \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \Delta\mathbf{u} \quad (5.23)$$

Utilizând expresia obținută pentru $\Delta\hat{\mathbf{F}}$, eforturile incrementale $\Delta\mathbf{F}$ pot fi calculate în baza relației (5.21) astfel:

$$\Delta\mathbf{F} = \mathbf{T}(\mathbf{T}^T \mathbf{f}_t \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \Delta\mathbf{u} \quad (5.24)$$

sau în formă matriceală explicită:

$$\begin{bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_y \\ \Delta M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & EI_{ty} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta \phi_y \\ \Delta \phi_z \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

În relația de mai sus, EI_{ty} reprezintă rigiditatea la încovoiere tangentă în raport cu axa y a secțiunii și are următoarea expresie, determinată în baza relației (5.24):

$$EI_{ty} = \frac{k_{11}k_{22}k_{33} - k_{11}k_{23}^2 - k_{33}k_{12}^2 + 2k_{12}k_{13}k_{23} - k_{22}k_{13}^2}{k_{11}k_{33} - k_{13}^2} \quad (5.26)$$

Aplicând etapele (5.20) - (5.25), se determină, în mod similar, expresiile rigidităților tangente, la efort axial și la încovoiere în raport cu axa z :

$$EI_{tz} = \frac{k_{11}k_{22}k_{33} - k_{11}k_{23}^2 - k_{33}k_{12}^2 + 2k_{12}k_{13}k_{23} - k_{22}k_{13}^2}{k_{11}k_{22} - k_{12}^2} \quad (5.27)$$

$$EA_t = k_{11} - \frac{k_{12}k_{21}}{k_{22}} - \frac{k_{12}k_{23}}{k_{22}} \frac{k_{31}k_{22} - k_{32}k_{21}}{k_{33}k_{22} - k_{32}k_{23}} - k_{13} \frac{k_{31}k_{22} - k_{32}k_{21}}{k_{33}k_{22} - k_{32}k_{23}} \quad (5.28)$$

Evaluarea capacității portante ultime

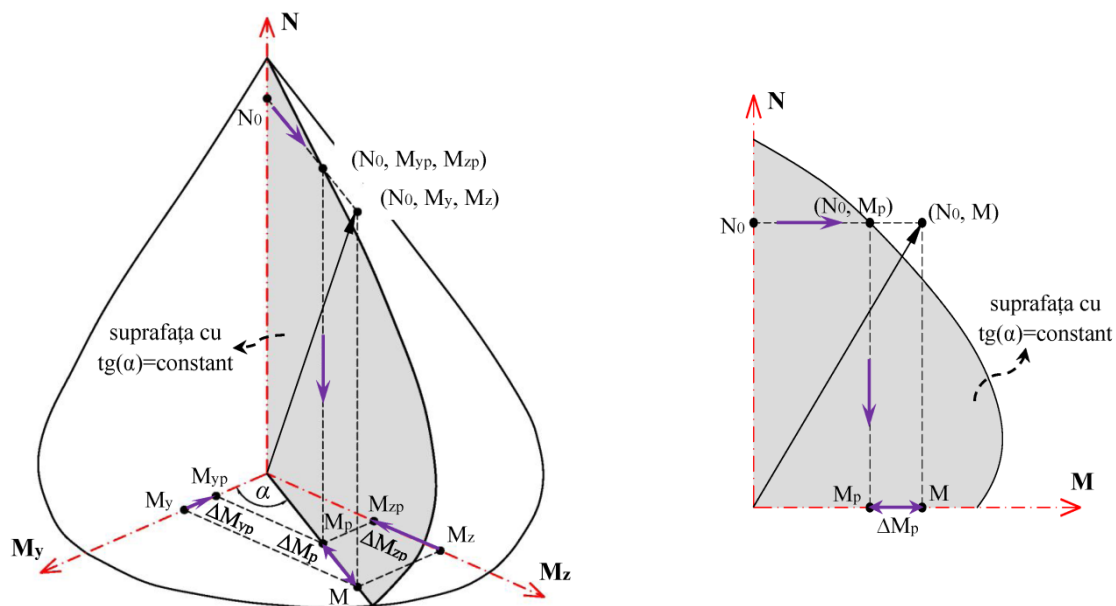


Fig. 5.8 Curba de interacțiune corespunzătoare unui raport constant al momentelor încovoiătoare

O caracteristică importantă a metodei propuse constă în posibilitatea determinării valorilor

momentelor încovoietoare ultime, corespunzătoare unui efort axial cunoscut și unui raport constant al momentelor încovoietoare, $tg \alpha = M_z/M_y$, în vederea asigurării neviolării suprafeței de plastificare (nedepășirea stării limită ultime, Fig. 5.8). Mai mult, o astfel de procedură este absolut necesară pentru a exista certitudinea că, odată cu plasticizarea integrală a unei secțiuni transversale, capacitatea portantă nu este depășită în nici-o secțiune din lungul barei. Secțiunea transversală supusă la încovoiere oblică cu efort axial, își atinge capacitatea ultimă când deformația totală în fibrele extreme atinge valoarea deformației ultime admise. În consecință, în starea limită ultimă, premergătoare cedării, echilibrul este îndeplinit când forțele exterioare sunt egale cu cele interioare și când, în fibra de beton maxim comprimată sau în fibra de oțel (armătură sau profil) maxim întinsă, se atinge deformația ultimă admisă. Aceste condiții pot fi exprimate matematic prin intermediul următorului sistem de ecuații neliniare:

$$\begin{cases} \int_{A_{cs}} \sigma(\varepsilon_0, \phi_y, \phi_z) dA_{cs} - N = 0; \\ \int_{A_{cs}} \sigma(\varepsilon_0, \phi_y, \phi_z) z dA_{cs} - M_y = 0; \\ \int_{A_{cs}} \sigma(\varepsilon_0, \phi_y, \phi_z) y dA_{cs} - M_z = 0; \\ \varepsilon_0 + \phi_y z_c(\phi_y, \phi_z) + \phi_z y_c(\phi_y, \phi_z) - \varepsilon_{cu} = 0; \end{cases} \quad (5.29)$$

unde N , M_y , M_z , ε_0 , ϕ_y , ϕ_z reprezintă necunoscutele sistemului de ecuații, integralele fiind evaluate pe porțiuni de beton respectiv oțel (A_{cs}). Primele trei ecuații ale sistemului (5.29) definesc, în stadiul de cedare admis, echilibrul între eforturile interioare, exprimate ca rezultante ale stării de tensiune interioare, și cele exterioare N , M_y , M_z . Ultima ecuație a sistemului definește criteriul de cedare exprimat, în acest caz, pentru fibra de beton maxim comprimată, care admite ca deformație ultimă valoarea ε_{cu} . Astfel, $z_c(\phi_y, \phi_z)$ și $y_c(\phi_y, \phi_z)$ reprezintă coordonatele punctului în care se admite criteriul de cedare. Aceste coordonate, asociate punctului de control unde se impune criteriul de cedare, pot fi determinate în funcție de înclinația axei neutre definită de parametrii ϕ_y și ϕ_z [4]. Procedura de soluționare constă în rezolvarea sistemului de ecuații neliniare (5.29) pentru următoarea relație liniară de constrângere:

$$\begin{cases} L_1(N, M_y, M_z) \equiv N - N_0 = 0; \\ L_2(N, M_y, M_z) \equiv M_z - tg(\alpha)M_y = 0; \end{cases} \quad (5.30)$$

unde, N_0 reprezintă efortul axial cunoscut iar raportul momentelor încovoietoare este dat de $tg(\alpha)$. Corespunzător constrângerii (5.30) putem defini un punct de suprafața de plastificare (v. Fig. 5.8) aferent efortului axial dat N_0 și raportului momentelor încovoietoare. Pentru orice înclinație a axei neutre definite de parametrii ϕ_y și ϕ_z se pot determina coordonatele punctelor maxim depărtate de axa neutră corespunzătoare fibrelor maxim comprimate sau întinse (de ex. punctul $C(z_c, y_c)$ din Fig. 5.8). Presupunând că în acest punct condiția de cedare este îndeplinită, expresia deformațiilor totale se exprimă astfel:

$$\varepsilon_0 + \phi_y z_c + \phi_z y_c = \varepsilon_{cu}; \quad (5.31)$$

Mai departe, folosind relația (5.31) se exprimă deformația axială în funcție de deformația ultimă ε_{cu} și de curburile ϕ_y și ϕ_z :

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{cu} - \phi_y z_c - \phi_z y_c; \quad (5.32)$$

Astfel, pentru orice fibra a secțiunii transversale, distribuția deformațiilor totale este descrisă de următoarea relație:

$$\varepsilon(\phi_y, \phi_z) = \varepsilon_{cu} + \phi_y (z - z_c) + \phi_z (y - y_c); \quad (5.33)$$

În consecință, necunoscuta ε_0 din sistemul de ecuații neliniare (5.29) este eliminată împreună cu ecuația ce definește criteriul de cedare. În acest mod, problema determinării capacității portante ultime se reduce la rezolvarea următorului sistem de ecuații neliniare, unde primele trei ecuații descriu condițiile de echilibru static iar ultimele două definesc combinațiile posibile între eforturile exterioare conform relației de constrângere (5.30):

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{A_{cs}} \sigma(\varepsilon(\phi_y, \phi_z)) dA_{cs} - N = 0; \\ \int_{A_{cs}} \sigma(\varepsilon(\phi_y, \phi_z)) z dA_{cs} - M_y = 0; \\ \int_{A_{cs}} \sigma(\varepsilon(\phi_y, \phi_z)) y dA_{cs} - M_z = 0; \\ L_1(N, M_y, M_z) \equiv N - N_0 = 0; \\ L_2(N, M_y, M_z) \equiv M_z - tg(\alpha) M_y = 0; \end{array} \right. \quad (5.34)$$

unde N , M_y , M_z , ϕ_y , ϕ_z reprezintă necunoscutele sistemului de ecuații. Trebuie menționat că valorile curburilor ϕ_y , ϕ_z sunt asociate unui criteriu de cedare (în acest caz, atingerea deformației ultime în fibra de beton maxim comprimată), deci reprezintă curburi ultime. Ținând cont de relațiile de constrângere sistemul de ecuații neliniare (5.34) devine:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{A_{cs}} \sigma(\varepsilon(\phi_y, \phi_z)) dA_{cs} - N_0 = 0; \\ \int_{A_{cs}} \sigma(\varepsilon(\phi_y, \phi_z)) y dA_{cs} - tg(\alpha) \int_{A_{cs}} \sigma(\varepsilon(\phi_y, \phi_z)) z dA_{cs} = 0; \\ \int_{A_{cs}} \sigma(\varepsilon(\phi_y, \phi_z)) z dA_{cs} - M_{yp} = 0; \end{array} \right. \quad (5.35)$$

unde M_{yp} , ϕ_y , ϕ_z reprezintă necunoscutele sistemului de ecuații. Decuplând necunoscuta moment M_y de necunoscutele curburi ϕ_y , ϕ_z , din primele două ecuații ale sistemului se pot determina curburile, aplicând spre exemplu metoda Newton de rezolvare a sistemelor de ecuații neliniare, și ținând cont că tensiunile sunt funcții implicite de curburi prin intermediul deformației specifice ε definite de relația (5.33):

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(\phi_y, \phi_z) = \int_{A_{cs}} \sigma(\varepsilon(\phi_y, \phi_z)) dA_{cs} - N_0 = 0; \\ f_2(\phi_y, \phi_z) = \int_{A_{cs}} \sigma(\varepsilon(\phi_y, \phi_z)) y dA_{cs} - tg(\alpha) \int_{A_{cs}} \sigma(\varepsilon(\phi_y, \phi_z)) z dA_{cs} = 0; \end{array} \right. \quad (5.36)$$

Cunoscând valorile curburilor ϕ_y , ϕ_z se poate determina valoarea momentului încovoietor capabil M_{yp} folosind ultima ecuație a sistemului (5.33):

$$M_{yp} = \int_{A_{cs}} \sigma(\varepsilon(\phi_y, \phi_z)) z dA_{cs}; \quad (5.37)$$

Momentului încovoietor capabil M_{zp} se determina simplu în baza relației:

$$M_{zp} = \operatorname{tg}(\alpha) M_y; \quad (5.38)$$

În relațiile de mai sus cu M_{yp} și M_{zp} s-au notat momentele încovoietoare care produc plastificarea totală a secțiunii, aferente unui efort axial N_0 cunoscut. În cazul în care, la sfârșitul unui ciclu de încărcare, momentele încovoietoare secționale sunt superioare celor determinate prin procedura descrisă anterior (punctul determinat de tripleta de forțe N_0 , M_y , M_z se situează înafara suprafeței de interacțiune, v. Fig. 5.8), se recurge la ajustarea momentelor încovoietoare prin micșorarea valorilor lor, în așa fel încât noul punct reprezentat de tripleta N_0 , M_{yp} , M_{zp} să se găsească pe curba de plastificare. Momentele încovoietoare corectoare, care asigură respectarea condiției de plastificare, se determină astfel:

$$\begin{aligned} \Delta M_{yp} &= M_y - M_{yp}; \\ \Delta M_{zp} &= M_z - M_{zp}; \end{aligned} \quad (5.39)$$

Aceste momente incrementale suplimentare se aplică ca încărcări nodale barei, așa cum se va arăta în cadrul analizei la nivel de element. Acest procedeu asigură neviolarea suprafeței de interacțiune plastică, odată cu majorarea eforturilor exterioare, după plastificarea completă a unei secțiuni transversale.

5.3.1.2 Cazul unei secțiuni transversale de tip grinda compozită

În cele ce urmează se prezintă modul de determinare a caracteristicilor de rigiditate secționale, în domeniul elastic și elasto-plastic de comportare, în ipoteza acțiunii compozite totale, pentru cazul grinzilor compozite având secțiunea transversală compusă dintr-o placă de beton armat și un profil metalic, ca în Fig. 5.9.

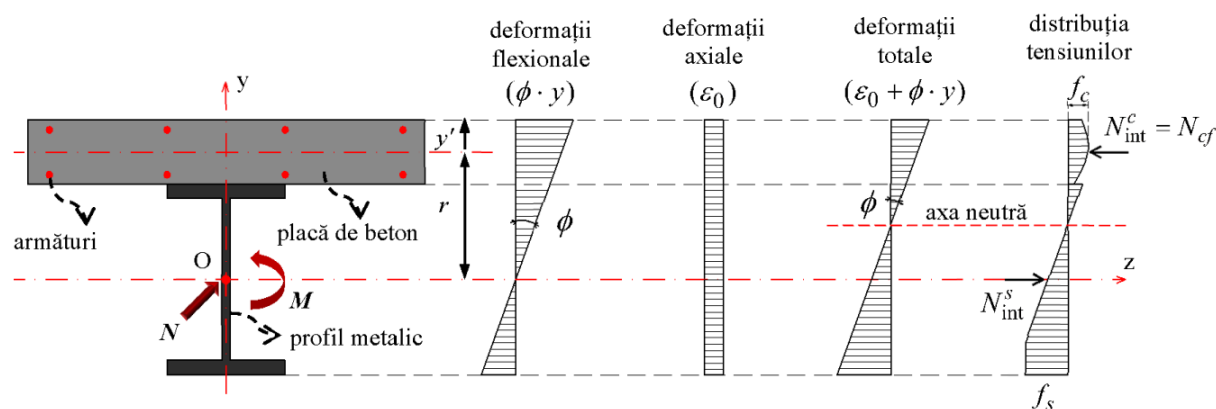


Fig. 5.9 Secțiune transversală mixtă în ipoteza acțiunii compozite totale

Se consideră că geometria secțiunii transversale și distribuția materialului este simetrică în raport cu axa verticală Oy , iar originea sistemului de axe ortogonale corespunde cu centrul de greutate al profilului metalic. Încărcările aplicate elementului sunt simetrice în raport cu planul xOy , care corespunde cu planul de încovoierie al grinzii. Efectele torsiunii și ale încovoierii înafara planului sunt neglijate. Frecarea dintre dala de beton și profilul metalic nu este inclusă în analiză, iar separarea celor două componente nu este permisă, având astfel aceeași curbură. Contribuția barelor de armătură este luată în considerare, aceste bare fiind modelate ca fibre punctuale și discrete independente, existând compatibilitate totală între

deformațiile acestora și a betonului înconjurător (nu există alunecări relative între beton și armături). În vederea simplificării relațiilor, deformațiile datorate tensiunilor reziduale nu sunt luate în considerare, însă așa cum s-a arătat în secțiunea anterioară, includerea efectului acestora în răspunsul secțional, nu reprezintă o dificultate.

Se consideră secțiunea din Fig. 5.9 supusă la acțiunea simultană a efortului axial N și a momentului încovoietor $M_z=M$. Sub incidența ipotezelor simplificatoare acceptate, distribuția deformațiilor totale, corespunzătoare curburii ϕ și deformației axiale ε_0 , poate fi exprimată într-o formă liniară astfel:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \phi \cdot y \quad (5.40)$$

Echilibrul secțional este îndeplinit, când forțele exterioare (N , M) sunt egale cu cele interioare, exprimate ca rezultante ale stării de tensiune. Aceste condiții pot fi reprezentate matematic prin intermediul următorului sistem de ecuații neliniare:

$$\begin{cases} \int_{A_s} \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi)) dA_s + \int_{A_c} \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi)) dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \sigma(\varepsilon_i(\varepsilon_0, \phi)) A_{ri} - N = 0 \\ \int_{A_s} \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi)) y dA_s + \int_{A_c} \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi)) y dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \sigma(\varepsilon_i(\varepsilon_0, \phi)) y_i A_{ri} - M = 0 \end{cases} \quad (5.41)$$

sau în formă matriceală condensată:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{f}^{int} - \mathbf{f}^{ext} = \mathbf{0} \quad (5.42)$$

unde $\mathbf{X} = [\varepsilon_0 \quad \phi]^T$ reprezintă vectorul necunoscutelor, iar \mathbf{f}^{int} și \mathbf{f}^{ext} sunt vectorii eforturilor interioare respectiv exterioare și pot fi exprimați astfel:

$$\mathbf{f}^{int} = \begin{bmatrix} N_{int} = \int_{A_s} \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi)) dA_s + \int_{A_c} \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi)) dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \sigma(\varepsilon_i(\varepsilon_0, \phi)) A_{ri} \\ M_{int} = \int_{A_s} \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi)) y dA_s + \int_{A_c} \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi)) y dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \sigma(\varepsilon_i(\varepsilon_0, \phi)) y_i A_{ri} \end{bmatrix}; \quad (5.43)$$

$$\mathbf{f}^{ext} = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}$$

unde, ε_0 și ϕ sunt necunoscutele sistemului de ecuații. Integralele ce intervin în calculul eforturilor interioare sunt evaluate pe ariile de beton (A_c) respectiv oțel (A_s). Contribuția armăturilor este explicit considerată, $A_{ri}(i=1, N_r)$ reprezentând aria secțiunii transversale a barei de armătură i situată la distanța y_i față de axa Oz , iar N_r indică numărul barelor de armătură. Sistemul de ecuații (5.41) se rezolvă numeric folosind metoda Newton-Raphson, ținând cont că tensiunile sunt funcții implicite de deformațiile exprimate prin relația (5.40). Astfel, pentru valori cunoscute ale eforturilor solicitante N, M , se determină starea de tensiune și de deformație pe întreaga secțiune, iar apoi se evaluează rigiditatea la încovoiere (EI_z) și la efort axial (EA), după cum se prezintă în cele ce urmează. Mai mult, se poate evalua rezultanta tensiunilor pe fiecare componentă a secțiunii (dala de beton sau profilul metalic). De exemplu, efortul axial interior din dala de beton, ținând cont de efectul armăturilor, poate fi calculat astfel:

$$N_{cf} = \int_{A_c} \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0^*, \phi^*)) dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \sigma(\varepsilon_i(\varepsilon_0^*, \phi^*)) A_{ri} \quad (5.44)$$

unde ε_0^* și ϕ^* reprezintă soluția sistemului de ecuații (5.41).

Matricea de rigiditate tangentă a secțiunii transversale relevă schimbări minore ale deformațiilor ca urmare a unor modificări de același ordin ale forțelor aplicate. Relațiile incrementale între eforturi și deformații poate fi exprimate astfel:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_0 \\ \Delta\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

sau în formă matriceală condensată:

$$\mathbf{k}_t \cdot \Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{F} \quad (5.46)$$

unde, \mathbf{k}_t reprezintă matricea de rigiditate tangentă a secțiunii, $\Delta \mathbf{u}$ este vectorul deformațiilor incrementale (deformația axială și curbura în raport cu axele Oz), iar $\Delta \mathbf{F}$ este vectorul care reține valorile eforturilor incrementale. Coeficienții k_{ij} ai matricei de rigiditate tangentă se evaluează pe baza tensiunilor și implicit a deformațiilor corespunzătoare unei stări de solicitare cunoscute. Astfel:

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{\partial N_{\text{int}}}{\partial \varepsilon_0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_0} \left[\int_{A_s} \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi)) dA_s + \int_{A_c} \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi)) dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \sigma(\varepsilon_i(\varepsilon_0, \phi)) A_{ri} \right] = \\ &= \int_{A_s} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_0} dA_s + \int_{A_c} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_0} dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_i} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_0} A_{ri} = \\ &= \int_{A_s} E_{ts} dA_s + \underbrace{\int_{A_c} E_{tc} dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} E_{tr} A_{ri}}_{(E_t A)_c \text{ dala+armaturi}} = (E_t A)_s + (E_t A)_c; \\ k_{12} &= \frac{\partial N_{\text{int}}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\int_{A_s} \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi)) dA_s + \int_{A_c} \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi)) dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \sigma(\varepsilon_i(\varepsilon_0, \phi)) A_{ri} \right] = \\ &= \int_{A_s} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi} dA_s + \int_{A_c} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi} dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_i} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \phi} A_{ri} = \\ &= \int_{A_s} E_{ts} y dA_s + \underbrace{\int_{A_c} E_{tc} y dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} E_{tr} y_i A_{ri}}_{(E_t S)_c \text{ dala+armaturi}} = (E_t S)_s + (E_t S)_c; \\ k_{21} &= \frac{\partial M_{\text{int}}}{\partial \varepsilon_0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_0} \left[\int_{A_s} \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi)) y dA_s + \int_{A_c} \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi)) y dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \sigma(\varepsilon_i(\varepsilon_0, \phi)) y_i A_{ri} \right] \\ &= \int_{A_s} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_0} y dA_s + \int_{A_c} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_0} y dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_i} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_0} y_i A_{ri} = \\ &= \int_{A_s} E_{ts} y dA_s + \underbrace{\int_{A_c} E_{tc} y dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} E_{tr} y_i A_{ri}}_{(E_t S)_c \text{ dala+armaturi}} = (E_t S)_s + (E_t S)_c; \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned}
k_{22} &= \frac{\partial M_{\text{int}}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\int_{A_s} \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi)) y dA_s + \int_{A_c} \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi)) y dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \sigma(\varepsilon_i(\varepsilon_0, \phi)) y_i A_{ri} \right] = \\
&= \int_{A_s} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi} y dA_s + \int_{A_c} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi} y dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_i} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \phi} y_i A_{ri} = \\
&= \int_{A_s} E_{ts} y^2 dA_s + \underbrace{\int_{A_c} E_{tc} y^2 dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} E_{tr} y_i^2 A_{ri}}_{(E_t I)_c \text{ dala+armaturi}} = (E_t I)_s + (E_t I)_c;
\end{aligned}$$

unde, $E_t = d\sigma/d\varepsilon$ reprezintă modulul de elasticitate tangent al oțelului (s) și al betonului (c). În expresiile coeficienților de rigiditate k_{ij} , $(E_t A)_s$ și $(E_t A)_c$ indică rigiditatea axială a componentei de oțel respectiv a celei de beton cu aportul armăturilor, $(E_t S)_s$ și $(E_t S)_c$ reprezintă momentul static al profilului metalic respectiv al dalei în raport cu axa Oz iar $(E_t I)_s$ și $(E_t I)_c$ denotă momentele de inerție ale fiecărei componente calculate în raport cu axa Oz . Prin inversarea relației (5.46) obținem:

$$\mathbf{f}_t \Delta \mathbf{F} = \Delta \mathbf{u} \quad (5.48)$$

unde $\mathbf{f}_t = \mathbf{k}_t^{-1}$ reprezintă matricea de flexibilitate tangentă a secțiunii. Se definește rigiditatea la încovoiere tangentă, ca fiind raportul dintre momentul încovoiator incremental și curbura incrementală, efortul axial menținându-se constant (v. Fig. 5.7). Similar, rigiditatea axială tangentă, reprezintă raportul dintre efortul axial incremental și deformația axială incrementală, în timp ce momentul încovoiator rămâne neschimbat:

$$\begin{aligned}
EI_t &= \left. \frac{\Delta M}{\Delta \phi} \right|_{\Delta N=0} \\
EA_t &= \left. \frac{\Delta N}{\Delta \varepsilon_0} \right|_{\Delta M=0}
\end{aligned} \quad (5.49)$$

Rigiditatea la încovoiere tangentă, poate fi determinată prin rezolvarea sistemului matriceal (5.48) impunând următoarea restricție:

$$\Delta N = 0 \quad (5.50)$$

În acest caz particular, eforturile incrementale $\Delta \mathbf{F}$, pot fi exprimate astfel:

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{T} \Delta \hat{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\Delta M] \quad (5.51)$$

Înlocuind expresia lui $\Delta \mathbf{F}$ în relația (5.48) obținem:

$$\mathbf{f}_t \mathbf{T} \Delta \hat{\mathbf{F}} = \Delta \mathbf{u} \quad (5.52)$$

Înmulțind la stânga ambii membri ai relației (5.52) cu \mathbf{T}^T , se deduce următoarea expresie pentru $\Delta \hat{\mathbf{F}}$:

$$\Delta \hat{\mathbf{F}} = (\mathbf{T}^T \mathbf{f}_t \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \Delta \mathbf{u} \quad (5.53)$$

Utilizând expresia obținută pentru $\Delta \hat{\mathbf{F}}$, eforturile incrementale $\Delta \mathbf{F}$ pot fi calculate în baza relației (5.51) astfel:

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{T} (\mathbf{T}^T \mathbf{f}_t \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \Delta \mathbf{u} \quad (5.54)$$

sau în formă matriceală explicită:

$$\begin{bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & EI_t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_0 \\ \Delta \phi \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

În relația de mai sus, EI_t reprezintă rigiditatea la încovoiere tangentă a secțiunii și are următoarea expresie, calculată în baza relației (5.54):

$$EI_t = k_{22} - \frac{k_{12}^2}{k_{11}} \quad (5.56)$$

unde coeficienții k_{ij} se evaluează pe baza relațiilor (5.47). Această relație poate fi utilizată pentru evaluarea rigidității elastice la încovoiere. Astfel, știind că, în limitele domeniului elastic, este validă legea lui Hooke între tensiuni și deformații, și observând că poziția dalei de beton este descrisă de variabila $y=y'+r$ (v. Fig. 5.9), coeficienții matricei de rigiditate secționale pot fi scriși sub următoarea formă:

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{\partial N_{\text{int}}}{\partial \varepsilon_0} = \int_{A_s} E_s dA_s + \underbrace{\int_{A_c} E_c dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} E_r A_{ri}}_{E_c A_c \text{ dala+armaturi}} = E_s A_s + E_c A_c \\ k_{12} &= \frac{\partial N_{\text{int}}}{\partial \phi} = \int_{A_s} E_s y dA_s + \int_{A_c} E_c (y' + r) dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} E_r (y'_i + r) A_{ri} = \\ &= \int_{A_s} E_s y dA_s + \underbrace{\int_{A_c} E_c \cdot y' dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} E_r \cdot y'_i A_{ri}}_{E_c S_c^{\text{local}} \text{ dala+armaturi}} + r \left(\underbrace{\int_{A_c} E_c dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} E_r A_{ri}}_{E_c A_c \text{ dala+armaturi}} \right) = \\ &= E_s S_s + E_c S_c^{\text{local}} + r E_c A_c = r E_c A_c \\ k_{21} &= \frac{\partial M_{\text{int}}}{\partial \varepsilon_0} = \int_{A_s} E_s y dA_s + \int_{A_c} E_c (y' + r) dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} E_r (y'_i + r) A_{ri} = \\ &= \int_{A_s} E_s y dA_s + \underbrace{\int_{A_c} E_c \cdot y' dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} E_r \cdot y'_i A_{ri}}_{E_c S_c^{\text{local}} \text{ dala+armaturi}} + r \left(\underbrace{\int_{A_c} E_c dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} E_r A_{ri}}_{E_c A_c \text{ dala+armaturi}} \right) = \\ &= E_s S_s + E_c S_c^{\text{local}} + r E_c A_c = r E_c A_c \\ k_{22} &= \frac{\partial M_{\text{int}}}{\partial \phi} = \int_{A_s} E_s y^2 dA_s + \int_{A_c} E_c (y' + r)^2 dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} E_r (y'_i + r)^2 A_{ri} = \\ &= \int_{A_s} E_s y^2 dA_s + \underbrace{\int_{A_c} E_c \cdot y'^2 dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} E_r \cdot y_i'^2 A_{ri}}_{E_c I_c^{\text{local}} \text{ dala+armaturi}} + 2r \left(\underbrace{\int_{A_c} E_c \cdot y' dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} E_r \cdot y'_i A_{ri}}_{E_c S_c^{\text{local}} \text{ dala+armaturi}} \right) + \\ &+ r^2 \left(\underbrace{\int_{A_c} E_c dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} E_r A_{ri}}_{E_c A_c \text{ dala+armaturi}} \right) = E_s I_s + E_c I_c^{\text{local}} + r^2 E_c A_c \end{aligned} \quad (5.57)$$

În relațiile de mai sus s-a ținut cont că momentul static al dalei de beton (S_c^{local}) respectiv al profilului metalic (S_s), calculate în raport cu axele de greutate proprii, sunt nule atâta timp cât comportarea materialelor este perfect elastică. Indicativul *local* reflectă raportarea

caracteristicilor secționale la axa de greutate proprie a dalei de beton. Înlocuind expresiile (5.57) în (5.56) se obține relația de calcul a rigidității elastice la încovoiere corespunzătoare secțiunilor mixte cu acțiune compozită totală:

$$(EI)^\infty = E_s I_s + E_c I_c^{local} + r^2 \frac{(E_c A_c)(E_s A_s)}{(E_c A_c) + (E_s A_s)} \quad (5.58)$$

Aplicând etapele (5.50) - (5.55), se determină, în mod similar, expresia rigidității tangente la efort axial:

$$EA_t = k_{11} - \frac{k_{12}^2}{k_{22}} \quad (5.59)$$

5.3.2 Determinarea caracteristicilor de rigiditate în domeniul elasto-plastic a secțiunilor cu conexiune parțială

În cadrul acestei secțiuni se prezintă modul de determinare a caracteristicilor de rigiditate secționale, în domeniul elastic și elasto-plastic de comportare, în ipoteza acțiunii compozite parțiale, pentru cazul grinzilor compozite având secțiunea transversală compusă dintr-o placă de beton armat și un profil metalic, ca în Fig.5.10. În cazul acțiunii compozite parțiale, distribuția deformațiilor totale pe înălțimea secțiunii transversale rămâne liniară însă, spre deosebire de cazul precedent al acțiunii compozite totale, deformațiile înregistrează o discontinuitate în dreptul interfeței de contact dintre componentele secțiunii. Astfel, lunecarea relativă, ce apare în zona de contact dintre dala de beton și profilul metalic, este luată în considerare prin cuantificarea deformațiilor de lunecare longitudinale aferente. Se consideră secțiunea din Fig.5.10 supusă la acțiunea simultană a efortului axial N și a momentului încovoiător $M_z=M$.

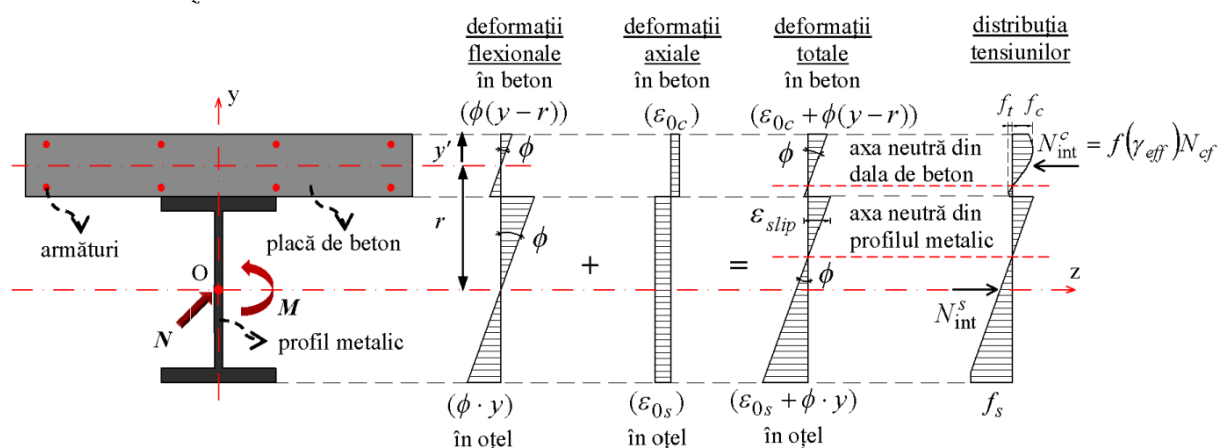


Fig.5.10 Secțiune transversală mixtă în ipoteza acțiunii compozite parțiale

În cele ce urmează se descrie metoda propusă pentru răspunsul inelastic al unei secțiuni compozite oțel-beton cu conexiune parțială. Efectele neliniare ale conectării parțiale sunt luate în considerare printr-un procedeu inovativ în cadrul căruia efortul axial interior din dala de beton se evaluează în funcție de gradul de acțiune compozită γ_{eff} , a cărui expresie va fi detaliată în secțiunea următoare și care poate fi, de asemenea, exprimat în funcție de gradul de conectare η definit în capitolul 3 al lucrării. Așa cum se observă în Fig.5.10, analiză este condusă în cazul acțiunii unui moment încovoiător pozitiv însă procedeu propus poate fi

aplicat și în situația secțiunii transversale supuse acțiunii unui moment încovoiator negativ. În baza ipotezelor simplificatoare mai sus enunțate, distribuțiile deformațiilor totale pe înălțimea secțiunii transversale, aferente componentei de beton respectiv celei metalice, corespunzătoare curburii ϕ și deformațiilor axiale ε_{0c} și ε_{0s} , pot fi exprimate într-o formă liniară astfel:

$$\begin{aligned}\varepsilon_c &= \varepsilon_{0c} + \phi \cdot (y - r) \\ \varepsilon_s &= \varepsilon_{0s} + \phi \cdot y\end{aligned}\quad (5.60)$$

În relațiile de mai sus, deformațiile totale ε_c și ε_s corespunzătoare dalei de beton (cu aportul armăturilor) respectiv profilului metalic, s-au exprimat față de centul de greutate propriu, iar r reprezintă distanța dintre centrul de greutate ale dalei de beton și cel al profilului metalic. Deformația de lunecare longitudinală (ε_{slip}), aferentă lunecării relative ce apare în cazul conexiunii parțiale la interfața de contact dintre componentele secțiunii, poate fi definită ca diferența, dintre deformația dalei de beton ε_c și ce a profilului metalic ε_s , evaluată la nivelul fâșiei de contact (v. Fig.5.10):

$$\varepsilon_{slip} = \varepsilon_c - \varepsilon_s = \varepsilon_{0c} - \varepsilon_{0s} - \phi \cdot r \quad (5.61)$$

Echilibrul secțional este îndeplinit, când forțele exterioare (N , M) sunt egale cu cele interioare, exprimate ca rezultante ale stării de tensiune. Aceste condiții pot fi reprezentate matematic prin intermediul următorului sistem de ecuații neliniare:

$$\begin{cases} \int_{A_s} \sigma(\varepsilon_s(\varepsilon_{0s}, \phi)) dA_s + \int_{A_c} \sigma(\varepsilon_c(\varepsilon_{0c}, \phi)) dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \sigma(\varepsilon_i(\varepsilon_{0c}, \phi)) A_{ri} - N = 0 \\ \int_{A_s} \sigma(\varepsilon_s(\varepsilon_{0s}, \phi)) y dA_s + \int_{A_c} \sigma(\varepsilon_c(\varepsilon_{0c}, \phi)) y dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \sigma(\varepsilon_i(\varepsilon_{0c}, \phi)) y_i A_{ri} - M = 0 \end{cases} \quad (5.62)$$

unde, ε_{0c} , ε_{0s} și ϕ sunt necunoscutele sistemului de ecuații. Integralele ce intervin în calculul eforturilor interioare sunt evaluate pe ariile de beton (A_c) respectiv oțel (A_s). Contribuția armăturilor este explicit considerată, A_{rsi} ($i=1, N_{rs}$) reprezentând aria secțiunii transversale a barei de armătură i situată la distanța y_i față de axa Oz , iar N_{rs} indică numărul barelor de armătură. Eforturile interioare din dala de beton, incluzând contribuția barelor de armătură, pot fi evaluate astfel:

$$N_{int}^c = \int_{A_c} \sigma(\varepsilon_c(\varepsilon_{0c}, \phi)) dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \sigma(\varepsilon_i(\varepsilon_{0c}, \phi)) A_{ri} \quad (5.63)$$

$$M_{int}^c = \int_{A_c} \sigma(\varepsilon_c(\varepsilon_{0c}, \phi)) y dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \sigma(\varepsilon_i(\varepsilon_{0c}, \phi)) y_i A_{ri} \quad (5.64)$$

În mod similar, eforturile interioare din componenta de oțel, se determină astfel:

$$N_{int}^s = \int_{A_s} \sigma(\varepsilon_s(\varepsilon_{0s}, \phi)) dA_s \quad (5.65)$$

$$M_{int}^s = \int_{A_s} \sigma(\varepsilon_s(\varepsilon_{0s}, \phi)) y dA_s \quad (5.66)$$

Pentru rezolvare sistemului de două ecuații (5.62) cu trei necunoscute, ε_{0c} , ε_{0s} și ϕ , avem nevoie de o ecuație suplimentară. În acest sens, efortul axial interior din dala de beton aferent

conexiunii parțiale (N_{int}^c), se exprimă în mod simplificat ca o fracțiune din efortul axial din dala de beton aferent conexiunii totale (N_{cf}), ca în Fig.5.10:

$$N_{int}^c = f(\gamma_{eff}) \cdot N_{cf} \quad (5.67)$$

unde N_{cf} este calculat în condițiile secțiunii transversale supuse acțiunii aceluiași eforturi exterioare N și M , iar $f(\gamma_{eff})$ reprezintă cantitatea cu care se reduce N_{cf} în vederea exprimării N_{int}^c și care va fi descrisă în detaliu în secțiunea următoare. Valoarea efortului axial N_{cf} se obține urmând procedura descrisă în cadrul secțiunilor cu conexiune totală (v. ecuația 5.44). Trebuie evidențiat că în cazul grinzilor mixte cu conectare totală ($\eta \geq 1$), gradul de acțiune compozită tinde spre infinit ($\gamma_{eff} \rightarrow \infty$), funcția $f(\gamma_{eff})$ tinde spre unu ($f(\gamma_{eff}) \rightarrow 1$), și în consecință $N_{int}^c \rightarrow N_{cf}$. În cazul grinzilor fără conectare ($\eta = 0$), gradul de acțiune compozită este zero ($\gamma_{eff} = 0$), și în consecință $N_{int}^c = 0$. Introduscând notațiile:

$$N_c = f(\gamma_{eff}) \cdot N_{cf} \quad (5.68)$$

$$N_s = N - N_c = N - f(\gamma_{eff}) \cdot N_{cf}$$

sistemul de ecuații (5.62) devine:

$$\begin{cases} \int_{A_c} \sigma(\varepsilon_c(\varepsilon_{0c}, \phi)) dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \sigma(\varepsilon_i(\varepsilon_{0c}, \phi)) A_{ri} - N_c = 0 \\ \int_{A_s} \sigma(\varepsilon_s(\varepsilon_{0s}, \phi)) dA_s - (N - N_c) = 0 \\ \int_{A_s} \sigma(\varepsilon_s(\varepsilon_{0s}, \phi)) y dA_s + \int_{A_c} \sigma(\varepsilon_c(\varepsilon_{0c}, \phi)) y dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \sigma(\varepsilon_i(\varepsilon_{0c}, \phi)) y_i A_{ri} - M = 0 \end{cases} \quad (5.69)$$

sau în formă matriceală condensată:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{f}^{int} - \mathbf{f}^{ext} = \mathbf{0} \quad (5.70)$$

unde $\mathbf{X} = [\varepsilon_{0c} \quad \varepsilon_{0s} \quad \phi]^T$ reprezintă vectorul necunoscutelor, iar \mathbf{f}^{int} și \mathbf{f}^{ext} sunt vectorii eforturilor interioare respectiv exterioare și pot fi exprimați astfel:

$$\mathbf{f}^{int} = \begin{bmatrix} N_{int}^c = \int_{A_c} \sigma(\varepsilon_c(\varepsilon_{0c}, \phi)) dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \sigma(\varepsilon_i(\varepsilon_{0c}, \phi)) A_{ri} \\ N_{int}^s = \int_{A_s} \sigma(\varepsilon_s(\varepsilon_{0s}, \phi)) dA_s \\ M_{int} = \int_{A_s} \sigma(\varepsilon_s(\varepsilon_{0s}, \phi)) y dA_s + \int_{A_c} \sigma(\varepsilon_c(\varepsilon_{0c}, \phi)) y dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \sigma(\varepsilon_i(\varepsilon_{0c}, \phi)) y_i A_{ri} \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

$$\mathbf{f}^{ext} = \begin{bmatrix} N_c \\ N - N_c \\ M \end{bmatrix}$$

Sistemul de ecuații (5.69) se rezolvă numeric folosind metoda Newton-Raphson, ținând cont că tensiunile sunt funcții implicite de deformațiile exprimate prin relația (5.60). Conform

metodei iterative Newton, soluția corespunzătoare iterației k+1 poate fi evaluată în funcție de soluția iterației k astfel:

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k - \mathbf{F}'(\mathbf{X}^k)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}^k), k \geq 0 \quad (5.72)$$

în care \mathbf{F}' reprezintă Jacobianul (sau matricea de rigiditate tangentă a secțiunii transversale) sistemului de ecuații neliniare (5.69) și poate fi exprimat astfel

$$\mathbf{F}' = \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{\text{int}}^c}{\partial \varepsilon_{0c}} & \frac{\partial N_{\text{int}}^c}{\partial \varepsilon_{0s}} & \frac{\partial N_{\text{int}}^c}{\partial \phi} \\ \frac{\partial N_{\text{int}}^s}{\partial \varepsilon_{0c}} & \frac{\partial N_{\text{int}}^s}{\partial \varepsilon_{0s}} & \frac{\partial N_{\text{int}}^s}{\partial \phi} \\ \frac{\partial M_{\text{int}}^s}{\partial \varepsilon_{0c}} + \frac{\partial M_{\text{int}}^c}{\partial \varepsilon_{0c}} & \frac{\partial M_{\text{int}}^s}{\partial \varepsilon_{0s}} + \frac{\partial M_{\text{int}}^c}{\partial \varepsilon_{0s}} & \frac{\partial M_{\text{int}}^s}{\partial \phi} + \frac{\partial M_{\text{int}}^c}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & k_{13} \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

sau explicit:

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{\partial N_c^{\text{int}}}{\partial \varepsilon_{0c}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{0c}} \left[\int_{A_c} \sigma(\varepsilon_c(\varepsilon_{0c}, \phi)) dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \sigma(\varepsilon_i(\varepsilon_{0c}, \phi)) A_{ri} \right] = \\ &= \int_{A_c} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_c} \frac{\partial \varepsilon_c}{\partial \varepsilon_{0c}} dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_i} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_{0c}} A_{ri} = \underbrace{\int_{A_c} E_{tc} dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} E_{tr} A_{ri}}_{(E_t A)_c} = (E_t A)_c; \\ k_{12} &= \frac{\partial N_c^{\text{int}}}{\partial \varepsilon_{0s}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{0s}} \left[\int_{A_c} \sigma(\varepsilon_c(\varepsilon_{0c}, \phi)) dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \sigma(\varepsilon_i(\varepsilon_{0c}, \phi)) A_{ri} \right] = \\ &= \int_{A_c} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_c} \frac{\partial \varepsilon_c}{\partial \varepsilon_{0s}} dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_i} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_{0s}} A_{ri} = 0; \\ k_{13} &= \frac{\partial N_c^{\text{int}}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\int_{A_c} \sigma(\varepsilon_c(\varepsilon_{0c}, \phi)) dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \sigma(\varepsilon_i(\varepsilon_{0c}, \phi)) A_{ri} \right] = \\ &= \int_{A_c} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_c} \frac{\partial \varepsilon_c}{\partial \phi} dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_i} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \phi} A_{ri} = \int_{A_c} E_{tc} (y-r) dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} E_{tr} (y_i - r) A_{ri} = \\ &= \underbrace{\int_{A_c} E_{tc} y dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} E_{tr} y_i A_{ri}}_{(E_t S)_c \text{ dala+armaturi}} - r \underbrace{\left(\int_{A_c} E_{tc} dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} E_{tr} A_{ri} \right)}_{(E_t A)_c \text{ dala+armaturi}} = (E_t S)_c - r(E_t A)_c; \\ k_{21} &= \frac{\partial N_s^{\text{int}}}{\partial \varepsilon_{0c}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{0c}} \left[\int_{A_s} \sigma(\varepsilon_s(\varepsilon_{0s}, \phi)) dA_s \right] = \int_{A_s} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_s} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \varepsilon_{0c}} dA_s = 0; \\ k_{22} &= \frac{\partial N_s^{\text{int}}}{\partial \varepsilon_{0s}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{0s}} \left[\int_{A_s} \sigma(\varepsilon_s(\varepsilon_{0s}, \phi)) dA_s \right] = \int_{A_s} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_s} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \varepsilon_{0s}} dA_s = \int_{A_s} E_{ts} dA_s = (E_t A)_s; \end{aligned} \quad (5.74)$$

$$\begin{aligned}
k_{23} &= \frac{\partial N_s^{int}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\int_{A_s} \sigma(\varepsilon_s(\varepsilon_{0s}, \phi)) dA_s \right] = \int_{A_s} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_s} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \phi} dA_s = \int_{A_s} E_{ts} y dA_s = (E_t S)_s; \\
k_{31} &= \frac{\partial M_s^{int}}{\partial \varepsilon_{0c}} + \frac{\partial M_c^{int}}{\partial \varepsilon_{0c}} = \\
&= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{0c}} \left[\int_{A_s} \sigma(\varepsilon_s(\varepsilon_{0s}, \phi)) y dA_s + \int_{A_c} \sigma(\varepsilon_c(\varepsilon_{0c}, \phi)) y dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \sigma(\varepsilon_i(\varepsilon_{0c}, \phi)) y_i A_{ri} \right] = \\
&= \int_{A_c} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_c} \frac{\partial \varepsilon_c}{\partial \varepsilon_{0c}} y dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_i} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_{0c}} y_i A_{ri} = \underbrace{\int_{A_c} E_{tc} y dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} E_{tr} y_i A_{ri}}_{(E_t S)_c \text{ dala+armatura}} = (E_t S)_c; \\
k_{32} &= \frac{\partial M_s^{int}}{\partial \varepsilon_{0s}} + \frac{\partial M_c^{int}}{\partial \varepsilon_{0s}} = \\
&= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{0s}} \left[\int_{A_s} \sigma(\varepsilon_s(\varepsilon_{0s}, \phi)) y dA_s + \int_{A_c} \sigma(\varepsilon_c(\varepsilon_{0c}, \phi)) y dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \sigma(\varepsilon_i(\varepsilon_{0c}, \phi)) y_i A_{ri} \right] = \\
&= \int_{A_s} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_s} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \varepsilon_{0s}} y dA_s = \int_{A_s} E_{ts} y dA_s = (E_t S)_s; \\
k_{33} &= \frac{\partial M_s^{int}}{\partial \phi} + \frac{\partial M_c^{int}}{\partial \phi} = \\
&= \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\int_{A_s} \sigma(\varepsilon_s(\varepsilon_{0s}, \phi)) y dA_s + \int_{A_c} \sigma(\varepsilon_c(\varepsilon_{0c}, \phi)) y dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \sigma(\varepsilon_i(\varepsilon_{0c}, \phi)) y_i A_{ri} \right] = \\
&= \int_{A_s} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_s} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \phi} y dA_s + \int_{A_c} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_c} \frac{\partial \varepsilon_c}{\partial \phi} y dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_i} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \phi} y_i A_{ri} = \\
&= \int_{A_s} E_{ts} y^2 dA_s + \int_{A_c} E_{tc} (y-r) y dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} E_{tr} (y_i - r) y_i A_{ri} = \\
&= \int_{A_s} E_{ts} y^2 dA_s + \underbrace{\int_{A_c} E_{tc} y^2 dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} E_{tr} y_i^2 A_{ri}}_{(E_t I)_c \text{ dala+armatura}} - r \left(\underbrace{\int_{A_c} E_{tc} y dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} E_{tr} y_i A_{ri}}_{(E_t S)_c \text{ dala+armatura}} \right) = \\
&= (E_t I)_s + (E_t I)_c - r(E_t S)_c;
\end{aligned}$$

unde, $E_t = d\sigma/d\varepsilon$ reprezintă modulul de elasticitate tangent al oțelului (s) și al betonului (c). În expresiile coeficienților de rigiditate k_{ij} , $(E_t A)_s$ și $(E_t A)_c$ indică rigiditatea axială a componentei de oțel respectiv a celei de beton cu aportul armăturilor, $(E_t S)_s$ și $(E_t S)_c$ reprezintă momentul static al profilului metalic respectiv al dalei în raport cu axa Oz iar $(E_t I)_s$ și $(E_t I)_c$ denotă momentele de inerție ale fiecărei componente calculate în raport cu axa Oz . Procesul iterativ pornește cu aproximația inițială 0 pentru necunoscutele ε_{0c} , ε_{0s} și ϕ , iar soluția este obținută după doar câteva iterații prin aplicarea metodei rapid convergente Newton dată de relația (5.72). Criteriul de convergență admis este dat de raportul dintre norma vectorului forțelor neechilibrate și norma vectorului forțelor totale aplicate (v. relația 5.15). Astfel, pentru valori cunoscute a efortului axial N și a momentului încovoietor M , se

determină starea de tensiune și deformație pe înălțimea secțiunii iar apoi se poate calcula rigiditatea la efort axial și la încovoiere, urmând etapele descrise în cele ce urmează.

Matricea de rigiditate tangentă a secțiunii transversale relevă schimbări minore ale deformațiilor ca urmare a unor modificări de același ordin ale forțelor aplicate. Relațiile incrementale între eforturi și deformații poate fi exprimate astfel:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & 0 & k_{13} \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_{0c} \\ \Delta\varepsilon_{0s} \\ \Delta\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta N_c \\ \Delta N_s \\ \Delta M \end{bmatrix} \quad (5.75)$$

unde coeficienții k_{ij} , ai matricei de rigiditate tangente, sunt calculați în baza relațiilor (5.74) folosind tensiunile și deformațiile corespunzătoare unei stări de echilibru, sub acțiunea eforturilor exterioare date; ΔN_c , $\Delta N_s = \Delta N - \Delta N_c$ reprezintă eforturi axiale incrementale în dala de beton respectiv în profilul metalic, iar ΔM reprezintă momentul încovoiitor incremental. Se definește rigiditatea la încovoiere tangentă, ca fiind raportul dintre momentul încovoiitor incremental și curbura incrementală, efortul axial menținându-se constant, $\Delta N = 0$ (v. Fig. 5.7):

$$(EI)_t = \left. \frac{\Delta M}{\Delta\phi} \right|_{\Delta N=0} \quad (5.76)$$

Sistemul matriceal dat de relația (5.71) poate fi scris în formă desfășurată astfel:

$$\begin{cases} k_{11}\Delta\varepsilon_{0c} + k_{13}\Delta\phi = \Delta N_c = f(\gamma_{eff}) \cdot \Delta N_{cf} \\ k_{22}\Delta\varepsilon_{0s} + k_{23}\Delta\phi = \Delta N_s = -f(\gamma_{eff}) \cdot \Delta N_{cf} \\ k_{31}\Delta\varepsilon_{0c} + k_{32}\Delta\varepsilon_{0s} + k_{33}\Delta\phi = \Delta M \end{cases} \quad (5.77)$$

În relațiile de mai sus s-au exprimat eforturile axiale incrementale ΔN_c și ΔN_s în funcție de efortul axial incremental în dala de beton în ipoteza acțiunii compozite totale, ΔN_{cf} prin intermediul funcției $f(\gamma_{eff})$. Succesiv, se exprimă deformațiile axiale incrementale $\Delta\varepsilon_{0c}$ și $\Delta\varepsilon_{0s}$ din prima respectiv a doua ecuație a sistemului (5.77) în funcție de curbura incrementală $\Delta\phi$. Înlocuind expresiile obținute în ultima ecuație a sistemului (5.77), rezultă:

$$k_{31} \frac{f(\gamma_{eff}) \cdot \Delta N_{cf} - k_{13}\Delta\phi}{k_{11}} + k_{32} \frac{-f(\gamma_{eff}) \cdot \Delta N_{cf} - k_{23}\Delta\phi}{k_{22}} + k_{33}\Delta\phi = \Delta M \quad (5.78)$$

Se rearanjează termenii ecuației, prin punerea în evidență a raportului $\Delta M / \Delta\phi$, iar apoi ținând cont de relația (5.76) se obține expresia rigidității la încovoiere tangente:

$$(EI)_t = \frac{a}{1 - b \cdot f(\gamma_{eff}) \frac{\Delta N_{cf}}{\Delta M}} \quad (5.79)$$

unde:

$$\begin{aligned} a &= k_{33} - \frac{k_{31}k_{13}}{k_{11}} - \frac{k_{32}k_{23}}{k_{22}}; \\ b &= \frac{k_{31}}{k_{11}} - \frac{k_{32}}{k_{22}} \end{aligned} \quad (5.80)$$

iar ΔN_{cf} reprezintă efortul axial incremental în dala de beton în cazul acțiunii compozite totale și se calculează ca diferența între valoare aferentă unui moment încovoietor incrementat $M+\Delta M$ respectiv cea aferentă momentului încovoietor M :

$$\Delta N_{cf} = N_{cf}^{M+\Delta M} - N_{cf}^M \quad (5.81)$$

Relația (5.79) poate fi utilizată și pentru evaluarea rigidității elastice la încovoiere a secțiunilor mixte oțel-beton cu acțiune compozită parțială. Observând că poziția dalei de beton este descrisă de variabila $y=y'+r$ (v. Fig.5.10), distribuția deformațiilor totale în componenta de beton poate fi evaluată într-o nouă formă astfel:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{0c} + \phi \cdot y' \quad (5.82)$$

Folosind această relație și ținând cont că, în limitele domeniului elastic, este validă legea lui Hooke între tensiuni și deformații, coeficienții k_{ij} ai matricei de rigiditate secționale pot fi scriși sub următoarea formă:

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{\partial N_c^{int}}{\partial \varepsilon_{0c}} = E_c A_c; \\ k_{12} &= \frac{\partial N_c^{int}}{\partial \varepsilon_{0s}} = 0; \\ k_{13} &= \frac{\partial N_c^{int}}{\partial \phi} = \underbrace{\int_{A_c} E_c \cdot y' dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} E_r y'_i A_{ri}}_{E_c S_c^{local} \text{ dala+armaturi}} = E_c S_c^{local} = 0; \\ k_{21} &= \frac{\partial N_s^{int}}{\partial \varepsilon_{0c}} = 0; \\ k_{22} &= \frac{\partial N_s^{int}}{\partial \varepsilon_{0s}} = E_s A_s; \\ k_{23} &= \frac{\partial N_s^{int}}{\partial \phi} = E_s S_s = 0; \\ k_{31} &= \frac{\partial M_s^{int}}{\partial \varepsilon_{0c}} + \frac{\partial M_c^{int}}{\partial \varepsilon_{0c}} = \int_{A_c} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_c} \frac{\partial \varepsilon_c}{\partial \varepsilon_{0c}} (y' + r) dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_i} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_{0c}} (y'_i + r) A_{ri} = \quad (5.83) \\ &= \int_{A_c} E_c (y' + r) dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} E_r (y'_i + r) A_{ri} = \\ &= \underbrace{\int_{A_c} E_c \cdot y' dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} E_r \cdot y'_i A_{ri}}_{E_c S_c^{local} \text{ dala+armatura}} + r \left(\underbrace{\int_{A_c} E_c dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} E_r A_{ri}}_{E_c A_c \text{ dala+armatura}} \right) = r(E_c A_c); \\ k_{32} &= \frac{\partial M_s^{int}}{\partial \varepsilon_{0s}} + \frac{\partial M_c^{int}}{\partial \varepsilon_{0s}} = \int_{A_s} E_s y dA_s = E_s S_s = 0; \\ k_{33} &= \frac{\partial M_s^{int}}{\partial \phi} + \frac{\partial M_c^{int}}{\partial \phi} = \\ &= \int_{A_s} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_s} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \phi} y dA_s + \int_{A_c} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_c} \frac{\partial \varepsilon_c}{\partial \phi} (y' + r) dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_i} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \phi} (y'_i + r) A_{ri} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{A_s} E_s y^2 dA_s + \int_{A_c} E_c y'(y' + r) dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} E_r y'_i (y'_i + r) A_{ri} = \\
&= \int_{A_s} E_s y^2 dA_s + \underbrace{\int_{A_c} E_c y'^2 dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} E_r y'_i{}^2 A_{ri}}_{E_c I_c^{local} \text{ dala+armatura}} + r \underbrace{\left(\int_{A_c} E_c y' dA_c + \sum_{i=1}^{N_r} E_r y'_i A_{ri} \right)}_{E_c S_c^{local} \text{ dala+armatura}} = \\
&= E_s I_s + E_c I_c^{local} ;
\end{aligned}$$

În relațiile de mai sus s-a ținut cont că momentele statice, ale dalei de beton (S_c^{local}) respectiv ale profilului metalic (S_s), calculate în raport cu axele de greutate proprii, sunt nule atâta timp cât comportarea materialelor este perfect elastică. Indicativul *local* reflectă raportarea caracteristicilor secționale la axa de greutate proprie a dalei de beton. Înlocuind expresiile termenilor matricei elastice de rigiditate în relațiile (5.80), se obține, în baza formulei (5.79), expresia rigidității elastice la încovoiere:

$$(EI)_{el} = \frac{E_s I_s + E_c I_c^{local}}{1 - r \cdot f(\gamma_{eff})} \frac{\Delta N_{cf}^e}{\Delta M} \quad (5.84)$$

unde $E_c I_c^{local}$ reprezintă rigiditatea la încovoiere a dalei de beton calculată în raport cu axa care trece prin centrul ei de greutate. Pentru cazul particular $f(\gamma_{eff}) = 0$, relația (5.84) devine:

$$(EI)^0 = E_s I_s + E_c I_c^{local} \quad (5.85)$$

și reprezintă rigiditatea la încovoiere a secțiunilor mixte oțel-beton solicitate în domeniul elastic corespunzătoare cazului în care acțiunea compozită este zero (fără interacțiune între componente). Relația (5.84) poate fi exprimată într-o formă mult mai sugestivă prin determinarea valorii ΔN_{cf}^e ce semnifică, efortul axial incremental în dala de beton în stadiul elastic de comportare, aferent acțiunii compozite totale și poate fi calculat prin intermediul relației (5.81), ca diferența între valoarea $N_{cf}^{e,M+\Delta M}$ corespunzătoare unui nivel de solicitare descris de eforturile N , $M+\Delta M$ respectiv valoarea $N_{cf}^{e,M}$ aferent eforturilor exterioare N , M . În vederea evaluării celor două valori ale efortului axial, se rezolvă sistemul de ecuații (5.41) pentru cele două perechi de eforturi mai sus menționate. Astfel, sub acțiunea perechii de eforturi N , M și sub incidența domeniului elastic de comportare, sistemul de ecuații (5.41), se rescrie astfel:

$$\left\{ \begin{aligned}
&\int_{A_s} E_s (\varepsilon_0^M + \phi^M \cdot y) dA_s + \int_{A_c} E_c (\varepsilon_0^M + \phi^M (y' + r)) dA_c + \sum_{i=1}^{N_{rs}} E_r (\varepsilon_0^M + \phi^M (y'_i + r)) A_{ri} - N = 0 \\
&\int_{A_s} E_s (\varepsilon_0^M + \phi^M \cdot y) y dA_s + \int_{A_c} E_c (\varepsilon_0^M + \phi^M (y' + r)) (y' + r) dA_c + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N_r} E_r (\varepsilon_0^M + \phi^M (y'_i + r)) (y'_i + r) A_{ri} - M = 0
\end{aligned} \right. \quad (5.86)$$

sau, mai departe:

$$\begin{cases} \varepsilon_0^M (E_s A_s + E_c A_c) + \phi^M (E_s S_s + E_s S_c^{local} + r(E_c A_c)) = N \\ \varepsilon_0^M (E_s S_s + E_s S_c^{local} + r(E_c A_c)) + \phi^M (E_s I_s + E_c I_c^{local} + 2rE_s S_c^{local} + r^2(E_c A_c)) = M \end{cases} \quad (5.87)$$

unde ε_0^M și ϕ^M reprezintă necunoscutele sistemului de ecuații și caracteristicile secționale ale dalei de beton și includ și contribuția armăturilor. Ținând cont că momentele statice, ale dalei de beton (S_c^{local}) respectiv ale profilului metalic (S_s), calculate în raport cu axele de greutate proprii, sunt nule, se determină necunoscutele ε_0^M și ϕ^M ale sistemului prin exprimarea primei necunoscute din prima ecuație și înlocuirea ei în cea de-a doua. Astfel obținem:

$$\begin{cases} \varepsilon_0^M = \frac{N}{E_c A_c + E_s A_s} - \phi^M \cdot r \frac{E_c A_c}{E_c A_c + E_s A_s} \\ \phi^M \left(-r^2 \frac{E_c^2 A_c^2}{E_c A_c + E_s A_s} + E_s I_s + E_s I_c^{local} + r^2 E_c A_c \right) = M - N \cdot r \frac{E_c A_c}{E_c A_c + E_s A_s} \end{cases} \quad (5.88)$$

Folosind relația (5.88) ce exprimă rigiditatea elastică la încovoiere a secțiunilor mixte oțel-beton în ipoteza acțiunii compozite totale, sistemul (5.88) devine:

$$\begin{cases} \varepsilon_0^M = \frac{N}{E_c A_c + E_s A_s} + \frac{N}{(EI)^\infty} r^2 \frac{E_c^2 A_c^2}{E_c A_c + E_s A_s} - \frac{M}{(EI)^\infty} \cdot r \frac{E_c A_c}{E_c A_c + E_s A_s} \\ \phi^M = \frac{M}{(EI)^\infty} - \frac{N}{(EI)^\infty} r \frac{E_c A_c}{E_c A_c + E_s A_s} \end{cases} \quad (5.89)$$

Știind că, în limitele domeniului elastic, efortul axial în dala de beton aferent acțiunii compozite totale poate fi exprimat ca:

$$N_{cf}^{e,M} = \varepsilon_0^M \cdot E_c A_c + \phi^M \cdot r \cdot E_c A_c \quad (5.90)$$

Urmând etapele (5.86) - (5.90), se determină efortul axial elastic $N_{cf}^{e,M+\Delta M}$ în dala de beton, în ipoteza acțiunii compozite totale, când secțiunea este supusă acțiunii simultane a eforturilor exterioare N , $M+\Delta M$. Aplicând relația (5.81), se obține valoarea efortului axial elastic incremental din dala de beton în condițiile acțiunii compozite totale:

$$\Delta N_{cf}^e = N_{cf}^{e,M+\Delta M} - N_{cf}^{e,M} = \frac{\Delta M}{(EI)^\infty} \cdot r \frac{E_c A_c E_s A_s}{E_c A_c + E_s A_s} \quad (5.91)$$

Înlocuind expresia obținută în relația (5.84) și ținând cont de relațiile (5.58) și (5.85) ce definesc rigiditatea elastică la încovoiere pentru secțiunile mixte cu acțiune compozită totală respectiv fără conectare, se obține o nouă formă a rigidității elastice la încovoiere a secțiunilor mixte oțel-beton, în ipoteza acțiunii compozite parțiale:

$$(EI)_{el} = \frac{(EI)^0}{1 - f(\gamma_{eff}) \frac{(EI)^\infty - (EI)^0}{(EI)^\infty}} \quad (5.92)$$

Dacă conexiunea dintre placa de beton și grinda metalică este rigidă atunci $\gamma_{eff} \rightarrow \infty$, $f(\gamma_{eff}) = 1$, și, în consecință, $(EI)_{el} = (EI)^\infty$. În cazul contrar, când nu există conectare între cele două componente, atunci $\gamma_{eff} = 0$, $f(\gamma_{eff}) = 0$, și, în consecință, $(EI)_{el} = (EI)^0$.

Rigiditatea axială tangentă a secțiunii transversale este calculată ca suma rigidităților axiale tangente ale celor două componente:

$$(EA)_t = (EA)_{ct} + (EA)_{st} \quad (5.93)$$

unde fiecare termen al sumei se definește ca raportul dintre efortul axial incremental al componentei respective și deformația axială corespunzătoare, momentul încovoietor rămânând constant ($\Delta M=0$):

$$(EA)_{tc} = \left. \frac{\Delta N_c}{\Delta \varepsilon_{0c}} \right|_{\Delta M=0} \quad (5.94)$$

$$(EA)_{ts} = \left. \frac{\Delta N_s}{\Delta \varepsilon_{0s}} \right|_{\Delta M=0}$$

Rezolvând sistemul (5.77) ținând cont de restricția mai sus amintită, se obțin următoarele expresii pentru rigiditățile axiale tangente aferente componentei de beton respectiv celei metalice:

$$(EA)_{tc} = \frac{k_{11}(k_{23}^2 - k_{22}k_{33}) + k_{13}k_{22}k_{31}}{k_{23}^2 - k_{22}k_{33} + k_{13}k_{23}}, \quad (5.95)$$

$$(EA)_{ts} = \frac{k_{22}(k_{11}k_{33} - k_{13}k_{31}) - k_{11}k_{23}^2}{k_{11}k_{33} - k_{13}k_{31} - k_{31}k_{23}}$$

În relațiile de mai sus s-a ținut cont că $k_{23} = k_{32}$. Se observă cu ușurință, că în limitele domeniului elastic, rigiditatea axială a secțiunii transversale se reduce la suma algebrică dintre rigiditatea axială a dalei ($E_c A_c$) și cea a profilului ($E_s A_s$):

$$(EA)_{el} = (k_{11} + k_{22})_{el} = E_c A_c + E_s A_s \quad (5.96)$$

unde expresiile coeficienților k_{ij} se evaluează conform relațiilor (5.83). Evaluând rigiditățile tangente, la încovoiere $(EI)_t$ și la efort axial $(EA)_t$ într-un număr discret de secțiuni transversale localizate în lungul elementului în punctele schemei de integrare adoptate, răspunsul elasto-plastic al elementului se determină ca sumă ponderată a răspunsurilor elasto-plastice ale acestor secțiuni transversale, așa cum se va arăta în subcapitolul 5.4 al acestei lucrări. Este important de scos în evidență că singura sursă de inexactitate în evaluarea răspunsului inelastic al secțiunilor mixte oțel-beton cu acțiune compozită parțială se datorează modului aproximativ de considerare a efortului axial în dala de beton ca funcție de acțiunea compozită.

5.3.3 Evaluarea efortului axial din componenta de beton. Grad efectiv de acțiune compozită

În subcapitolul anterior s-au prezentat etapele necesare determinării caracteristicilor de rigiditate secționale în domeniul elastic și elasto-plastic de comportare al secțiunilor transversale mixte oțel-beton, în condițiile acțiunii compozite parțiale dintre dala de beton și grinda metalică. Procedura este formulată în jurul ipotezei conform căreia efortul axial interior din dala de beton poate fi estimat în funcție de gradul de acțiune compozită. În cadrul acestei secțiuni se deduc expresiile pentru estimarea gradului de acțiune compozită, atât pentru domeniul de comportare elastic cât și cel post-elastic.

Girhammar, propune în lucrările [46–48] relații pentru evaluarea rigidității elastice la încovoiere pentru grinzi mixte oțel-beton cu interacțiune parțială. Se arată că această

rigiditate este influențată de doi parametri adimensionali: parametrul ce definește intensitatea acțiunii compozite (*partial composite action parameter*) αL și parametrul dat prin raportul dintre rigiditatea elastică la încovoiere pentru secțiunile mixte cu acțiune compozită totală respectiv fără conectare. Astfel, relația propusă în *Girhammar* [46] pentru rigiditatea elastică la încovoiere pentru grinzi mixte oțel-beton cu interacțiune parțială este:

$$(EI)_{eff} = \left[1 + \frac{(EI)^\infty / (EI)^0 - 1}{1 + \left(\frac{\mu}{\pi}\right)^2 (\alpha L)^2} \right]^{-1} \cdot (EI)^\infty \quad (5.97)$$

în care:

$$\alpha L = \sqrt{\frac{k}{EA} \cdot \frac{(EI)^\infty}{(EI)^0}} \cdot L \quad (5.98)$$

unde k reprezintă rigiditatea conexiunii, L denotă lungimea elementului, $(EI)^\infty$ și $(EI)^0$ sunt definite de relațiile (5.58) și (5.85). Făcând următoarea notație:

$$\overline{EA} = \frac{E_c A_c E_s A_s}{E_c A_c + E_s A_s} \quad (5.99)$$

expresia rigidității elastice la încovoiere corespunzătoare acțiunii compozite totale poate fi scrisă într-o nouă formă astfel:

$$(EI)^\infty = E_s I_s + E_c I_c^{local} + r^2 \overline{EA} \quad (5.100)$$

Studiile parametrice întreprinse de *Girhammar* au reliefat faptul că relația aproximativă de evaluare a rigidității elastice la încovoiere (5.97) poate fi utilizată cu succes pentru calculul deplasărilor, eforturilor și tensiunilor în cazul elementelor structurale mixte oțel-beton cu acțiune compozită parțială, indiferent de condițiile de rezemare și încărcare. În relația (5.97), μ reprezintă coeficientul de flambaj și poate avea valorile binecunoscute pentru cazul elementelor cu *interacțiune* totală. De exemplu, $\mu=1$ pentru bara simplu rezemată, $\mu=0.7$ pentru bara încastrat-articulată și $\mu=0.5$ pentru bara dublu încastrată. Expresia (5.97) poate fi rearanjată și scrisă sub următoarea formă:

$$(EI)_{eff} = \frac{(EI)^0}{1 - \left[\frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{(\mu\alpha L)^2}} \right] \frac{(EI)^\infty - (EI)^0}{(EI)^\infty}} \quad (5.101)$$

Comparând relația de mai sus cu expresia obținută în subcapitolul anterior pentru rigiditatea elastică la încovoiere a secțiunilor mixte oțel-beton sub incidența acțiunii compozite parțiale (relația 5.92), se deduce cu ușurință expresia funcției $f(\gamma_{eff})$ corespunzătoare domeniului elastic, notată cu $f(\gamma)$:

$$f(\gamma) = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{(\gamma)^2}} = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{(\mu\alpha L)^2}} \quad (5.102)$$

unde:

Această pagină a fost eliminată din conținutul electronic al acestei lucrări

secțiunii curente de calcul. În relația (5.108) i_c reprezintă distanța dintre conectori măsurată în lungul elementului, iar $N_{\text{int},(\pm i_c/2)}^c$ denotă efortul axial interior în placa de beton calculat la distanțele $\pm i_c/2$ față de secțiunea curentă de calcul.

În Fig. 5.11 legea de comportare neliniară a conectorilor adoptată în prezenta procedura de analiză. Analizând curba de comportare a conectorilor din Fig. 5.11 descrisă de relația propusă de *Ollgaard* [37], se observă că pentru valori mici ale forței P_c , caracterul neliniar al curbei nu este unul pronunțat. Astfel, dacă forța P_c calculată cu relația (5.107) este mai mică sau cel mult egală cu jumătate din capacitatea portantă a conectorului P_{sc} atunci rigiditatea conexiunii se consideră a fi constantă și egală cu:

$$k_{50\%} = \frac{K_{50\%}}{i_c} \quad (5.109)$$

unde $K_{50\%}$ reprezintă rigiditatea conectorului aferentă unei forțe egale cu jumătate din capacitatea portantă a conectorului (v. Fig. 5.11).

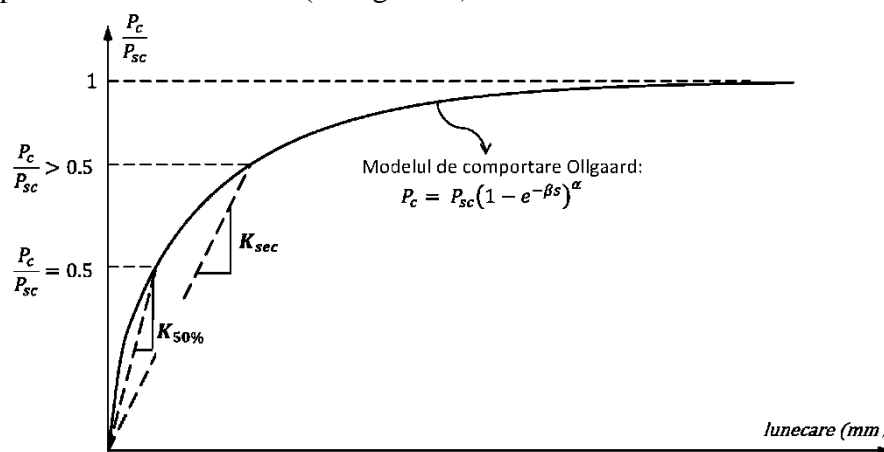


Fig. 5.11 Modelul neliniar de comportare al conectorilor. Definierea rigidității secante a conectorului

Împărțind valoarea rigidității $K_{50\%}$ la distanța dintre conectori i_c se realizează o continuizare ipotetică a rigidității conexiunii, acest concept de conexiune continuă reprezentând o ipoteză a metodei propuse. Trebuie menționat că în cazul dispunerii mai multor conectori într-o secțiune curentă, valoarea $K_{50\%}$ se multiplică cu numărul de conectori de pe un rând. Pentru valori ale forței de forfecare P_c mai mari decât 50% din P_{sc} , se adoptă o rigiditate secantă a conectorului și implicit a conexiunii (v. Fig. 5.11). De exemplu, optând pentru modelul de comportare al conectorilor propus de *Ollgaard* [37], rigiditatea conexiunii poate fi evaluată prin intermediul următoarei relații:

$$k_{\text{sec}} = \frac{K_{\text{sec}}}{i_c} = \frac{P_c}{i_c \cdot s} = \frac{P_{sc} (1 - e^{-\beta s})^\alpha}{i_c \cdot s} \quad (5.110)$$

unde P_{sc} reprezintă capacitatea portantă a conectorilor iar α și β sunt doi parametri ce descriu forma și implicit rigiditatea curbei. Valoarea alunecării longitudinale (s) ce intervine în relația (5.110) poate fi calculată pe baza relației propuse de *Ollgaard*:

$$s = -\frac{1}{\beta} \ln \left(1 - \left(\frac{P_c}{P_{sc}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \quad (5.111)$$

Urmând procedura descrisă anterior, rigiditatea conexiunii k_{sec} poate fi actualizată la fiecare pas de încărcare, în funcție de valoarea efortului axial în secțiunea curentă de calcul. Reducerea rigidității conexiunii, în zona de moment negativ, poate fi inclusă în procedura curentă prin modificarea relației propuse de *Ollgaard* [37] conform observațiile experimentale raportate de *Johnson* [140].

Caracteristicile de rigiditate secționale $(EI)_x^\infty$, $(EI)_x^0$ și $(\overline{EA})_x$ ce intervin în calculul parametrului $\alpha(x)$ conform relației (5.106), se actualizează în cadrul fiecărui ciclu de încărcare pe baza stării de tensiune și deformație determinate din condițiile de echilibru aferente unei stări de solicitare corespunzătoare ciclului anterior de încărcare. Deformațiile și tensiunile se determină numeric prin rezolvarea sistemului de ecuații neliniare (5.69), așa cum s-a arătat în secțiunea anterioară. Expresiile caracteristicilor de rigiditate secționale sunt:

$$\begin{aligned} (EI)_x^0 &= \int_{A_s} E_{ts} y^2 dA_s + \int_{A_c} E_{tc} (y-r)y dA_c + \sum_{i=1}^{N_{rs}} E_{tr} (y_i - r) y_i A_{rsi}; \\ (EA)_{x,c} &= \int_{A_c} E_{tc} dA_c + \sum_{i=1}^{N_{rs}} E_{tr} A_{rsi}; \\ (EA)_{x,s} &= \int_{A_s} E_{ts} dA_s; \\ (\overline{EA})_x &= \frac{(EA)_{x,s} \cdot (EA)_{x,c}}{(EA)_{x,s} + (EA)_{x,c}}; \\ (EI)_x^\infty &= (EI)_x^0 + r^2 \cdot (\overline{EA})_x; \end{aligned} \quad (5.112)$$

Expresiile (5.112) se calculează în funcție de modulul de elasticitate tangent $E_t = d\sigma/d\varepsilon$ al oțelului (s), betonului (c) respectiv al barelor de armătură (r). Trebuie menționat că în domeniul elasto-plastic de comportare, $(EI)_x^\infty$ nu reprezintă rigiditatea la încovoiere tangentă a secțiunilor cu acțiune compozită totală. Această rigiditate poate fi evaluată în baza relației (5.79) urmând procedura descrisă în subcapitolul anterior.

Se observă cu ușurință, că odată cu dezvoltarea zonelor plastice aferente domeniului elasto-plastic de comportare, parametrul $\alpha(x)$ ce definește gradul de acțiune compozită prin relația (5.105) are valori distincte de la o secțiune transversală la alta, rezultând astfel valori distincte pentru $\gamma(x)$. În vederea evitării procesului complex de calcul ce ar rezulta prin considerarea valorilor distincte de la secțiune la secțiune ale gradului de acțiune compozită, în cele ce urmează se definește un grad mediu de acțiune compozită (γ_{eff}), considerat constant pe toată lungimea elementului analizat:

$$\gamma_{eff} = \mu L \left(\frac{1}{L} \int_0^L \alpha(x) dx \right) = \mu L \left(\int_0^1 \alpha(\xi L) d\xi \right); \quad \xi = \frac{x}{L} \quad (5.113)$$

Integrala se evaluează aplicând metoda Gauss-Lobatto, așa cum se va descrie în cadrul

secțiunii ce tratează analiza la nivel de element.

În concluzie, în vederea aplicării metodei propuse pentru determinarea răspunsului elasto-plastic al secțiunilor transversale oțel-beton cu acțiune compozită parțială, este necesară evaluarea prealabilă a gradului de acțiune compozită ținând cont de caracteristicile de rigiditate determinate pe baza stării de tensiune și deformație aferente pasului anterior de încărcare. În acest sens, se evaluează gradul de acțiune compozită în fiecare secțiune transversală caracteristică (în punctele schemei de integrare adoptate), iar apoi se calculează gradul mediu de acțiune compozită (γ_{eff}) în baza relației (5.113). Mai departe, valoarea γ_{eff} este folosită pentru evaluarea efortului axial interior din dala de beton, ca o fracțiune din același efort dar calculat sub incidența interacțiunii totale (N_{cf}):

$$N_{int}^c = f(\gamma_{eff}) \cdot N_{cf} \quad (5.114)$$

unde:

$$f(\gamma_{eff}) = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{(\gamma_{eff})^2}} \quad (5.115)$$

Așa cum s-a mai menționat, gradul de conectare (concept întâlnit în principalele norme de proiectare) este asociat cu caracteristica de rezistență a conexiunii dintre componentele elementului mixt însă este în legătură directă cu gradul de interacțiune, concept asociat cu rigiditatea conexiunii. În consecință gradul de conectare η , se regăsește în gradul de acțiune compozită γ_{eff} , prin intermediul parametrului adimensional αL . De exemplu, gradului de conectare η , îi este asociat un număr de conectori n ce trebuie dispuși pe o lungime critică l_c , rezultând astfel distanța $i_c = l_c/n$ între conectori. Acestei distanțe i_c i se asociază o rigiditate secantă a conexiunii (k_{sec}) prin intermediul relației (5.110) sau (5.109) (în funcție de nivelul de solicitare al conectorilor). O creștere a gradului de conectare, implică sporirea numărului de conectori și automat micșorarea distanței dintre ei, ducând astfel la mărirea valorii rigidității secante a conexiunii (k_{sec}) și implicit a gradului de acțiune compozită (γ_{eff}). Se poate concluziona că majorarea rezistenței conexiunii implică și majorarea rigidității acesteia. Dacă gradul de conectare $\eta \geq 1$ (numărul de conectori dispuși este mai mare decât cel ce asigură conectarea totală) atunci gradul de acțiune compozită tinde spre infinit ($\gamma_{eff} \rightarrow \infty$) și în consecință $f(\gamma_{eff}) \rightarrow 1$.

În cele ce urmează se prezintă succesiunea etapelor necesare pentru determinarea caracteristicilor de rigiditate ale secțiunilor transversale oțel-beton cu acțiune compozită parțială în cadrul unui increment de încărcare. Astfel:

1. La începutul fiecărui pas de încărcare se cunoaște gradul mediu de acțiune compozită (γ_{eff}) calculat în funcție de caracteristicile de rigiditate evaluate în pasul anterior de încărcare (vezi relația 5.113). În cadrul primului increment, se folosește gradul elastic de acțiune compozită calculat cu relația (5.103). Efortul axial exterior N este cunoscut.
2. Se evaluează momentul încovoietor M_k ($k=1, n$) în fiecare din cele n secțiuni transversale monitorizate, localizate în lungul elementului în punctele schemei de integrare adoptate. Cunoscând valoarea momentului încovoietor solicitant, în fiecare secțiune transversală de control k se efectuează următoarele operații:

- 2.1. Se determină efortul axial interior în dala de beton în ipoteza acțiunii compozite totale, $N_{cf,k}^M$, din acțiunea eforturilor N și M_k (relația 5.44). Se repetă calculul pentru combinația de eforturi N și $M_k + \Delta M$, obținându-se valoarea $N_{cf,k}^{M+\Delta M}$. Se calculează valoarea efortului axial incremental din dala de beton, $\Delta N_{cf,k} = N_{cf,k}^{M+\Delta M} - N_{cf,k}^M$, necesară pentru calculul rigidității la încovoiere tangente conform relației (5.81).
- 2.2. Se evaluează efortul axial interior în dala de beton sub incidența acțiunii compozite parțiale (cf. relației 5.67), ca o fracțiune din valoare $N_{cf,k}^M$ determinată anterior.
- 2.3. Se rezolvă sistemul de ecuații neliniare (5.69), obținându-se necunoscutele ε_{0c} , ε_{0s} și ϕ aferente nivelului de solicitare N , M_k .
- 2.4. Se calculează coeficienții matricei de rigiditate tangente cf. relațiilor (5.74).
- 2.5. Se evaluează rigiditatea tangentă la încovoiere $(EI)_{t,k}$ (cf. 5.79) și la efort axial $(EA)_{t,k}$ (cf. 5.93).
- 2.6. Se calculează caracteristicile secționale de rigiditate $(EI)_k^\infty$, $(EI)_k^0$ și $(\overline{EA})_k$, cf. relațiilor (5.112), necesare evaluării parametrului α_k . Se determină rigiditatea secantă a conexiunii (k_{sec}) folosind expresia (5.110) sau (5.109) în funcție de nivelul de solicitare al conectorilor. Se evaluează parametrul α_k (cf. 5.106).
3. Se formează vectorul forțelor nodale echivalente și matricea de rigiditate tangentă a elementului ca sumă ponderată a caracteristicilor secționale de rigiditate ($(EI)_{t,k}$ și $(EA)_{t,k}$) calculate în etapa 2.5 pentru fiecare secțiune a schemei de integrare adoptate.
4. Se calculează noua valoare a gradului mediu de acțiune compozită prin aplicarea regulii de integrare Gauss-Lobatto a parametrilor α_k (cf. relației 5.113), determinați în etapa 2.6 pentru fiecare secțiune transversală de control.

5.3.4 Evaluarea eforturilor interioare și a coeficienților matricei tangente secționale de rigiditate

Această secțiune își propune să descrie modul de evaluare a integralelor de suprafață ce intervin în definirea eforturilor interioare și a coeficienților matricei tangente de rigiditate. Metoda de cuadratura folosită în această lucrare se bazează pe teorema Green conform căreia integralele de suprafață se transformă în integrale curbilini pe conturul secțiunilor. Acest procedeu s-a dovedit a fi foarte eficient și rapid deoarece integrarea tensiunilor trebuie evaluată într-un număr redus de puncte de pe conturul secțiunii. În vederea aplicării acestui procedeu de integrare numerică este necesară o transformare de variabile astfel încât câmpul tensiunilor să devină uniform într-o direcție particulară definită de poziția instantanee a axei neutre [4]. Această particularitate poate fi realizată prin rotirea sistemului de axe la care s-a raportat secțiunea (zOy) cu unghiul θ obținându-se astfel un nou sistem de axe ortogonale $\xi O\eta$ în care axa $O\xi$ este paralelă cu axa neutră iar axa $O\eta$ este perpendiculară pe aceasta (v.

Fig. 5.6). În cele ce urmează se descrie modul de evaluare a integralelor de suprafață pentru calculul eforturilor interioare și al coeficienților matricei tangente de rigiditate pentru cazul general al secțiunii de formă oarecare din Fig. 5.6. Pentru secțiunile prezentate în Fig. 5.9 și Fig.5.10 evaluarea integralelor de suprafață se face prin același procedeu de transformare a acestora în integrale curbilinii pe contur, însă nu mai este necesară rotirea sistemului de axe deoarece câmpul de tensiuni este uniform în direcția paralelă (Oz) cu axa neutră. Revenind la cazul secțiunii de formă arbitrară, coordonatele z, y pot fi descrise prin intermediul noilor coordonate ξ, η astfel:

$$\begin{aligned} z &= \xi \cos \theta + \eta \sin \theta \\ y &= -\xi \sin \theta + \eta \cos \theta \end{aligned} \quad (5.116)$$

unde $\operatorname{tg} \theta = \phi_y / \phi_z$. În acest fel câmpul tensiunilor devine uniform în direcția paralelă cu axa neutră (ξ), și în consecință, deformațiile, tensiunile și modulul de elasticitate tangent pot fi exprimate în funcție de o singură coordonată (η):

$$\begin{aligned} \varepsilon(\xi, \eta) &= \varepsilon(\eta) = \varepsilon_0 + \phi \cdot \eta \\ \sigma(\varepsilon(\xi, \eta)) &= \sigma(\varepsilon(\eta)) \\ E_t(\xi, \eta) &= E_t(\eta) \end{aligned} \quad (5.117)$$

unde ϕ este curbura totală calculată cu relația:

$$\phi = \sqrt{\phi_z^2 + \phi_y^2} \quad (5.118)$$

În urma acestor transformări de coordonate, eforturile secționale interioare pot fi evaluate cu următoarele expresii:

$$\begin{aligned} N_{\text{int}} &= \iint \sigma(z, y) dz dy = \iint \sigma(\eta) d\xi d\eta = \oint \sigma(\eta) \xi d\eta \\ M_{z, \text{int}} &= \iint \sigma(z, y) y dz dy = \iint \sigma(\eta) (-\xi \sin \theta + \eta \cos \theta) d\xi d\eta = \\ &= \cos \theta \iint \sigma(\eta) \eta d\xi d\eta + \sin \theta \iint \sigma(\eta) \xi d\xi d\eta = \\ &= \cos \theta \oint \sigma(\eta) \eta \xi d\eta - \sin \theta \oint \sigma(\eta) \xi^2 d\eta \\ M_{y, \text{int}} &= \iint \sigma(z, y) z dz dy = \iint \sigma(\eta) (\xi \cos \theta + \eta \sin \theta) d\xi d\eta = \\ &= \sin \theta \iint \sigma(\eta) \eta d\xi d\eta + \cos \theta \iint \sigma(\eta) \xi d\xi d\eta = \\ &= \sin \theta \oint \sigma(\eta) \eta \xi d\eta + \cos \theta \oint \sigma(\eta) \xi^2 d\eta \end{aligned} \quad (5.119)$$

unde integralele pe contur se extind pe perimetrul secțiunii. Integralele pe contur pot fi mai departe evaluate prin descompunerea acestora pe fiecare latură (L_i) a perimetrului (L):

$$\begin{aligned} N_{\text{int}} &= \oint \sigma(\eta) \xi d\eta = \sum_{i=1}^{nL} \int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} \sigma(\eta) \xi d\eta \\ M_{z, \text{int}} &= \cos \theta \sum_{i=1}^{nL} \int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} \sigma(\eta) \xi \eta d\eta - \sin \theta \sum_{i=1}^{nL} \int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} \sigma(\eta) \xi^2 d\eta \\ M_{y, \text{int}} &= \sin \theta \sum_{i=1}^{nL} \int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} \sigma(\eta) \xi \eta d\eta + \cos \theta \sum_{i=1}^{nL} \int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} \sigma(\eta) \xi^2 d\eta \end{aligned} \quad (5.120)$$

unde nL reprezintă numărul de muchii ce definesc suprafața de integrare. Pentru evaluarea numerică a integralelor pe segmentele (L_i) este utilizată metoda Gauss-Lobatto. Avantajul acestei metode relevă în faptul prevede noduri de integrare și la capetele intervalului (spre deosebire de metoda Gauss-Legendre), unde dezvoltările plastice pot fi considerabile [4]. Contribuția barelor de armătură nu introduce dificultăți de calcul deoarece în modelul propus

aceste bare sunt considerate ca fibre independente, discrete și punctuale, definite prin coordonatele z_{ri} și y_{ri} , aria A_{ri} și tensiunea f_{ri} . Astfel rezultantele eforturilor interioare ale barelor de armătură pot fi calculate cu următoarele relații:

$$\begin{aligned} N_{r,int} &= \sum_{i=1}^{Nr} A_{ri} f_{ri} \\ M_{z,int} &= \sum_{i=1}^{Nr} A_{ri} f_{ri} y_{ri} \\ M_{y,int} &= \sum_{i=1}^{Nr} A_{ri} f_{ri} z_{ri} \end{aligned} \quad (5.121)$$

Elementele matricei de rigiditate tangente descrise de relațiile (5.14) se evaluează în aceeași manieră, ținând cont de transformarea de coordonate, definită prin relațiile (5.114), și de valoarea deformației totale, a tensiunii respectiv a modului de elasticitate tangent în fibra aflată la distanța η (cf. 5.117).

5.3.5 Rigiditatea echivalentă la forfecare a grinzilor mixte oțel-beton

În cadrul acestei secțiuni se prezintă principalele etape necesare deducerii unei rigidități echivalente la forfecare $(GA)_{eq}$ pentru grinzile compozite oțel-beton, de care se va ține seama în termenii matricei de rigiditate a elementului de bară.

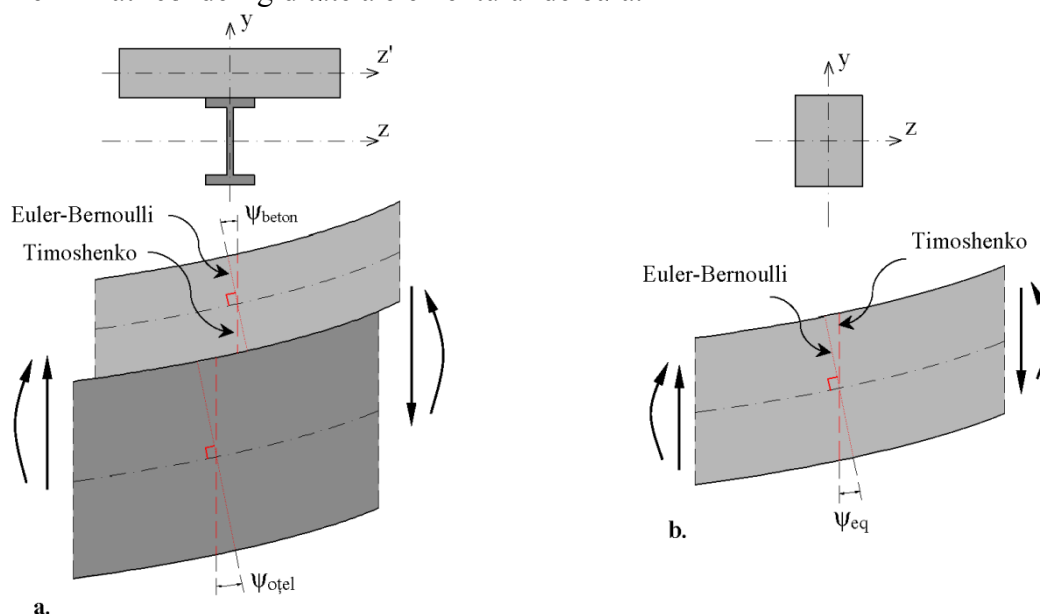


Fig. 5.12 Ilustrarea deformațiilor unghiulare:
a. pe modelul real b. pe modelul echivalent

În general, în practica curentă, se consideră în mod aproximativ că forța tăietoare este preluată doar de inima profilului metalic, neglijându-se aportul componentei de beton.

Potrivit teoriei barei *Euler-Bernoulli* (*EBBT*), o secțiune plană și normală la axa barei înainte de deformare rămâne plană și normală la axa barei după deformare, neglijându-se astfel deformațiile unghiulare. În contrast cu modelul *EBBT*, teoria *Timoshenko* (*TBT*) ține cont de deformațiile unghiulare, și astfel, după deformare, secțiunile nu rămân normale la axa barei. În cazul unei secțiuni transversale curente localizate la distanța x față de o extremitate a

elementului, sub acțiunea forței tăietoare $T(x)$, tensiunile tangențiale variază pe înălțimea secțiunii transversale, și, în consecință, variază și deformația unghiulară (sau unghiul de forfecare) asociată. Conform modelului *Timoshenko* [131] pentru calculul deplasărilor datorate forței tăietoare, secțiunii curente x , supusă acțiunii forței tăietoare $T(x)$, i se asociază o deformație unghiulară echivalentă, constantă pe înălțimea secțiunii, ceea ce evident reprezintă o ipoteză simplificatoare a modelului. Pentru compensarea diferenței dintre deformația unghiulară constantă și cea reală neuniformă, se introduce un factor de corecție ce afectează valoarea constantă, acceptată pentru deformațiile datorate forței tăietoare.

În Fig. 5.12.a. se prezintă deformațiile unghiulare echivalente pentru componenta de beton (ψ_{beton}) respectiv pentru cea metalică (ψ_{otel}), iar în Fig. 5.12.b. se ilustrează unghiul de forfecare corespunzător unei secțiuni dreptunghiulare. Trebuie precizat că în fiecare caz s-au reprezentat deformațiile unghiulare maxime (cf. Timoshenko). Deducerea rigidității echivalente la forfecare $(GA)_{eq}$ aferente unei grinzi mixte oțel-beton, se face pe considerente energetice și prin echivalarea deformației unghiulare corespunzătoare modelului real (Fig. 5.12.a.) cu deformația unghiulară aferentă unui model echivalent (Fig. 5.12.b.), care poate fi exprimată prin intermediul următoarei relații:

$$\psi_{eq}(x) = \frac{6}{5} \frac{T(x)}{(GA)_{eq}} \quad (5.122)$$

unde $6/5$ reprezintă factorul de corecție ce ține seama de distribuția neuniformă a deformațiilor unghiulare pe înălțimea unei secțiuni dreptunghiulare omogene (Fig. 5.12.b.). Energia potențială de deformație, asociată deformației unghiulare echivalente, corespunzătoare domeniului elastic de comportare, poate fi exprimată astfel:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L T(x) \psi_{eq}(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{6}{5} \frac{T^2(x)}{(GA)_{eq}} dx \quad (5.123)$$

Pentru exprimarea energiei potențiale de deformației pe modelul real este necesară exprimarea tensiunilor tangențiale în componenta metalică respectiv cea de beton, în limitele domeniului elastic de comportare. În acest scop, se apelează la formula lui *Juravski*, conform căreia tensiunile tangențiale într-o fibra curentă y se calculează pe baza rezultantei tensiunilor normale de pe aria Ω delimitată de fibra y și o extremitate a secțiunii (v. Fig. 5.13). Tensiunile normale în cele două componente față de axele proprii de greutate, pot fi calculate în domeniul elastic de comportare astfel:

$$\begin{aligned} \sigma_c(y') &= E_c (\varepsilon_{0c}^* + \phi^* \cdot y') \\ \sigma_s(y) &= E_s (\varepsilon_{0s}^* + \phi^* \cdot y) \end{aligned} \quad (5.124)$$

unde ε_{0c}^* , ε_{0s}^* și ϕ^* reprezintă soluția sistemului de ecuații neliniare (5.69). Considerând $N=0$ (cazul obișnuit al grinzilor) se rezolvă, în primă fază, sistemul de ecuații neliniare (5.41) corespunzător acțiunii compozite totale și se evaluează apoi efortul axial din dala de beton în ipoteza acțiunii compozite totale:

$$N_{cf}(x) = \frac{M(x)}{(EI)^\infty} \cdot r \cdot \overline{EA} \quad (5.125)$$

Folosind expresia obținută pentru N_{cf} , se rezolvă sistemul de ecuații neliniare (5.69) corespunzător situației acțiunii compozite parțiale obținându-se următoarele expresii pentru

necunoscutele sistemului:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{0c}^* &= \left(1 - \frac{(EI)^0}{(EI)_{el}}\right) \frac{M(x)}{r \cdot E_c A_c}; \\ \varepsilon_{0s}^* &= -\left(1 - \frac{(EI)^0}{(EI)_{el}}\right) \frac{M(x)}{r \cdot E_s A_s}; \\ \phi^* &= \frac{M(x)}{(EI)_{el}};\end{aligned}\tag{5.126}$$

unde $(EI)_{el}$ reprezintă rigiditatea elastică la încovoiere a secțiunilor mixte oțel-beton, în ipoteza acțiunii compozite parțiale, $(EI)^0$ reprezintă rigiditatea la încovoiere a secțiunilor mixte oțel-beton în lipsa efectului compozit dintre componente, r este distanța dintre centrul de greutate al dalei de beton și cel al profilului metalic, iar $M(x)$ reprezintă valoarea momentului încovoiitor în secțiunea curentă x . În limitele domeniului elastic, tensiunile normale din cele două componente pot fi mai departe exprimate în felul următor, ținând cont de relațiile (5.126):

$$\begin{aligned}\sigma_c(y') &= E_c(\varepsilon_{0c}^* + \phi^* \cdot y') = M(x) \left[\left(1 - \frac{(EI)^0}{(EI)_{el}}\right) \frac{1}{r \cdot A_c} + \frac{E_c y'}{(EI)_{el}} \right]; \\ \sigma_s(y) &= E_s(\varepsilon_{0s}^* + \phi^* \cdot y) = M(x) \left[-\left(1 - \frac{(EI)^0}{(EI)_{el}}\right) \frac{1}{r \cdot A_s} + \frac{E_s y}{(EI)_{el}} \right];\end{aligned}\tag{5.127}$$

Rezultantele tensiunilor normale, aferente porțiunilor de arie Ω_c respectiv Ω_s (v. Fig. 5.13) por fi calculate astfel:

$$\begin{aligned}N_{\Omega_c}^c &= \int_{\Omega_c} \sigma_c(y') d\Omega_c = M(x) \int_{\Omega_c} \left[\left(1 - \frac{(EI)^0}{(EI)_{el}}\right) \frac{1}{r \cdot A_c} + \frac{E_c y'}{(EI)_{el}} \right] d\Omega_c; \\ N_{\Omega_s}^s &= \int_{\Omega_s} \sigma_s(y) d\Omega_s = M(x) \int_{\Omega_s} \left[-\left(1 - \frac{(EI)^0}{(EI)_{el}}\right) \frac{1}{r \cdot A_s} + \frac{E_s y}{(EI)_{el}} \right] d\Omega_s;\end{aligned}\tag{5.128}$$

sau, mai departe:

$$\begin{aligned}N_{\Omega_c}^c &= M(x) \left[\left(1 - \frac{(EI)^0}{(EI)_{el}}\right) \frac{\int_{\Omega_c} d\Omega_c}{r \cdot A_c} + \frac{E_c}{(EI)_{el}} \int_{\Omega_c} y' d\Omega_c \right]; \\ N_{\Omega_s}^s &= M(x) \left[-\left(1 - \frac{(EI)^0}{(EI)_{el}}\right) \frac{\int_{\Omega_s} d\Omega_s}{r \cdot A_s} + \frac{E_s}{(EI)_{el}} \int_{\Omega_s} y d\Omega_s \right];\end{aligned}\tag{5.129}$$

Pentru determinarea expresiilor tensiunilor tangențiale aferente componentei de beton respectiv celei de oțel, se exprimă echilibrul forțelor orientate după axa barei, pe fiecare componentă a elementului infinitesimal din Fig. 5.13. Astfel:

$$\begin{aligned}\tau_{yx}^c \cdot b_c(y') \cdot dx &= dN_{\Omega_c}^c; \\ \tau_{yx}^s \cdot b_s(y) \cdot dx &= dN_{\Omega_s}^s;\end{aligned}\tag{5.130}$$

unde $b_c(y')$ și $b_s(y)$ reprezintă grosimea, componentei de beton respectiv a celei de oțel, corespunzătoare fibrei y' respectiv y .

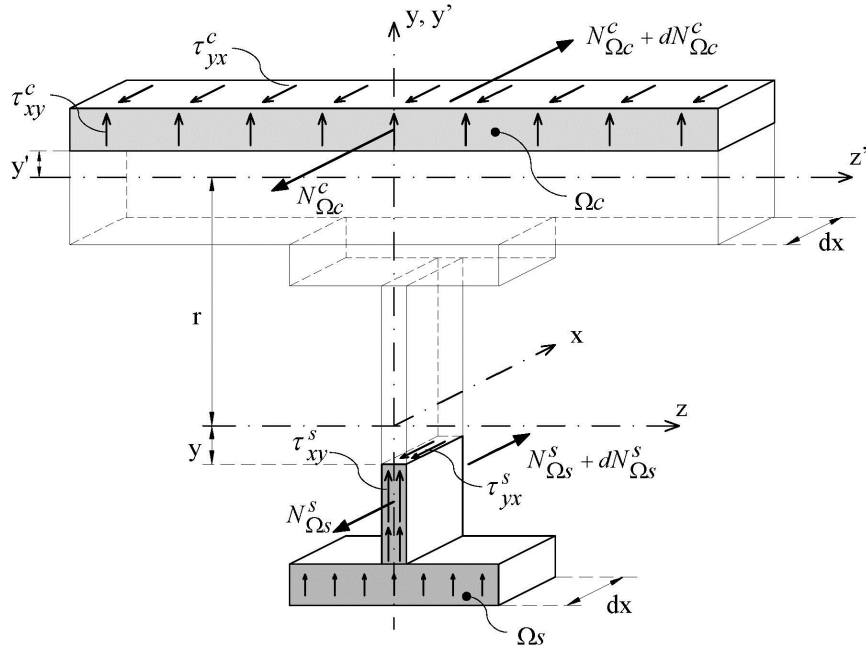


Fig. 5.13. Reprezentarea tensiunilor tangențiale pe un element mixt infinitesimal

În virtutea dualității tensiunilor tangențiale și folosind relațiile (5.130) și (5.129), putem exprima tensiunile tangențiale astfel:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^c = \tau_{yx}^c &= \frac{1}{b_c(y')} \frac{dN_{\Omega_c}^c}{dx} = T(x) \left[\left(1 - \frac{(EI)^0}{(EI)_{el}} \right) \frac{A_{L,c}(y')}{b_c(y') \cdot r \cdot A_c} + \frac{E_c S_{L,c}(y')}{b_c(y') \cdot (EI)_{el}} \right]; \\ \tau_{xy}^s = \tau_{yx}^s &= \frac{1}{b_s(y)} \frac{dN_{\Omega_s}^s}{dx} = T(x) \left[- \left(1 - \frac{(EI)^0}{(EI)_{el}} \right) \frac{A_{L,s}}{b_s(y) \cdot r \cdot A_s} + \frac{E_s S_{L,s}}{b_s(y) \cdot (EI)_{el}} \right]; \end{aligned} \quad (5.131)$$

unde s-a considerat $T(x) = dM(x)/dx$ și:

$$\begin{aligned} A_{L,c}(y') &= \int_{\Omega_c} d\Omega_c; \quad S_{L,c}(y') = \int_{\Omega_c} y' d\Omega_c; \\ A_{L,s}(y) &= \int_{\Omega_s} d\Omega_s; \quad S_{L,s}(y) = \int_{\Omega_s} y d\Omega_s; \end{aligned} \quad (5.132)$$

În relațiile (5.132), $A_{L,c(s)}$ și $S_{L,c(s)}$ reprezintă aria respectiv momentul static al porțiunii care alunecă (porțiunea de arie Ω_c și Ω_s) și este evaluat în raport cu axa de greutate aferentă fiecărei componente. De exemplu, pentru calculul tensiunilor tangențiale într-o fibră curentă y' din dala de beton, momentul static $S_{L,c}(y')$ se calculează în raport cu axa y' ce trece prin centrul de greutate al dalei. Trebuie menționat că evaluarea integralelor de suprafață se face pe zone cu grosime constantă, transformând astfel integralele de suprafață în integrale liniare, variabila de integrare fiind y' pentru zona de beton, respectiv y pentru cea de oțel.

Energia potențială de deformare datorată tensiunilor tangențiale poate fi acum exprimată pentru elementul mixt oțel-beton prin însumarea energiilor aferente fiecărei componente în parte și ținând cont de relațiile (5.131):

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_c} \frac{(\tau_{xy}^c)^2}{G_c} dV_c + \frac{1}{2} \int_{V_s} \frac{(\tau_{xy}^s)^2}{G_s} dV_s = \frac{1}{2} \int_0^L T(x) \left[\frac{k_c T(x)}{G_c A_c} + \frac{k_s T(x)}{G_s A_s} \right] dx \quad (5.133)$$

unde G_c și G_s reprezintă modulii de elasticitate transversali ai betonului și oțelului iar coeficienții k_c și k_s au următoarele expresii:

$$k_c = A_c \int_{A_c} \left[\left(1 - \frac{(EI)^0}{(EI)_{el}} \right) \frac{A_{L,c}(y')}{b_c(y') \cdot r \cdot A_c} + \frac{E_c S_{L,c}(y')}{(EI)_{el} b_c(y')} \right]^2 dA_c ;$$

$$k_s = A_s \int_{A_s} \left[- \left(1 - \frac{(EI)^0}{(EI)_{el}} \right) \frac{A_{L,s}(y)}{b_s(y) \cdot r \cdot A_s} + \frac{E_s S_{L,s}(y)}{(EI)_{el} b_s(y)} \right]^2 dA_s ;$$
(5.134)

Dacă se dorește evaluarea energiei potențiale de deformare pentru o grindă compozită oțel-beton în ipoteza interacțiunii totale, în expresiile (5.134) se înlocuiește valoarea rigidității elastice la încovoiere în ipoteza acțiunii compozite parțiale $(EI)_{el}$, cu valoarea $(EI)^\infty$ ce semnifică rigiditatea la încovoiere aferentă interacțiunii totale dintre componente, descrisă de relația (5.100). Comparând energia potențială de deformare exprimată pe modelul echivalent (cf. 5.123) cu cea exprimată pe modelul real (cf. 5.133), se obține expresia de calcul a rigidității elastice echivalente la forfecare:

$$(GA)_{eq} = \frac{6}{5} \left[\frac{k_s}{G_s A_s} + \frac{k_c}{G_c A_c} \right]^{-1}$$
(5.135)

Se observă cu ușurință că rigiditatea echivalentă la forfecare include și efectul componentei de beton și de asemenea ține seama și de gradul de acțiune compozită prin intermediul rigidității elastice la încovoiere $(EI)_{el}$ ce intră în evaluarea expresiilor k_c și k_s .

În cele ce urmează se prezintă un exemplu sintetic care își propune să scoată în evidență modul de variației al rigidității echivalente la forfecare ca urmare a variației valorii funcției gradului de acțiune compozită ($f(\gamma)$) și de asemenea se dorește evidențierea aportului componentei de beton în mărimea acestei rigidități. În acest scop, studiul parametric se realizează pentru secțiunea transversală a grinzii E1 testată experimental de *Chapman & Balakrishan* [17]. Dimensiunile secțiunii transversale sunt specificate în Fig. 5.14 iar caracteristicile materialelor sunt furnizate în Tab. 5.1.

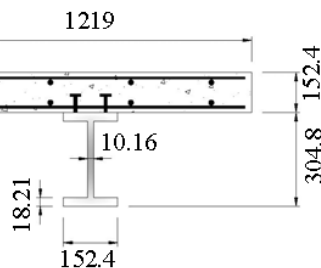


Fig. 5.14 Secțiunea caracteristică a grinzii E1 testată experimental de Chapman

Tab. 5.1 Caracteristici mecanice ale materialelor grinzii E1

		E1
Modul de elasticitate longitudinal (MPa)	Beton (E_c)	31905
	Oțel Tălpi (E_{s_f})	208497
	Inimă (E_{s_fw})	202320
Modul de elasticitate transversal (MPa)	Beton (G_c)	13294
	Oțel Tălpi (G_{s_f})	80191
	Inimă (G_{s_fw})	77815

Integralele ce definesc valorile coeficienților k_c și k_s se evaluează pe porțiuni cu grosime constantă și se raportează la axa de greutate a fiecărei componente în parte. Trebuie menționat că, în cazul evaluării ariei și momentului static al unei porțiuni delimitate de o fibră curentă y de pe inima profilului, se ține cont și de aportul tălpii ce intră în componența respectivei porțiuni.

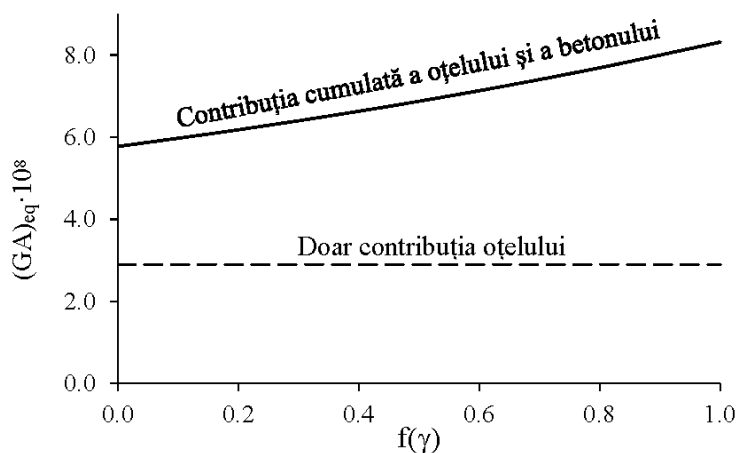


Fig. 5.15 Variația rigidității echivalente la forfecare în cazul secțiunii transversale a grinzii EI

Fig. 5.15 prezintă variația rigidității echivalente la forfecare în raport cu funcția gradului de acțiune compozită. Așa cum era de așteptat valorile $(GA)_{eq}$ cresc odată cu intensificarea efectului compozit dintre cele două componente, contribuția betonului devenind tot mai semnificativă. Cu linie întreruptă este reprezentată valoarea $(GA)_{eq}$ în cazul secțiunii alcătuite doar din componenta metalică. Pentru exemplul studiat, se poate concluziona că betonul are contribuție semnificativă în valoarea $(GA)_{eq}$ însă această contribuție devine neglijabilă în zona de moment încovoietor negativ unde betonul este întins. Asupra influenței rigidității echivalente la forfecare asupra răspunsului structural la nivel de element se va reveni în cadrul capitolului dedicat exemplurilor numerice.

5.4 Modelarea inelasticității la nivel de element

5.4.1 Matricea de rigiditate tangentă și vectorul forțelor nodale echivalente

În cadrul acestui subcapitol se prezintă principalele particularități referitoare la analiza la nivel de element, mai exact, se descriu etapele necesare determinării matricei de rigiditate a elementului de bară cu 12 grade de libertate (Fig. 5.16), în domeniul elasto-plastic de comportare, cu includerea efectelor principalelor surse de neliniaritate: geometrică și fizică. În ceea ce privește neliniaritatea geometrică, efectul local al acesteia, de flexibilizare a barelor comprimare, se ia în considerare prin corectarea matricei de rigiditate tangente a barei pe baza funcțiilor de stabilitate, în timp ce efectul global, datorat modificării configurației geometrice a nodurilor structurii, se include în analiză prin formularea Lagrangiană actualizată, așa cum se va prezenta ulterior. În ceea ce privește neliniaritatea fizică sau materială, în literatura de specialitate sunt propuse un număr mare de modele care surprind acest efect, acestea putând fi clasificate, în general, în două mari categorii: modele bazate pe conceptul de articulație plastică (plastificare punctuală) respectiv modele bazate pe concepte

de zone plastice (plastificare distribuită) [4]. O analiză detaliată a acestor modele de analiză este prezentată în [4,5].

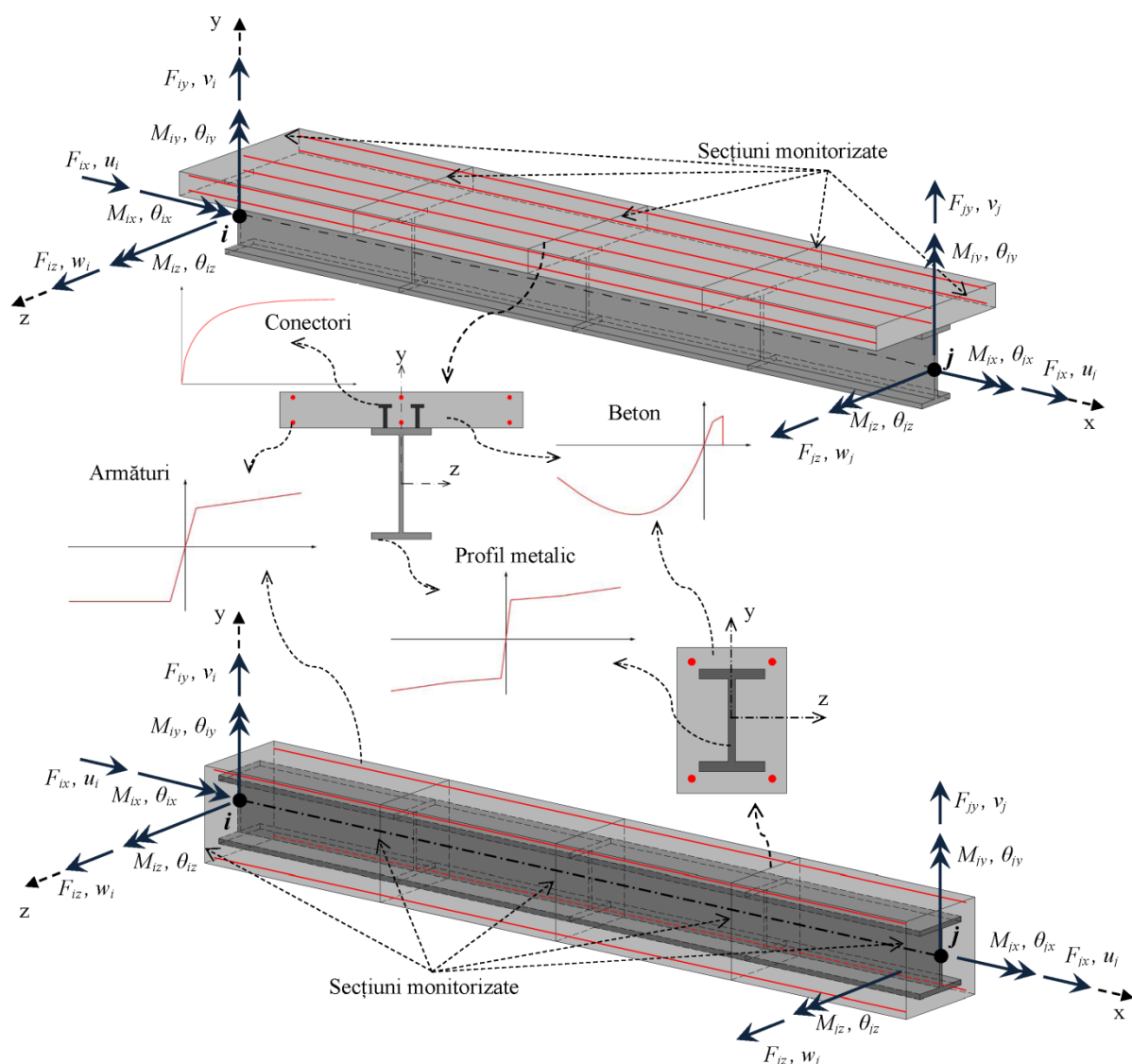


Fig. 5.16 Elemente de tip bară cu 12 GDL

În metoda de analiză propusă, neliniaritatea materială este luată în considerare în cel mai evoluat mod, prin utilizarea conceptului de plastificare distribuită, atât pe înălțimea secțiunii transversale, așa cum s-a arătat în secțiunile anterioare, cât și în lungul elementului prin determinarea răspunsului inelastic ca sumă ponderată a răspunsurilor inelastice a unui număr discret de secțiuni transversale localizate în lungul elementului, în punctele schemei de integrare adoptate. În modelul propus, starea de deformație din interiorul barei este determinată printr-un proces iterativ de echilibrare a eforturilor (interioare și exterioare) pe fiecare secțiune de control a barei, aceste eforturi fiind generate prin intermediul unor polinoame de interpolare ce satisfac condițiile de echilibru static ale elementului (interpolarea eforturilor). În metoda elementelor finite starea de deformație este determinată pe baza câmpului de deplasări generat în funcție de deplasările de la capetele elementelor finite (interpolarea deplasărilor), astfel răspunsul structural fiind influențat de finețea discretizării,

deci de numărul de elemente finite în care s-a divizat bara. În consecință, spre deosebire de metoda elementelor finite în care acuratețea rezultatelor este direct proporțională cu gradul de rafinament al discretizării, în metoda propusă, acuratețea rezultatelor poate fi îmbunătățită prin creșterea numărului de puncte de integrare numerică din lungul barei, dimensiunea problemei rămânând neschimbată. Avantajul folosirii în procedeul propus a unui singur element pentru fiecare bară de cadru se răsfrânge automat și asupra timpului de analiză, care pentru un anumit nivel de acuratețe a rezultatelor este considerabil mai mic față de timpul necesar obținerii de rezultate (cu același nivel de acuratețe) folosind metoda elementelor finite.

Determinarea termenilor matricei de rigiditate tangentă (instantanee) a barei, cu caracteristici de rigiditate (EI_{ty} , EI_{tz} și EA_t) variabile de la secțiune la secțiune, funcție de solicitare, reprezintă o problemă similară celei întâlnite în calculul geometric neliniar a barei cu secțiune variabilă, cu mențiunea ca variația caracteristicilor de rigiditate are un caracter instantaneu (asociat la un anumit nivel de solicitare incluzând efectele locale ale neliniarității geometrice) manifestat atât la nivel de secțiune cât și în lungul elementului. Prin urmare, pe parcursul etapelor succesive ale calculului răspunsul neliniar inelastic la nivel de element se determină prin însumarea ponderată a răspunsului unui număr discret de secțiuni transversale. Aceste secțiuni reprezintă puncte de control ale stării de plastificare în lungul elementului, a căror localizare în lungimea elementului depinde de schema de integrare numerică adoptată (Fig. 5.16). Evaluarea caracteristicilor de rigiditate (EI_y , EI_z , EA) în fiecare din aceste puncte, funcție de nivelul de solicitare, de forma secțiunii transversale și, nu în ultimul rând, de modelele constitutive neliniare ale materialelor componente, se face urmând procesul iterativ descris în secțiunile anterioare ale acestui capitol. Așa cum se va arăta, termenii matricei de rigiditate se evaluează direct prin calcularea unor coeficienți de corecție care afectează rigiditățile inițiale ale elementului, astfel integrarea numerică fiind necesară doar pentru evaluarea acestor coeficienți de corecție și nu pentru determinarea matricei de rigiditate în totalitate. Prin introducerea variabilei adimensionale $\xi=x/L$, modulii de rigiditate la încovoiere EI_t și de rigiditate axial EA_t într-o secțiune curentă ξ a barei sunt exprimați astfel:

$$\begin{aligned} EI_y(\xi) &= EI_{0y} \cdot f_y(\xi) \\ EI_z(\xi) &= EI_{0z} \cdot f_z(\xi) \\ EA(\xi) &= EA_0 \cdot f_x(\xi) \end{aligned} \tag{5.136}$$

unde f_y , f_z și f_x sunt funcții de corecție subunitare care introduc efectul de degradare a rigidităților inițiale EI_{0y} , EI_{0z} respectiv EA_0 , ca urmare a creșterii nivelului de solicitare și implicit a dezvoltării zonelor plastice pe înălțimea secțiunii transversale. Valorile acestor funcții sunt evaluate fie direct, pe baza curbelor caracteristice la nivel de secțiune, fie printr-un proces iterativ (la nivel de fibră) de echilibrare a eforturilor interioare și exterioare pe secțiune, așa cum este prezentat în aceasta lucrare.

Matricea de rigiditate se determină prin inversarea matricei de flexibilitate. Pentru exemplificarea modului de obținere a matricei de flexibilitate, se consideră bara din Fig. 5.17, raportată la sistemul de referință de coordonate de bază, având îndepărtate deplasările de corp rigid, și încărcată cu forțele de capăt pe direcțiile gradelor de libertate reținute (M_{iy} , M_{iz} , M_{jy} , M_{jz} , M_x , N). Conducerea analizei neliniare necesită aplicarea incrementală a încărcărilor, adică comportarea inelastică este aproximată printr-o succesiune de analize liniar elastice.

Matricea de flexibilitate incrementală a elementului \mathbf{f}_r , care exprimă deplasările capetelor de bară funcție de nivelul de solicitare Δs_r , poate fi dedusă direct folosind principiul energetic.

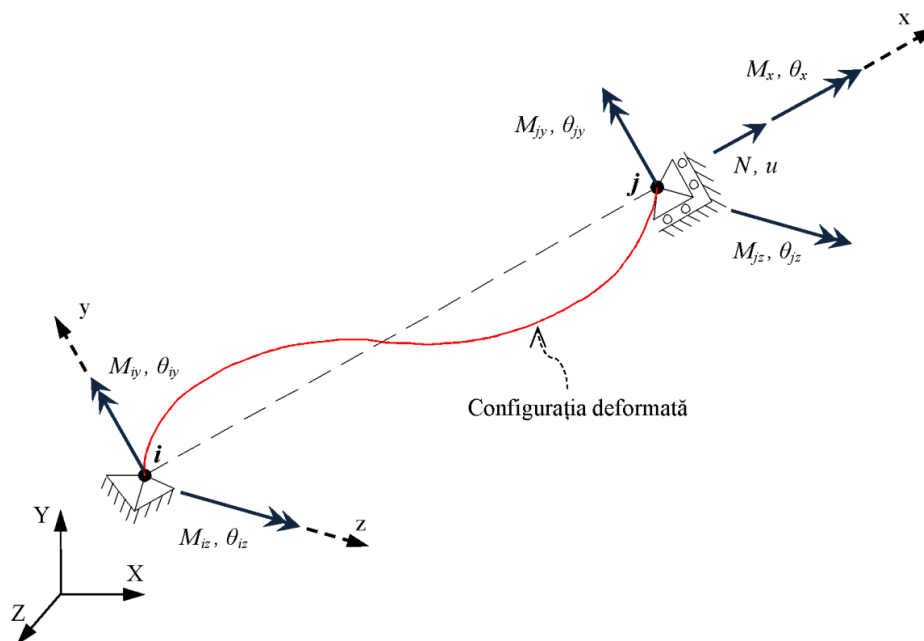


Fig. 5.17 Element de bară având îndepărtate deplasările de corp rigid

Forțele nodale sunt exprimate în funcție de încărcările aplicate în lungul elementului și depind de rigiditatea la încovoiere a elementului care, în domeniul elasto-plastic de comportare, este variabil de la secțiune la secțiune, fiind dependent de nivelul de solicitare al barei. Prin urmare, forțele nodale trebuie exprimate ținându-se seama de variația caracteristicilor de rigiditate ale secțiunilor din lungul elementului. Încărcările aplicate barei provin din două surse principale: prima, cuprinde încărcările exterioare aplicate direct asupra elementului (sarcini distribuite, forțe concentrate, etc.), iar a doua cuprinde momentele încovoietoare corectoare care iau naștere în secțiunile care și-au atins capacitatea portantă. Aceste încărcări suplimentare se determină din condiția de respectare a suprafeței de plastificare, așa cum s-a prezentat în secțiunea 5.3.1.1

În vederea calculării energiei potențiale de deformare corespunzătoare unui increment de încărcare, este necesară cunoașterea forțelor nodale echivalente aferente nivelului curent de solicitare. Pentru exemplificare se consideră bara din Fig. 5.18 supusă acțiunii momentelor încovoietoare concentrate nodale $\Delta M_i, \Delta M_j$, sarcinilor uniform distribuite $\Delta q_{y(z)}$, forțelor concentrate $\Delta P_{y(z)}^a$ aplicate în secțiunea aflată la distanța a față de capătul i și momentelor încovoietoare corectoare $\Delta M_{y(z),p}^b, \Delta M_{y(z),p}^j$ aplicate în secțiunea aflată la distanța b față de capătul i și în capătul j . Aceste momente corectoare semnifică faptul că în secțiunile b și j forțele exterioare sunt mai mari decât cele ce produc plastificarea integrală a acestor secțiuni. În vederea respectării suprafeței de plastificare (Fig. 5.18), trebuie evaluate suprasarcinile $\Delta M_{y(z),p}^b, \Delta M_{y(z),p}^j$ și aplicate elementului ca forțe exterioare în secțiunile corespunzătoare. Este evident faptul, că în aceste condiții de încărcare, expresia momentului încovoietor și a forței tăietoare (calculată ca derivată a expresiei momentului încovoietor) se schimbă de la o secțiune de control la alta. Pentru evitarea modificării expresiei momentului încovoietor odată

cu modificarea secțiunii de calcul, este necesară utilizarea unei expresii generale pentru expresia momentului încovoietor care să țină seama de modul aleatoriu de dispunere a forțelor exterioare [11].

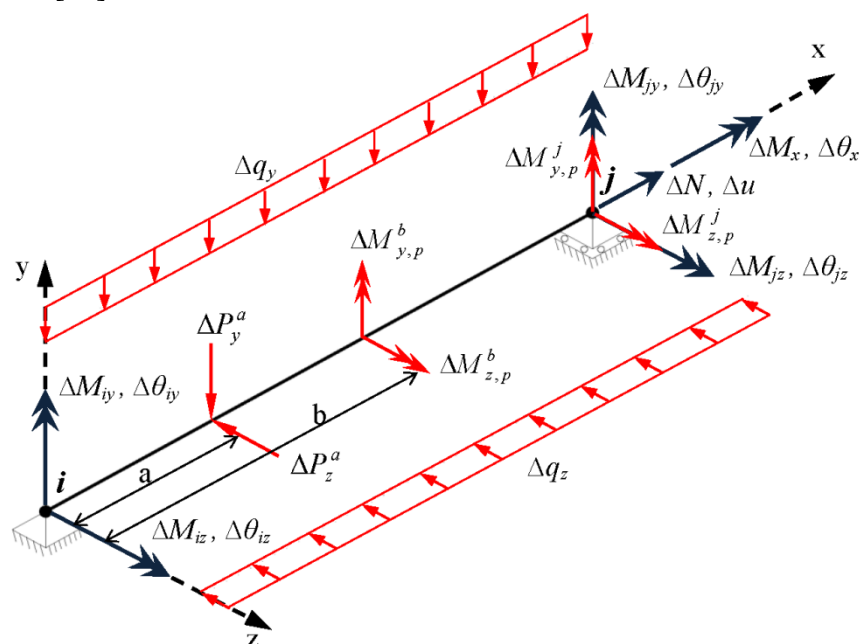


Fig. 5.18 Ipoteză de încărcare a unui element de bară în sistemul coordonatelor de bază

În prezenta lucrare se apelează la metoda Macaulay [141] pentru luarea în considerare a forțelor aplicate discret în lungul barei. Funcția Macaulay poate fi scrisă sintetic sub următoarea formă [11]:

$$F_n(x) = \langle x-a \rangle^n = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ (x-a)^n, & x > a \end{cases} \quad (5.137)$$

Pentru cazul particular $n=0$:

$$F_0(x) = \langle x-a \rangle^0 = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ 1, & x > a \end{cases} \quad (5.138)$$

Astfel, funcția are valoare nulă când secțiunea de calcul (situată la distanța x față de capătul i al elementului) se găsește înaintea secțiunii corespunzătoare punctului de aplicare, de exemplu, a unei forțe concentrate (situată la distanța a față de capătul i al elementului). În caz contrar ($x > a$) funcția (de exemplu forța concentrată) se i-a în considerare cu întreaga intensitate. Folosind aceste funcții, putem determina câmpul solicitărilor incrementale (momente încovoietoare și forțe tăietoare) în funcție de încărcările nodale și cele aplicate în lungul elementului. Astfel pentru exemplu prezentat în Fig. 5.18, momentul încovoietor incremental și forța tăietoare incrementală sunt exprimate prin intermediul următoarelor relații:

$$\begin{aligned} \Delta M_{y(z)}(\xi) = & \Delta M_{iy(z)}(1-\xi) - \Delta M_{jy(z)}\xi + \frac{\Delta q_{y(z)}L^2\xi(\xi-1)}{2} + \\ & + \Delta M_{y(z),p}^b \left[\xi - \langle L\xi - b \rangle^0 \right] + \Delta M_{y(z),p}^j \xi + \Delta P_{y(z)}^a \left[\langle L\xi - a \rangle^1 - \xi(L-a) \right] \end{aligned} \quad (5.139)$$

$$\Delta T_{y(z)}(\xi) = \frac{dM_{y(z)}(\xi)}{d\xi} = -\frac{\Delta M_{iy(z)} + \Delta M_{jy(z)}}{L} + \frac{\Delta q_{y(z)}L(2\xi - 1)}{2} +$$

$$+ \Delta M_{y(z),p}^b \frac{1}{L} + \Delta M_{y(z),p}^j \frac{1}{L} + \Delta P_{y(z)}^a \left[\langle L\xi - a \rangle^0 - \frac{L-a}{L} \right]$$

unde $\xi=x/L$. Admițând o comportare elastică a elementului de bară pe parcursul unui increment de încărcare și luând în considerare deformațiile axiale, de încovoiere, de lunecare (provenite din forța tăietoare) și torsiune, energia potențială de deformație incrementală poate fi exprimată astfel:

$$\Delta W = \frac{L}{2} \int_0^1 \frac{\Delta N^2}{EA(\xi)} d\xi + \frac{L}{2} \int_0^1 \frac{\Delta M_z^2(\xi)}{EI_z(\xi)} d\xi + \frac{L}{2} \int_0^1 \frac{\Delta M_y^2(\xi)}{EI_y(\xi)} d\xi +$$

$$+ \frac{L}{2} \int_0^1 \frac{\Delta M_x^2}{GI_t(\xi)} d\xi + \frac{L}{2} \int_0^1 \frac{\Delta T_y^2(\xi)}{(GA)_{eq,y}(\xi)} d\xi + \frac{L}{2} \int_0^1 \frac{\Delta T_z^2(\xi)}{(GA)_{eq,z}(\xi)} d\xi \quad (5.140)$$

unde $\xi=x/L$, x reprezintă distanța de la nodul i la secțiunea curentă de calcul, L fiind lungimea totală a barei iar $(GA)_{eq,y(z)}$ reprezintă rigiditățile echivalente la forfecare în raport cu axele locale y și z , determinate conform procedurii descrise în secțiunea 5.3.5.

Folosind a doua teoremă a lui Castigliano, relația dintre deplasările incrementale și eforturile nodale incrementale, poate fi exprimată astfel:

$$\begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta \theta_{iy} \\ \Delta \theta_{jy} \\ \Delta \theta_{iz} \\ \Delta \theta_{jz} \\ \Delta \theta_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta W}{\partial \Delta N} \\ \frac{\partial \Delta W}{\partial \Delta M_{iy}} \\ \frac{\partial \Delta W}{\partial \Delta M_{jy}} \\ \frac{\partial \Delta W}{\partial \Delta M_{iz}} \\ \frac{\partial \Delta W}{\partial \Delta M_{jz}} \\ \frac{\partial \Delta W}{\partial \Delta M_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1(3 \times 3) & \mathbf{0}(3 \times 3) \\ \mathbf{0}(3 \times 3) & \mathbf{f}_2(3 \times 3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N \\ M_{iy} \\ M_{jy} \\ M_{iz} \\ M_{jz} \\ M_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_{iy} \\ \delta_{jy} \\ \delta_{iz} \\ \delta_{jz} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.141)$$

sau în formă matriceală condensată:

$$\Delta \mathbf{u}_r = \mathbf{f}_r \cdot \Delta \mathbf{s}_r + \boldsymbol{\delta}_r \quad (5.142)$$

unde \mathbf{f}_r reprezintă matricea de flexibilitate incrementală a elementului de bară de cadru având îndepărtate deplasările de corp rigid. Submatricele \mathbf{f}_1 și \mathbf{f}_2 au următoarele expresii:

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} L \int_0^1 \frac{1}{EA(\xi)} d\xi & 0 & 0 \\ 0 & L \int_0^1 \frac{(\xi-1)^2}{EI_y(\xi)} d\xi + \frac{1}{L} \int_0^1 \frac{d\xi}{(GA)_{eq,y}(\xi)} & L \int_0^1 \frac{\xi(\xi-1)}{EI_y(\xi)} d\xi + \frac{1}{L} \int_0^1 \frac{d\xi}{(GA)_{eq,y}(\xi)} \\ 0 & L \int_0^1 \frac{\xi(\xi-1)}{EI_y(\xi)} d\xi + \frac{1}{L} \int_0^1 \frac{d\xi}{(GA)_{eq,y}(\xi)} & L \int_0^1 \frac{\xi^2}{EI_y(\xi)} d\xi + \frac{1}{L} \int_0^1 \frac{d\xi}{(GA)_{eq,y}(\xi)} \end{bmatrix} \quad (5.143)$$

$$\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} L \int_0^1 \frac{(\xi-1)^2}{EI_z(\xi)} d\xi + \frac{1}{L} \int_0^1 \frac{d\xi}{(GA)_{eq,z}(\xi)} & L \int_0^1 \frac{(\xi-1)^2}{EI_z(\xi)} d\xi + \frac{1}{L} \int_0^1 \frac{d\xi}{(GA)_{eq,z}(\xi)} & 0 \\ L \int_0^1 \frac{(\xi-1)^2}{EI_z(\xi)} d\xi + \frac{1}{L} \int_0^1 \frac{d\xi}{(GA)_{eq,z}(\xi)} & L \int_0^1 \frac{(\xi-1)^2}{EI_z(\xi)} d\xi + \frac{1}{L} \int_0^1 \frac{d\xi}{(GA)_{eq,z}(\xi)} & 0 \\ 0 & 0 & L \int_0^1 \frac{d\xi}{GI_t(\xi)} \end{bmatrix}$$

iar δ_r este un vector ce reține termenii suplimentari rezultați prin diferențierea energiei potențiale de deformare. Coeficienții vectorului δ_r pot fi exprimați ca sume dintre componentele datorate încovoierii respectiv forței tăietoare [11]:

$$\delta_{i(j)y(z)} = \delta_{i(j)y(z)}^{incovoierie} + \delta_{i(j)y(z)}^{f.taietoare} \quad (5.144)$$

unde, pentru cazul de încărcare prezentat în Fig. 5.18:

$$\begin{aligned} \delta_{iy(z)}^{incovoierie} &= \frac{\Delta q_{y(z)} L^3}{2} \int_0^1 \frac{\xi(\xi-1)^2}{EI_{y(z)}(\xi)} d\xi + \Delta M_{y(z),p}^b \int_0^1 \frac{(1-\xi) \langle L\xi - b \rangle^0}{EI_{y(z)}(\xi)} d\xi + \\ &+ \Delta M_{y(z),p}^j \int_0^1 \frac{\xi(1-\xi)}{EI_{y(z)}(\xi)} d\xi + \Delta P_{y(z)}^a \int_0^1 \frac{(1-\xi) \langle L\xi - a \rangle^1 - \xi(L-a)}{EI_{y(z)}(\xi)} d\xi; \\ \delta_{jy(z)}^{incovoierie} &= \frac{\Delta q_{y(z)} L^3}{2} \int_0^1 \frac{\xi^2(\xi-1)}{EI_{y(z)}(\xi)} d\xi + \Delta M_{y(z),p}^b \int_0^1 \frac{\xi \langle L\xi - b \rangle^0}{EI_{y(z)}(\xi)} d\xi + \\ &+ \Delta M_{y(z),p}^j \int_0^1 \frac{\xi^2}{EI_{y(z)}(\xi)} d\xi + \Delta P_{y(z)}^a \int_0^1 \frac{\xi \langle L\xi - a \rangle^1 - \xi(L-a)}{EI_{y(z)}(\xi)} d\xi; \\ \delta_{i(j)y(z)}^{f.taietoare} &= \frac{\Delta q_{y(z)} L}{2} \int_0^1 \frac{(1-2\xi)}{(GA)_{eq,y(z)}(\xi)} d\xi - \Delta M_{y(z),p}^b \int_0^1 \frac{1}{(GA)_{eq,y(z)}(\xi)} d\xi - \\ &- \frac{\Delta M_{y(z),p}^j}{L} \int_0^1 \frac{1}{(GA)_{eq,y(z)}(\xi)} d\xi - \Delta P_{y(z)}^a \int_0^1 \frac{\langle L\xi - a \rangle^0 - \frac{L-a}{L}}{(GA)_{eq,y(z)}(\xi)} d\xi; \end{aligned} \quad (5.145)$$

Este important de menționat că efectul deformațiilor de lunecare este luat în considerare în expresiile coeficienților matricei de flexibilitate tangente (curente) a elementului de bară prin considerarea forțelor tăietoare în expresia energiei potențiale de deformare. Prin inversarea relației 5.142 obținem următoarea expresie între eforturi nodale și deplasări incrementale:

$$\Delta \mathbf{s}_r = \mathbf{k}_r \cdot \Delta \mathbf{u}_r - \Delta \mathbf{q}_r \quad (5.146)$$

în care:

$$\Delta \mathbf{q}_r = \mathbf{k}_r \delta_r \quad (5.147)$$

este vectorul încărcărilor incrementale iar \mathbf{k}_r reprezintă matricea de rigiditate tangentă a elementului de bară de cadru având îndepărtate deplasările de corp rigid, obținută prin inversarea matricei de flexibilitate \mathbf{f}_r :

$$\mathbf{k}_r = \mathbf{f}_r^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{f}_2^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{1(3 \times 3)} & \mathbf{0}_{(3 \times 3)} \\ \mathbf{0}_{(3 \times 3)} & \mathbf{k}_{2(3 \times 3)} \end{bmatrix} \quad (5.148)$$

unde submatricele \mathbf{k}_1 și \mathbf{k}_2 au următoarele expresii:

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} \frac{EA_0}{L} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_{0y}}{L} \alpha_y & \frac{2EI_{0y}}{L} \beta_y \\ 0 & \frac{2EI_{0y}}{L} \beta_y & \frac{4EI_{0y}}{L} \gamma_y \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} \frac{4EI_{0z}}{L} \alpha_z & \frac{2EI_{0z}}{L} \beta_z & 0 \\ \frac{2EI_{0z}}{L} \beta_z & \frac{4EI_{0z}}{L} \gamma_z & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GI_t}{L} \end{bmatrix};$$
(5.149)

În relațiile 5.149, pentru simplificarea formei coeficienților matricei de rigiditate, s-au introdus următoarele notații [9]:

$$\alpha_{y(z)} = \frac{3 \left(c_{2y(z)} + \frac{t_{y(z)}}{4} \right)}{r_{y(z)} + t_{y(z)} \cdot s_{y(z)}}; \quad \beta_{y(z)} = \frac{3 \left(c_{3y(z)} - \frac{t_{y(z)}}{2} \right)}{r_{y(z)} + t_{y(z)} \cdot s_{y(z)}};$$

$$\gamma_{y(z)} = \frac{3 \left(c_{1y(z)} + \frac{t_{y(z)}}{4} \right)}{r_{y(z)} + t_{y(z)} \cdot s_{y(z)}}; \quad \lambda = \frac{1}{c_x}$$
(5.150)

în care:

$$r_{y(z)} = 4 \cdot c_{1y(z)} \cdot c_{2y(z)} - c_{3y(z)}^2; \quad s_{y(z)} = c_{1y(z)} + c_{2y(z)} + c_{3y(z)}$$

$$c_x = \int_0^1 \frac{1}{f_x(\xi)} d\xi; \quad c_{1y(z)} = 3 \cdot \int_0^1 \frac{(\xi - 1)^2}{f_{y(z)}(\xi)} d\xi;$$

$$c_{2y(z)} = 3 \cdot \int_0^1 \frac{\xi^2}{f_{y(z)}(\xi)} d\xi; \quad c_{3y(z)} = 6 \cdot \int_0^1 \frac{\xi(\xi - 1)}{f_{y(z)}(\xi)} d\xi$$
(5.151)

iar t_y și t_z sunt coeficienții care introduc efectele deformațiilor de alunecare în formularea matematică a elementului de bară și se determină în baza următoarei expresii:

$$t_{y(z)} = \frac{12EI_{y(z)}}{(GA)_{eq,y(z)} L^2}$$
(5.152)

unde $(GA)_{eq,y(z)}$ reprezintă rigiditățile echivalente la forfecare, în raport cu axele locale y respectiv z ale elementului, și se evaluează urmând etapele prezentate în cadrul subcapitolului 5.3.5. Coeficienții de corecție, ce intervin în expresiile termenilor matricei de rigiditate tangente a barei, sunt subunitari deoarece valorile rigidităților corespunzătoare diferitelor etape de încărcare sunt inferioare celor inițiale. Mai mult acești coeficienți au un caracter instantaneu, aceștia fiind recalculați la sfârșitul fiecărei etape de încărcare în funcție de modificarea stării de eforturi, reactualizând astfel, la fiecare pas de încărcare, matricea de rigiditate tangentă a barei.

Prin urmare, răspunsul neliniar la nivel de element se determină prin sumarea ponderată a răspunsului unui număr discret de secțiuni transversale ce reprezintă puncte de control a stării de plastificare în lungul elementului. Localizarea acestor secțiuni în lungul barei depinde de

schema de integrare numerică adoptată și de numărul punctelor de integrare considerate. La alegerea metodei de integrare trebuie avut în vedere că punctele de control trebuie dispuse în secțiunile în care dezvoltarea zonelor plastice este pronunțată. În prezenta lucrare integralele se evaluează folosind metoda Gauss-Lobatto care spre deosebire de metoda Gauss-Legendre prevede noduri de integrare și la capetele intervalului (capetele barei), unde în mod frecvent dezvoltările plastice sunt considerabile.

Se observă că limitele de integrare pentru calculul coeficienților de corecție sunt 0 și 1, însă în cazul aplicării unei metode Gauss pentru evaluarea numerică a integralelor, limitele de integrare sunt diferite (-1 și 1). Prin urmare este necesară o schimbare de variabilă prin care orice integrală cu limite finite ($a, b, a < b$) se reduce la următoarea formă:

$$\int_a^b F(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 \Psi(z)dz \quad (5.153)$$

unde noua funcție de sub integrală se exprimă astfel:

$$\Psi(z) = F(x) \cdot [0.5 \cdot (b-a) \cdot z + 0.5 \cdot (b-a)] \quad (5.154)$$

Pentru cazul particular în care limitele de integrare ale funcției $F(x)$ sunt $a=0$ și $b=1$, aplicând relația 5.153 se obține următoarea aproximare pentru calculul integralei definite:

$$\int_a^b F(x)dx = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n p_j \cdot F(0.5z_j + 0.5) \quad (5.155)$$

unde cu z_j și p_j s-au notat abscisele și coeficienții de pondere corespunzători variantei de cuadratura gaussiană adoptată, în cazul de față corespunzători metodei Gauss-Lobatto, iar n reprezintă numărul punctelor de integrare considerate. Pe baza acestor considerente, coeficienții de corecție ce afectează termenii matricei de rigiditate tangente pot fi evaluați, în mod aproximativ, cu următoarele relații:

$$\begin{aligned} c_x &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n p_j \cdot \frac{1}{f_x(0.5z_j + 0.5)} \\ c_{1y(z)} &= \frac{3}{2} \sum_{j=1}^n p_j \cdot \frac{(0.5z_j - 0.5)^2}{f_{y(z)}(0.5z_j + 0.5)} \\ c_{2y(z)} &= \frac{3}{2} \sum_{j=1}^n p_j \cdot \frac{(0.5z_j + 0.5)^2}{f_{y(z)}(0.5z_j + 0.5)} \\ c_{3y(z)} &= 3 \sum_{j=1}^n p_j \cdot \frac{(0.5z_j + 0.5)(0.5z_j - 0.5)}{f_{y(z)}(0.5z_j + 0.5)} \end{aligned} \quad (5.156)$$

Valorile coeficienților de pondere respectiv a absciselor punctelor de integrare pot fi regăsite de exemplu în [4] pentru un număr de 3, 4 și 5 puncte de integrare.

Relația 5.148 relevă faptul că matricea de rigiditate tangentă a elementului de bară în sistemul coordonatelor de bază este pătratică de ordinul 6. Pentru includerea deplasărilor de corp rigid, matricea de rigiditate este pre- și post- multiplicată cu o matrice de transformare, rezultând astfel matricea de rigiditate totală de ordin 12 [9].

5.4.2 Efectul local al neliniarității geometrice

În prezenta lucrare, efectul local al neliniarității geometrice, manifestat prin flexibilizarea barelor comprimate, este luat în considerare prin intermediul unor coeficienți de corecție, evaluați în funcție de valoarea forței axiale și cuantificați prin intermediul factorului (factorilor) de compresiune. Astfel matricea de rigiditate a unui element de bară poate fi corectată prin intermediul unor coeficienți, denumiți sintetic funcții de stabilitate, ținând astfel cont de modificarea rigidității elementului ca urmare a aplicării unor forțe axiale puternice. Trebuie menționat că, în cazul structurilor spațiale, deformarea barelor se produce în două planuri principale, și în consecință trebuie ținut cont de rigiditatea la încovoiere corespunzătoare fiecărui plan de deformare, rezultând astfel două valori ale factorului de compresiune pentru fiecare bară în parte. Prin urmare termenii k_{ij} ai matricei de rigiditate se modifică astfel:

$$k_{ij} = k_{ij}^{ep} \cdot g_{ij}, \quad i, j = \overline{1,6} \quad (5.157)$$

unde k_{ij}^{ep} denotă coeficienții matricei de rigiditate tangente a elementului de bară de cadru având îndepărtate deplasările de corp rigid, solicitat în domeniul elasto-plastic. Acești coeficienți se deduc urmând etapele descrise în secțiunea anterioară. Pentru cazul forțelor de compresiune N , factorii de corecție g_{ij} au următoarea formă [9]:

$$\begin{aligned} g_{11} &= \frac{1}{1 + \frac{EA}{4N^3 L^2} (H_y + H_z)}; \\ g_{22} = g_{33} &= \frac{c(v_y)}{4}; \\ g_{23} = g_{32} &= \frac{s(v_y)}{4}; \\ g_{44} = g_{55} &= \frac{c(v_z)}{4}; \\ g_{45} = g_{54} &= \frac{s(v_z)}{4}; \\ g_{66} &= 1; \end{aligned} \quad (5.158)$$

unde $c(v_{y(z)})$ și $s(v_{y(z)})$ reprezintă funcțiile de stabilitate ce introduc efectul forței axiale asupra rigidității la încovoiere, iar $H_{y(z)}$ sunt funcțiile de stabilitate ce afectează rigiditatea axială datorită încovoierii. Efectul forței axiale asupra rigidității la torsiune nu este luat în considerare în prezenta formulare. Factorii de compresiune ce intervin în expresiile funcțiilor de stabilitate se determină astfel:

$$\begin{aligned} v_y &= L \sqrt{\frac{N}{EI_{ty}}}; \\ v_z &= L \sqrt{\frac{N}{EI_{tz}}}; \end{aligned} \quad (5.159)$$

unde:

$$EI_{ty} = EI_{0y} \cdot \int_0^1 f_y(\xi) d\xi ;$$

$$EI_{tz} = EI_{0z} \cdot \int_0^1 f_z(\xi) d\xi ;$$
(5.160)

și reprezintă valorile medii ale rigidităților la încovoiere tangente asociate barei. $EI_{0y(z)}$ desemnează rigiditățile la încovoiere asociate barei în domeniul elastic de comportare. Urmând un procedeu similar cu cel descris în secțiunea anterioară, forțele nodale echivalente pot fi determinate ținând seama de efectele locale de ordinul al II-lea.

5.4.3 Integrarea efectelor nodurilor de dimensiune finită și a conexiunilor semirigide

În cadrul acestei secțiuni se prezintă succint o serie de aspecte teoretice privind integrarea efectelor conexiunilor semirigide și a dimensiunii finite a nodurilor în formularea generală a elementului de bară de cadru. Deși în studiile numerice ce fac obiectul acestei lucrări nodurile grindă-stâlp (în cazul cadrelor) sunt considerate rigide, dorim să trecem în revistă câteva particularități privind considerarea efectului nodurilor semirigide, evidențiind astfel capacitatea modelului de a include acest efect. Pe de altă parte, în toate experimentele numerice conduse asupra cadelor plane și spațiale, s-a ținut cont de dimensiunea finită a nodurilor grindă-stâlp, această particularitate de modelare permițând compararea rezultatelor obținute de modelul propus cu cele furnizate de modelul numeric generat în aplicația Abaqus [15], folosind elemente finite bi- și tridimensionale și deci modelând explicit dimensiunea nodurilor. În acest context considerăm necesară prezentarea teoretică a procedurii de includere a efectului dimensiunii nodurilor în comportarea de ansamblu a elementului de bară descris în acest capitol.

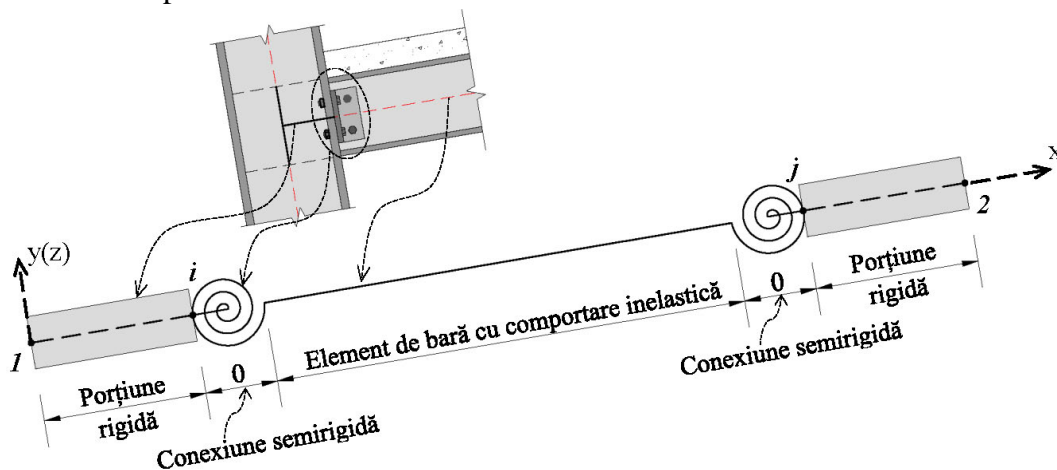


Fig. 5.19. Element de bară cu conexiuni semirigide și noduri cu dimensiune finită

Elementul de bară de cadru se presupune a fi alcătuit din trei zone distincte, așa cum se poate observa în Fig. 5.19. Prima zonă, considerată cu comportare rigidă, este alcătuită din porțiunile de bară de la capetele elementului și i-a în considerare dimensiunea finită a nodurilor. Cea de-a doua zonă este consideră cu lungime zero și introduce efectul conexiunilor semirigide dintre stâlpii și grinzile cadrului, iar porțiunea rămasă reprezintă elementul de bară efectiv ce include efectul neliniarității fizice și geometrice.

5.4.3.1 Includerea efectului conexiunilor semirigide

Modelul propus poate include efectele legăturilor flexibile (semirigide) pe direcțiile momentelor încovoietoare în raport cu axele y și z , conexiunile fiind considerate rigide pe direcția efortului axial și a momentului de torsiune. În Fig. 5.20 se prezintă modelul fizic de considerare a prinderilor semirigide a barelor în noduri. Pentru claritate, dimensiunea finită a nodurilor nu s-a reprezentat în figura de mai jos, acest aspect urmând a fi tratat în secțiunea următoare a capitolului.

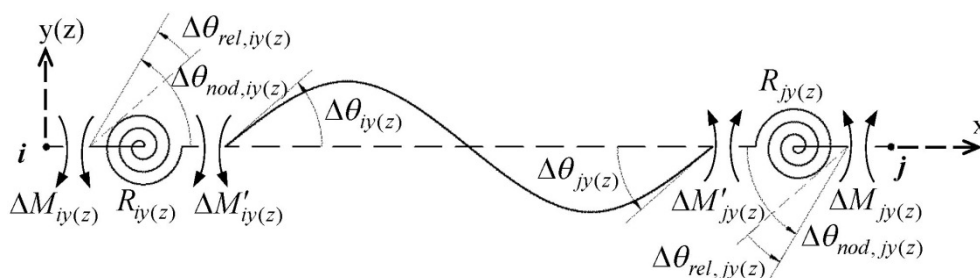


Fig. 5.20. Element de bară cu conexiuni semirigide

Relația ce exprimă legătura dintre deplasările incrementale și vectorul forțelor nodale incrementale ale elementului de bară, având eliminate liniile și coloanele ce conțin componentele corespunzătoare efortului axial și momentului de torsiune, poate fi scrisă astfel (v. relația 5.146):

$$\overline{\Delta \mathbf{s}}_r = \overline{\mathbf{k}}_r \cdot \overline{\Delta \mathbf{u}}_r - \overline{\Delta \mathbf{q}}_r \quad (5.161)$$

unde, $\overline{\mathbf{k}}_r$ și $\overline{\Delta \mathbf{q}}_r$ reprezintă matricea de rigiditate și vectorul forțelor nodale echivalente ale elementului de bară având efectele neliniarității fizice și geometrice locale și, în care, s-au eliminat liniile și coloanele ce conțin termeni corespunzători efortului axial și momentului de torsiune; vectorul coloană $\overline{\Delta \mathbf{u}}_r$ colectează rotirile capetelor de bară:

$$\overline{\Delta \mathbf{u}}_r = (\Delta \theta_{iy} \quad \Delta \theta_{jy} \quad \Delta \theta_{iz} \quad \Delta \theta_{jz})^T \quad (5.162)$$

iar $\overline{\Delta \mathbf{s}}_r$ colectează momentele încovoietoare incrementale la capetele i și j ale barei:

$$\overline{\Delta \mathbf{s}}_r = (\Delta M_{iy} \quad \Delta M_{jy} \quad \Delta M_{iz} \quad \Delta M_{jz})^T \quad (5.163)$$

În cadrul fiecărui increment de încărcare, conform Fig. 5.20, între rotirile capetelor de bară ($\Delta \theta_{i(j)y(z)}$) și rotirile nodurilor i și j ($\Delta \theta_{nod, i(j)y(z)}$) putem scrie următoarea relație de legătură:

$$\overline{\Delta \mathbf{u}}_r = \overline{\Delta \mathbf{u}}_{nod} - \overline{\Delta \mathbf{u}}_{rel} \quad (5.164)$$

unde vectorul $\overline{\Delta \mathbf{u}}_{nod}$ colectează rotirile incrementale ale nodurilor:

$$\overline{\Delta \mathbf{u}}_{nod} = (\Delta \theta_{nod, iy} \quad \Delta \theta_{nod, jy} \quad \Delta \theta_{nod, iz} \quad \Delta \theta_{nod, jz})^T \quad (5.165)$$

iar vectorul $\overline{\Delta \mathbf{u}}_{rel}$ colectează rotirile incrementale relative:

$$\overline{\Delta \mathbf{u}}_{rel} = (\Delta \theta_{rel, iy} \quad \Delta \theta_{rel, jy} \quad \Delta \theta_{rel, iz} \quad \Delta \theta_{rel, jz})^T \quad (5.166)$$

Introducând relația (5.164) în relația (5.161) obținem:

$$\overline{\Delta \mathbf{s}}_r = \overline{\mathbf{k}}_r \cdot (\overline{\Delta \mathbf{u}}_{nod} - \overline{\Delta \mathbf{u}}_{rel}) - \overline{\Delta \mathbf{q}}_r \quad (5.167)$$

Conexiunile semirigide transmit momente încovoietoare proporționale cu rotirile relative dintre noduri și capetele barei și în consecință momentele încovoietoare incrementale pot fi calculate în baza următoarei expresii:

$$\overline{\Delta \mathbf{s}}_r = \overline{\mathbf{k}}_{sr} \cdot \overline{\Delta \mathbf{u}}_{rel} \quad (5.168)$$

unde cu $\overline{\mathbf{k}}_{sr}$ s-a notat matricea de rigiditate a conexiunilor semirigide de la capetele barei, care poate fi scrisă sub următoarea formă:

$$\overline{\mathbf{k}}_{sr} = \begin{bmatrix} R_{iy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{jy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{iz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{jz} \end{bmatrix} \quad (5.169)$$

unde $R_{i(j)y(z)}$ reprezintă rigiditățile la rotire asociate conexiunilor de la capetele i și j , în raport cu axele y și z . Aceste rigidități pot lua valori între zero (cazul prinderilor articulate) și infinit (cazul prinderilor perfect încastrate). Combinând relațiile (5.167) și (5.168) obținem:

$$\overline{\mathbf{k}}_{sr} \cdot \overline{\Delta \mathbf{u}}_{rel} = \overline{\mathbf{k}}_r \cdot (\overline{\Delta \mathbf{u}}_{nod} - \overline{\Delta \mathbf{u}}_{rel}) - \overline{\Delta \mathbf{q}}_r \quad (5.170)$$

Exprimând vectorul $\overline{\Delta \mathbf{u}}_{rel}$ din relația de mai sus, putem scrie:

$$\overline{\Delta \mathbf{u}}_{rel} = (\overline{\mathbf{k}}_r + \overline{\mathbf{k}}_{sr})^{-1} \cdot (\overline{\mathbf{k}}_r \cdot \overline{\Delta \mathbf{u}}_{nod} - \overline{\Delta \mathbf{q}}_r) \quad (5.171)$$

Introducând relația (5.171) în relația (5.167) obținem expresia ce stabilește legătura dintre deplasările incrementale și vectorul forțelor nodale incrementale ale elementului, având incluse și efectele conexiunilor semirigide:

$$\overline{\Delta \mathbf{s}}_r = \left[\overline{\mathbf{k}}_r - \overline{\mathbf{k}}_r \cdot (\overline{\mathbf{k}}_r + \overline{\mathbf{k}}_{sr})^{-1} \cdot \overline{\mathbf{k}}_r \right] \overline{\Delta \mathbf{u}}_{nod} - \overline{\Delta \mathbf{q}}_r + \overline{\mathbf{k}}_r \cdot (\overline{\mathbf{k}}_r + \overline{\mathbf{k}}_{sr})^{-1} \cdot \overline{\Delta \mathbf{q}}_r \quad (5.172)$$

Notând:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{k}}_{sem} &= \overline{\mathbf{k}}_r - \overline{\mathbf{k}}_r \cdot (\overline{\mathbf{k}}_r + \overline{\mathbf{k}}_{sr})^{-1} \cdot \overline{\mathbf{k}}_r ; \\ \overline{\mathbf{q}}_{sem} &= -\overline{\Delta \mathbf{q}}_r + \overline{\mathbf{k}}_r \cdot (\overline{\mathbf{k}}_r + \overline{\mathbf{k}}_{sr})^{-1} \cdot \overline{\Delta \mathbf{q}}_r \end{aligned} \quad (5.173)$$

relația 5.172 poate fi scrisă astfel:

$$\overline{\Delta \mathbf{s}}_r = \overline{\mathbf{k}}_{sem} \cdot \overline{\Delta \mathbf{u}}_{nod} + \overline{\mathbf{q}}_{sem} \quad (5.174)$$

unde $\overline{\mathbf{k}}_{sem}$ și $\overline{\mathbf{q}}_{sem}$ reprezintă matricea de rigiditate (de dimensiune 4x4) și vectorul forțelor nodale echivalente (de dimensiune 4x1) ale elementului de bară cu conexiuni semirigide, având incluse efectele neliniarității fizice și geometrice.

Conexiunile pot fi simulate cu comportare liniară, situație în care rigiditățile la rotire ale conexiunilor $R_{i(j)y(z)}$ sunt considerate constante, sau cu comportare neliniară, situație în care aceste rigidități sunt variabile în funcție de nivelul de solicitare al conexiunilor caracterizate în acest caz prin curbe neliniare moment încovoietor-rotire determinate experimental sau pe baza unor relații analitice. O posibilă metodă de integrare a efectului conexiunilor semirigide cu comportare neliniară este descrisă în [9].

5.4.3.2 Includerea efectului nodurilor de dimensiuni finită

Includerea efectului nodurilor de dimensiuni finite se realizează prin modificarea corespunzătoare a relației 5.174, ce exprimă legătura dintre deplasările incrementale și

vectorul forțelor nodale echivalente incrementale ale elementului de bară cu conexiuni semirigide, având incluse efectele neliniarității fizice și geometrice. În Fig. 5.21. se prezintă modelul fizic de considerare a dimensiunii finite a nodurilor. Pentru claritate conexiunile semirigide nu au fost reprezentate, acestea fiind tratate în cadrul secțiunii anterioare. Menționăm că bara ij include efectul conexiunilor semirigide.

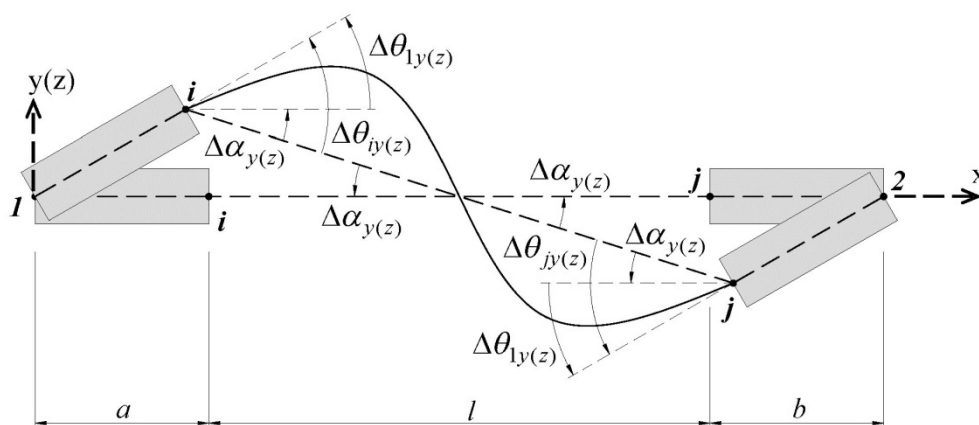


Fig. 5.21. Element de bară cu noduri de dimensiuni finite

Presupunem în continuare că rotațiile nodurilor 1 și 2 sunt colectate în vectorul $\overline{\Delta \mathbf{u}}$:

$$\overline{\Delta \mathbf{u}} = (\Delta\theta_{1y} \quad \Delta\theta_{2y} \quad \Delta\theta_{1z} \quad \Delta\theta_{2z})^T \quad (5.175)$$

iar $\overline{\Delta \mathbf{s}}$ colectează momentele încovoietoare incrementale la extremitățile 1 și 2 ale barei:

$$\overline{\Delta \mathbf{s}} = (\Delta M_{1y} \quad \Delta M_{2y} \quad \Delta M_{1z} \quad \Delta M_{2z})^T \quad (5.176)$$

Analizând Fig. 5.21. se observă că între rotațiile de la capetele elementului de bară (i și j) și cele din nodurile 1 și 2 pot fi scrise următoarele relații de legătură:

$$\begin{aligned} \Delta\theta_{iy} &= \Delta\theta_{1y} + \Delta\alpha_y; \\ \Delta\theta_{jy} &= \Delta\theta_{2y} + \Delta\alpha_y; \\ \Delta\theta_{iz} &= \Delta\theta_{1z} + \Delta\alpha_z; \\ \Delta\theta_{jz} &= \Delta\theta_{2z} + \Delta\alpha_z; \end{aligned} \quad (5.177)$$

Admițând rotații mici pe parcursul fiecărui increment de încărcare se poate accepta valabilitatea următoarelor relații:

$$\begin{aligned} \cos(\Delta\theta) &\approx 1; \\ \sin(\Delta\theta) &\approx \Delta\theta; \\ \cos(\Delta\alpha) &\approx 1; \\ \sin(\Delta\alpha) &\approx \Delta\alpha; \end{aligned} \quad (5.178)$$

În baza expresiilor anterioare și a geometriei barei prezentate în Fig. 5.21, se poate stabili următoarea relație între rotația $\Delta\alpha$ și rotațiile nodurilor 1 și 2:

$$\sin(\Delta\alpha_{y(z)}) \approx \Delta\alpha_{y(z)} = \frac{a}{l} \Delta\theta_{1y(z)} + \frac{b}{l} \Delta\theta_{2y(z)}; \quad (5.179)$$

unde l reprezintă lungimea actualizată a barei, iar a și b sunt lungimile porțiunilor rigide de la capetele elementului prin intermediul cărora se introduce efectul dimensiunilor finite ale nodurilor. Folosind relația (5.179), corespondența dintre rotațiile de la capetele elementului de

bară (i și j) și cele din nodurile 1 și 2, exprimată prin relațiile (5.177), pot fi scrisă sub următoare formă matriceală:

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta_{iy} \\ \Delta\theta_{jy} \\ \Delta\theta_{iz} \\ \Delta\theta_{jz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\frac{a}{l} & \frac{b}{l} & 0 & 0 \\ \frac{a}{l} & 1+\frac{b}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\frac{a}{l} & \frac{b}{l} \\ 0 & 0 & \frac{a}{l} & 1+\frac{b}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_{1y} \\ \Delta\theta_{2y} \\ \Delta\theta_{1z} \\ \Delta\theta_{2z} \end{bmatrix} \quad (5.180)$$

sau în formă condensată:

$$\overline{\Delta\mathbf{u}}_{nod} = \mathbf{N}_f \cdot \overline{\Delta\mathbf{u}} \quad (5.181)$$

unde \mathbf{N}_f introduce efectul nodurilor de dimensiune finită.

Introducând expresia (5.181) în relația (5.174) obținem:

$$\overline{\Delta\mathbf{s}}_r = \overline{\mathbf{k}}_{sem} \cdot \mathbf{N}_f \cdot \overline{\Delta\mathbf{u}} + \overline{\Delta\mathbf{q}}_{sem} \quad (5.182)$$

Exprimând echilibrul pentru bară reprezentată în Fig. 5.21, se obține relația dintre momentele încovoietoare incrementale asociate extremităților i și j și cele asociate nodurilor 1 și 2:

$$\overline{\Delta\mathbf{s}} = \mathbf{N}_f^T \cdot \overline{\Delta\mathbf{s}}_r \quad (5.183)$$

Înmulțind la stânga relația (5.182) cu \mathbf{N}_f^T și introducând relația (5.183) în expresia astfel obținută, se deduce expresia ce definește variația incrementală a rotirilor și momentelor încovoietoare aferente nodurilor 1 și 2 ale elementului de bară:

$$\overline{\Delta\mathbf{s}} = \mathbf{N}_f^T \cdot \overline{\mathbf{k}}_{sem} \cdot \mathbf{N}_f \cdot \overline{\Delta\mathbf{u}} + \mathbf{N}_f^T \cdot \overline{\Delta\mathbf{q}}_{sem} \quad (5.184)$$

sau:

$$\overline{\Delta\mathbf{s}} = \overline{\mathbf{k}}_{rf} \cdot \overline{\Delta\mathbf{u}} + \overline{\Delta\mathbf{q}}_{rf} \quad (5.185)$$

unde $\overline{\mathbf{k}}_{rf}$ și $\overline{\Delta\mathbf{q}}_{rf}$ reprezintă succesiv matricea de rigiditate și vectorul forțelor nodale echivalente incrementale ale elementului de bară având incluse efectele nodurilor de dimensiuni finite, a conexiunilor semirigide, a neliniarității fizice respectiv geometrice, și pot fi evaluate în baza următoarelor relații:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{k}}_{rf} &= \mathbf{N}_f^T \cdot \overline{\mathbf{k}}_{sem} \cdot \mathbf{N}_f; \\ \overline{\Delta\mathbf{q}}_{rf} &= \mathbf{N}_f^T \cdot \overline{\Delta\mathbf{q}}_{sem} \end{aligned} \quad (5.186)$$

Matricea de rigiditate astfel obținută este de ordinul 4, iar prin adăugarea liniilor și coloanelor ce cuprind termenii corespunzători rigidității axiale și la torsiune, ordinul matricei pătratică de rigiditate devine 6. Pentru includerea deplasărilor de corp rigid, matricea de rigiditate este pre- și post- multiplicată cu o matrice de transformare, rezultând astfel matricea de rigiditate totală de ordin 12 [9].

5.4.4 Efectul global al neliniarității geometrice

Considerarea efectelor globale ale neliniarității geometrice presupune considerarea configurației geometrice deformate a structurii pentru fiecare etapă a procesului de încărcare. În procesul de calcul, corespunzător fiecărei etape de încărcare, intervine de fiecare dată o nouă configurație geometrică a structurii, caracterizată prin deplasările de noduri calculate în

etape precedentă a calculului. Această configurație influențează atât formarea matricelor de rigiditate și a vectorilor forțelor nodale echivalente ale elementelor în sistemul local de axe cât și trecerea acestora în sistemul global de referință al structurii, în vederea asamblării matricei de rigiditate globale și a vectorului forțelor nodale globale. În general, efectul global al neliniarității geometrice, datorat modificării configurației geometrice a structurii, poate fi considerat fie prin translația matricei de rigiditate exprimată în deformațiile barei, în funcție de deplasările nodale, printr-o transformare neliniară, fie direct, prin reactualizarea matricei de rotație \mathbf{R}_b la sfârșitul fiecărui ciclu de încărcare [4], în concordanță cu noua configurație geometrică a elementului, așa cum se va prezenta succint în cele ce urmează.

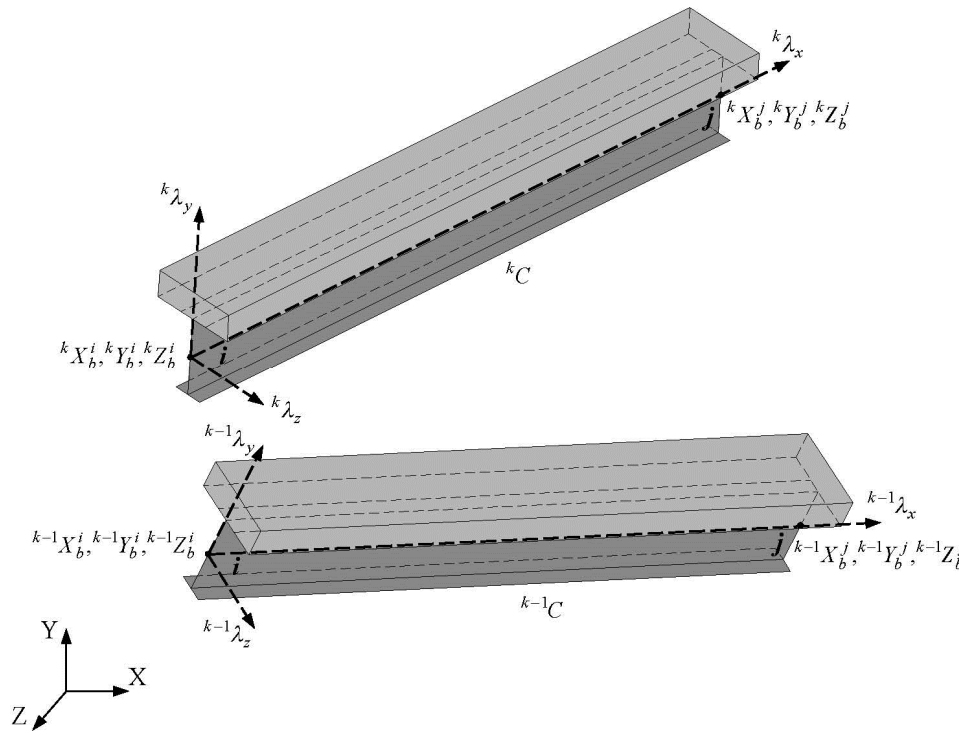


Fig. 5.22 Efectul global al neliniarității geometrice

Formarea matricei de rotație \mathbf{R}_b pentru o nouă configurație geometrică aferentă unui pas curent de încărcare k , presupune recalcularea cosinușilor directori ai barelor structurii și implicit a noilor lungimi ale barelor. Pentru elementul de bară cu 12 grade de libertate schematizat în Fig. 5.22, matricea de rotație \mathbf{R}_b care face trecerea de la coordonatele locale la cele globale, are următoarea formă:

$$\mathbf{R}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_i^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{L}_i^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{L}_j^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{L}_j^k \end{bmatrix} \quad (5.187)$$

unde matricele \mathbf{L}_i^k și \mathbf{L}_j^k reprezintă matricele cosinușilor directori ale axelor sistemului local în raport cu axele sistemului global de referință și se determină în concordanță cu noua configurație geometrică a barei (corespunzătoare ciclului k de încărcare) pentru cele două extremități ale elementului [5]:

$$\mathbf{L}_{i(j)}^k = \begin{bmatrix} {}^k\lambda_{xx}^{i(j)} & {}^k\lambda_{xy}^{i(j)} & {}^k\lambda_{xz}^{i(j)} \\ {}^k\lambda_{yx}^{i(j)} & {}^k\lambda_{yy}^{i(j)} & {}^k\lambda_{yz}^{i(j)} \\ {}^k\lambda_{zx}^{i(j)} & {}^k\lambda_{zy}^{i(j)} & {}^k\lambda_{zz}^{i(j)} \end{bmatrix} \quad (5.188)$$

și unde $({}^k\lambda_{xx}^{i(j)} \quad {}^k\lambda_{xy}^{i(j)} \quad {}^k\lambda_{xz}^{i(j)})$, $({}^k\lambda_{yx}^{i(j)} \quad {}^k\lambda_{yy}^{i(j)} \quad {}^k\lambda_{yz}^{i(j)})$, $({}^k\lambda_{zx}^{i(j)} \quad {}^k\lambda_{zy}^{i(j)} \quad {}^k\lambda_{zz}^{i(j)})$ reprezintă coordonatele versorilor ${}^k\lambda_x$, ${}^k\lambda_y$, ${}^k\lambda_z$ a axelor x , y și z la cele două capete i și j ale elementului la incrementul de încărcare k . Diferențele între matricele \mathbf{L}_i^k și \mathbf{L}_j^k , în configurație deformată, se datorează diferenței între unghiul de rotație al axelor principale de inerție asociate secțiunilor de la cele două extremități ale barei.

În prezenta lucrare, reactualizarea matricei de rotație se realizează într-o formulare incremental-iterativă prin corectarea vectorilor de orientare λ_x , λ_y , λ_z odată cu trecerea de la configurația C_{k-1} , aferentă ciclului $k-1$ de încărcare, la configurația următoare C_k aferentă ciclului k de încărcare (Fig. 5.22.). Succesiunea etapelor de corectare a vectorilor de orientare corespunzătorii celor două configurații succesive este detaliată în [5,142].

Cunoscând matricea de rotație \mathbf{R}_b a fiecărei bare a structurii, trecerea de la matricea de rigiditate tangentă a fiecărei bare, relativă coordonatelor locale ale acestora, la matricea de rigiditate tangentă exprimată în coordonatele globale ale structurii, se realizează prin următoarea transformare standard:

$$\mathbf{K}_b = \mathbf{R}_b^T \cdot \mathbf{k}_b \cdot \mathbf{R}_b \quad (5.189)$$

Având matricele de rigiditate ale barelor, exprimate relativ coordonatelor globale ale structurii, matricea de rigiditate globală, se obține prin însumarea matricelor de rigiditate ale tuturor barelor:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{nr.bare} \mathbf{K}_b \quad (5.190)$$

5.5 Metoda de conducere a analizei neliniare

Determinarea soluției în calculul elasto-plastic de ordinul al II-lea se efectuează printr-o succesiune de cicluri de calcul, soluția presupunând îndeplinirea simultană a celor două condiții ce caracterizează echilibrul: compatibilitatea deformată și echilibrul static al nodurilor. Metodele de calcul se împart în trei mari categorii funcție de modul de conducere a analizei, distingându-se astfel: metode iterative, metode incrementale și metode incremental-iterative. Metodele iterative sunt aplicate în general în situațiile în care calculul structurii se efectuează pentru întreaga intensitate a sarcinilor exterioare date. Sarcina ultimă este determinată în acest caz în cadrul unei iterații a unui nivel de încărcare, colapsul structurii manifestându-se printr-o creștere pronunțată a valorilor deplasărilor. Soluția problemei este testată prin compararea condiției de convergență a configurației de echilibru cu diferite niveluri de severitate ale toleranței. Trebuie menționat că pot apărea interpretări eronate ale condiției de convergență a configurației de echilibru când nivelul de încărcare se află în vecinătatea sarcinii critice. Metodele incrementale (pas cu pas) presupun aplicarea succesivă asupra structurii a unor valori constante ale încărcărilor sau deplasărilor (pe parcursul unui increment de solicitare comportarea structurii considerându-se liniară) până la atingerea

nivelului de încărcare dorit (metode incrementale cu control în încărcări, Fig. 5.23.a) sau a limitei de deformabilitate admisibile (metode incrementale cu control în deplasări, Fig. 5.23.b). Astfel, trasarea curbei de comportare în spațiul încărcare-deplasare, se face succesiv prin determinarea soluției aferente fiecărui pas constant de forță sau deplasare. Metoda pașilor controlați în deplasări permite studiul și în domeniul postcritic spre deosebire de metoda pașilor controlați în eforturi pentru care trasarea curbei de comportare se oprește odată cu atingerea sarcinii limită. În ambele metode incrementale amintite, eroarea de calcul ce afectează soluția este dependentă de numărul și mărimea pașilor de încărcare/deplasare. În fine, metodele incremental-iterative reprezintă combinații între metodele descrise anterior, un proces iterativ de minimizare a erorilor fiind aplicat în cadrul fiecărui increment de încărcare/deplasare.

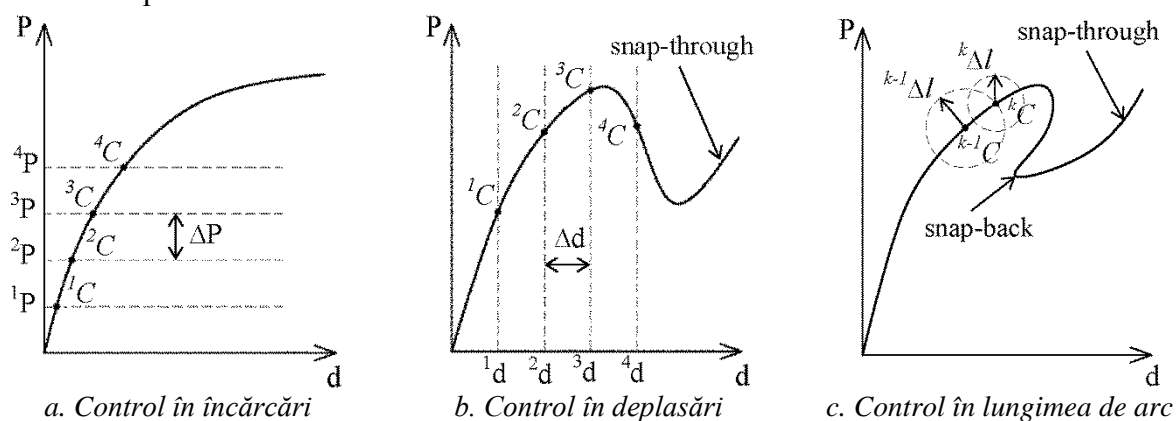


Fig. 5.23 Metode incrementale și incremental iterative de conducere a analizei

În literatura de specialitate sunt propuse mai multe astfel de metode, cea mai cunoscută fiind metoda Newton-Raphson, cu variantele, originală și modificată (diferența constând în actualizarea respectiv neactualizarea matricei de rigiditate în timpul iterațiilor din cadrul unui increment de încărcare) care utilizează parametrii de control în încărcări, însă aceste metode devin slab convergente în vecinătatea sarcinii ce produce colapsul structurii și, mai mult, nu includ posibilitatea trasării curbei încărcare-deplasare după punctul corespunzător încărcării limită. Aceste inconveniente sunt înlăturate de metodele incremental-iterative bazate pe considerarea parametrului de control în deplasări și în lungimea de arc (*arc length*) care tratează factorul de încărcare ca o variabilă adițională (necunoscută) în timpul iterațiilor de echilibrare din cadrul fiecărui increment de deplasare. Metodele bazate pe control în lungimea de arc (Fig. 5.23.c) sunt capabile să traseze întreagă curbă neliniară de comportare a structurii surprinzând și fenomenele de tip *snap-back* și *snap-through*, spre deosebire de metodele bazate pe control în deplasări (Fig. 5.23.b) care pot surprinde doar fenomenul de *snap-through*. Cele mai cunoscute metode incremental-iterative cu control în lungimea de arc sunt metodele propuse de Riks [143] și Wemper [144]. În literatura de specialitate pot fi consultate variante modificate ale acestor formulări, cea mai reprezentativă fiind metoda propusă de Crisfield [145].

Conducerea analizei, ce face obiectul prezentei lucrări, se realizează printr-o analiză incremental-iterativă cu control în lucrul mecanic (*work-load increment*), mărimea incrementelor de încărcare fiind controlată de condiția de lucru mecanic constant ($\Delta W = \text{constant}$, Fig. 5.24). Trebuie menționat că forțele, aplicate structurilor studiate în

această teză, au caracter conservativ și se aplică proporțional, astfel toate sarcinile cresc în funcție de un singur parametru. Mai trebuie adăugat faptul că această metodă de conducere a analizei, este capabilă să traseze întreaga curbă neliniară de comportare a structurii, însă fenomenul de *snap-back* nu poate fi surprins.

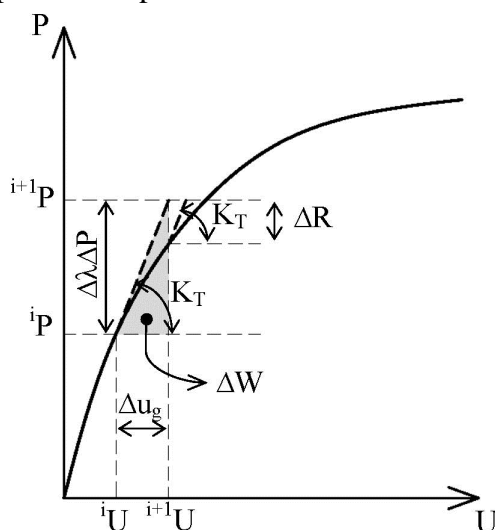


Fig. 5.24 Conducerea analizei cu control în lucrul mecanic

Pornind de la configurația de echilibru aferentă unui ciclu de încărcare i , se aplică structurii un nou increment de încărcare $\Delta\lambda\Delta\mathbf{P}$ a cărei intensitate este controlată de condiția de lucru mecanic constant:

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta W}{\Delta\mathbf{P}\Delta\mathbf{u}_g} \quad (5.191)$$

unde $\Delta\mathbf{P}$ reprezintă incrementul forțelor exterioare de referință și se calculează prin divizarea forțelor totale \mathbf{P} cu numărul de incremente ales, iar $\Delta\mathbf{u}_g$ reprezintă vectorul deplasărilor incrementale. Astfel încărcarea corespunzătoare pasului curent $i+1$ este (Fig. 5.24):

$${}^{i+1}\mathbf{P} = {}^i\mathbf{P} + \Delta\lambda\Delta\mathbf{P} \quad (5.192)$$

Corespunzător incrementului de încărcare i se formează matricea de rigiditate globală a structurii \mathbf{K}_T prin însumarea matricelor de rigiditate tangente ale fiecărui element component (așa cum s-a prezentat în secțiunile anterioare). Cunoscând \mathbf{K}_T se poate determina vectorul deplasărilor globale corespunzătoare nivelului curent de încărcare:

$$\Delta\mathbf{u}_g = \Delta\lambda\mathbf{K}_T^{-1}\Delta\mathbf{P} \quad (5.193)$$

În continuare, se reactualizează coordonatele nodurilor și se recalculază lungimea fiecărui element al structurii, pe baza deplasărilor globale incrementale:

$$\begin{aligned} {}^{i+1}\mathbf{U} &= {}^i\mathbf{U} + \Delta\mathbf{u}_g \\ {}^{i+1}\mathbf{C} &= {}^i\mathbf{C} + \Delta\mathbf{u}_g^t \end{aligned} \quad (5.194)$$

unde \mathbf{U} colectează deplasările totale ale nodurilor structurii, vectorul \mathbf{C} reține coordonatele nodurilor structurii, iar $\Delta\mathbf{u}_g^t$ conține deplasările incrementale globale pe direcția gradelor de libertate asociate translațiilor. Se face trecerea deplasărilor incrementale de la sistemul global al sistemului la sistemul local al fiecărui element, folosind matricea de rotație corespunzătoare ultimei configurații de echilibru i :

$$\Delta \mathbf{u}_l = {}^i \mathbf{R}_b \Delta \mathbf{u}_g \quad (5.195)$$

Se estimează apoi incrementul forțelor nodale interne, în raport cu sistemul local al fiecărei bare, pe baza vectorului deplasărilor raportate la sistemul de bază (fără deplasări și rotații de corp rigid), $\Delta \mathbf{u}_n$:

$$\Delta \mathbf{f}_e = \mathbf{k}_b \Delta \mathbf{u}_n \quad (5.196)$$

unde \mathbf{k}_b reprezintă matricea de rigiditate tangentă a elementului de bară corespunzătoare ultimei configurații de echilibru, i . Vectorul forțelor nodale incrementale este adăugat la vectorul forțelor nodale corespunzătoare configurației inițiale de echilibru, obținându-se astfel vectorul forțelor nodale totale corespunzătoare noii configurații:

$${}^{i+1} \mathbf{f}_e = {}^i \mathbf{f}_e + \Delta \mathbf{f}_e \quad (5.197)$$

Se reactualizează sistemul local de axe pentru fiecare element și se determină matricea de rotație corespunzătoare noii configurații, ${}^{i+1} \mathbf{R}_b$, iar apoi se face trecerea forțelor nodale de la sistemul local aferent configurației $i+1$, la sistemul general de referință. Însurarea vectorilor forțelor nodale globale duce la obținerea vectorului forțelor nodale totale asociate structurii:

$$\begin{aligned} {}^{i+1} \mathbf{F}_e &= {}^{i+1} \mathbf{R}_b {}^{i+1} \mathbf{f}_e \\ {}^{i+1} \mathbf{F} &= \sum_{i=1}^{nr.bare} {}^{i+1} \mathbf{F}_e \end{aligned} \quad (5.198)$$

În continuare, se calculează diferența $\Delta \mathbf{R}$ între totale aplicate structurii ${}^{i+1} \mathbf{P}$ și forțele nodale totale determinate anterior ${}^{i+1} \mathbf{F}$. Corespunzător acestui dezechilibru se poate estima corecția deplasărilor în baza următoarei relații:

$$\Delta \mathbf{R} = \mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u}_g \quad (5.199)$$

unde \mathbf{K}_T este matricea de rigiditate tangentă globală a structurii și se consideră a fi matricea corespunzătoare ultimei configurații de echilibru. O altă modalitate constă în determinarea matricei \mathbf{K}_T corespunzătoare fiecărei iterații însă acest aspect conduce la un efort de calcul costisitor. Procesul iterativ continuă prin repetarea etapelor descrise de relațiile (5.194)-(5.199) până când dezechilibrul $\Delta \mathbf{R}$ devine neglijabil.

5.6 Concluzii parțiale

În cadrul acestui capitol a fost prezentată succint formularea matematică a modelului de calcul propus pentru analiza neliniară a structurilor compozite oțel-beton. Modelul extinde capacitățile modelului existent cu privire la analiza neliniară avansată a structurilor în cadre [1, 37] prin considerarea efectului conectării parțiale dintre dala de beton și profilul metalic (în cazul grinzilor compozite), considerarea relațiilor constitutive complexe pentru beton și oțel, forma exactă a secțiunilor, studiul imperfecțiunilor materiale (a tensiunilor reziduale) asupra capacității de deformabilitate și de rezistență a grinzilor compozite, grefând de asemenea efectul nodurilor de dimensiuni finite și propunând totodată un model de considerare a conexiunilor semirigide.

Principalele caracteristici, care dau valoare deosebită modelului de calcul elaborat și-l fac competitiv cu alte modele care vizează calculul neliniar al structurilor compozite oțel-beton derivă din faptul că, spre deosebire de metoda elementelor finite care obține acuratețea prin subîmpărțirea barelor dintre noduri, modelul propus discretizează structura în elemente

constituite din întreaga bara permițând totodată considerarea efectului cuplat al neliniarității geometrice și cel al plastificării distribuite. O astfel de abordare conduce la un număr redus de grade de libertate, identic cu cel din analiza liniară a structurilor și implicit la un efort computațional semnificativ mai redus. O atenție deosebită a fost acordată modelării interacțiunii (conectării) parțiale dintre dala de beton și profilul metalic (în cazul grinzilor compozite) iar propunerea noastră se evidențiază prin faptul că, deși acest fenomen se poate evalua riguros la nivel de element, efectul conectării parțiale este tratat la nivel de secțiune, propunând în acest sens un algoritm de evaluare a comportării în domeniul elasto-plastic a secțiunilor compozite cu interacțiune parțială. Beneficiile unei astfel de abordări, dacă este corect calibrată, sunt multiple: permite utilizarea unui singur element finit cu două noduri pentru simularea comportării fiecărei bare cu secțiune mixtă a structurii, ca și în cazul structurilor omogene (un singur material), permite analiza în detaliu, în domeniul elasto-plastic, a secțiunilor de formă oarecare considerând relații constitutive complexe pentru materialele din care este constituită secțiunea, poate include explicit efectul tensiunilor reziduale în evaluarea caracteristicilor de deformabilitate și de rezistență, poate lua în considerare diferite modalități de conectare, tratează cazurile distribuțiilor uniforme sau neuniforme, discrete sau continue, ale conectorilor în lungul elementului. Mai mult efortul de modelare și de calcul este semnificativ redus în comparație cu modelele existente păstrând însă acuratețea rezultatelor. Toate aceste caracteristici permit abordarea structurilor reale de mari dimensiuni, cu includerea în analiză a efectelor principalilor factori determinanți și totodată cu performanțe computaționale însemnate. Modelul de calcul propus a fost implementat în cadrul aplicației Nefcad [37], extinzând astfel capacitățile acestei aplicații software.

6 Analiza avansată neliniară a structurilor mixte oțel-beton folosind pachetul comercial Abaqus

Dezvoltarea continuă a sistemelor hardware și software permite comunității științifice utilizarea tot mai pronunțată a metodelor numerice complexe de analiză, în pofida faptului că în multe situații acestea devin costisitoare din punct de vedere computațional și al timpului calculator necesar. În ultimele decenii metoda elementului finit a cunoscut o dezvoltare și utilizare perpetuă, fiind o unealtă de analiză care permite practic studiul elementelor structurale de orice formă, cu luarea în considerare a principalilor factori determinanți în răspunsul mecanic al acestora, însă în numeroase situații modelele numerice necesită o discretizare fină, rezultând astfel un număr mare de elemente finite ce conduce implicit la timp de calcul și resurse hardware substanțiale. Analizele structurale ale elementelor și structurilor mixte oțel-beton bazate pe metoda elementului finit pot fi, în general, divizate în două categorii: o primă categorie utilizează elemente finite, de obicei unidimensionale (de tip bară), special dezvoltate de cercetători, care permit studiul comportării elementelor mixte cu includerea în analiză a principalilor factori ce influențează răspunsul structural, în timp ce a doua categorie presupune utilizarea unor pachete comerciale de elemente finite, din această divizie cele mai cunoscute și utilizate programe fiind Ansys, Abaqus, MSC Marc, LS - DYNA, Nastran, Adina. În cadrul prezentei teze de doctorat s-a optat pentru utilizarea pachetului comercial de elemente finite Abaqus [15], program recunoscut și utilizat pe plan mondial de comunitatea științifică datorită capacităților multiple de modelare și analiză puse la dispoziția utilizatorului. Obiectivul principal al acestui capitol se restrânge asupra alegerii combinației convenabile de elemente finite selectate pentru simularea comportării diferitelor componente ale sistemului mixt, criteriul de selecție primar constând în obținerea unui raport acuratețe rezultate – timp de calcul optim. Bine-nțeles, scopul fundamental al acestui model numeric complex constă în crearea unei unelte numerice robuste care să contribuie la validarea modelului avansat de analiză descris în capitolul 5. În vedere obținerii unui model temeinic, pe parcursul acestei secțiuni se vor realiza diferite studii numerice ce vor avea ca parametri independenți în special dimensiunea și tipul elementelor finite selectate pentru modelarea diferitelor componente ale elementelor mixte, dar și metoda de conducere a analizei neliniare pentru determinarea răspunsul structural al specimenelor studiate. Modelul numeric va fi selectat pe de-o parte, în așa fel încât să nu impună restricții de modelare, iar pe de altă parte să fie capabil să surprindă majoritatea factorilor ce domină comportarea elementelor mixte: neliniaritatea geometrică și fizică, plastificarea graduală atât la nivel de secțiune cât și în lungul elementului, interacțiunea parțială dintre cele două materiale componente, efectul tensiunilor reziduale și al imperfecțiunilor geometrice.

6.1 Factori determinanți în simularea numerică

În vederea obținerii unui model numeric versatil, capabil să genereze cu acuratețe ridicată starea de tensiune și deformație din interiorul elementului analizat, trebuie să se țină cont, în funcție de particularitățile problemei studiate, de o serie de aspecte care au un rol determinant asupra eficienței modelului numeric generat. Astfel, o atenție sporită trebuie acordată selecție

modelelor constitutive utilizate pentru simularea comportării elastice și inelastice a materialelor componente, asupra tipurilor de elemente finite selectate pentru modelarea componentelor sistemului, asupra legăturilor dintre aceste componente și nu în ultimul rând asupra metodei de conducere a analizei neliniare. În cele ce urmează se vor prezenta o serie de particularități de modelare referitoare la aspectele enumerate anterior.

6.1.1 Modele constitutive selectate pentru definirea comportării materialelor

În calculul numeric, o importanță deosebită trebuie acordată modelelor constitutive alese pentru definirea comportării materialelor, deoarece acestea au o influență semnificativă asupra stării de tensiune și deformați. Aplicația Abaqus [15] are implementată o bibliotecă consistentă de modele constitutive pentru definirea comportării diferitelor materiale utilizate în mod curent în practica inginerescă și nu numai. În cele ce urmează se vor descrie modelele alese pentru definirea betonului și a oțelului.

6.1.1.1 Beton

Pentru acest material, caracterizat prin comportare la compresiune diferită de cea la întindere, programul dispune de trei modele constitutive distincte pentru definirea comportării postelastice, dintre care cel mai potrivit, pentru analiza elementelor ce fac obiectul prezentei teze de doctorat, s-a considerat a fi modelul *CDP – Concrete Damaged Plasticity*. Acest model de plastificare se bazează pe considerațiile teoretice descrise de Lubliner ș.a. [146], modificate ulterior de Lee & Fenves [147] și este destinat utilizării în cadrul problemelor în care, pe de-o parte betonul este supus unor acțiuni exterioare monotone, ciclice și/sau dinamice, iar pe de altă parte presiunile provenite din confinarea betonului sunt relativ mici (sub 20 – 25% din rezistența la compresiune uniaxială). În aceste circumstanțe, comportarea betonului este de natură casantă, principalele mecanisme de cedare fiind reprezentate de fisurare în zona întinsă și zdrobire în zona comprimată.

Tab. 6.1 Parametrii plasticității pentru modelul constitutiv CDP

Parametru	Valoare	Semnificație
Ψ	38°	Unghi de dilatare, fizic reprezintă unghiul de frecare internă
e	0.1	Raportul între rezistența la întindere și cea la compresiune
σ_{b0}/σ_{c0}	1.16	Raportul între rezistența la compresiune biaxială și cea uniaxială
K	0.667	Raportul între invariantul pătratic al tensiunilor, corespunzător meridianului de întindere și cel corespunzător meridianului de compresiune
ν	0.001	Parametru de regularizare al ecuațiilor constitutive. Practic, folosind valori diferite de zero, se permite violarea suprafeței de curgere, în vederea eliminării dificultăților de convergență

Ramura de comportare elastică este definită prin modulul de elasticitate longitudinal și coeficientul de contracție transversală, iar pentru definirea comportării postelastice se impune introducerea parametrilor ce caracterizează potențialul plastic și suprafața de curgere. Suplimentar, trebuie furnizate perechi de valori de forma tensiune – deformație inelastică atât pentru compresiune cât și pentru întindere. Identificarea cât mai corectă, bazată pe observații

experimentale, a parametrilor ce definesc potențialul și suprafața de curgere a reprezentat principalul obiectiv al lui Jankowiank și Lodygowski în [148]. Luând în considerare rezultatele obținute de autorii menționați anterior dar și specificațiile furnizate în manualul de utilizare al programului Abaqus [15], valorile selectate pentru parametrii plasticității sunt prezentate în *Tab. 6.1*.

Acest model constitutiv permite definirea a două variabile de degradare d_t și d_c care, în domeniul postcritic, afectează modulul de elasticitate inițial al betonului, ținând astfel cont de degradarea acestuia. Fig. 6.1 prezintă curbele tipice de comportare ale betonului întins și comprimat, precum și variabilele de degradare și influența acestora asupra modulului de elasticitate longitudinal inițial.

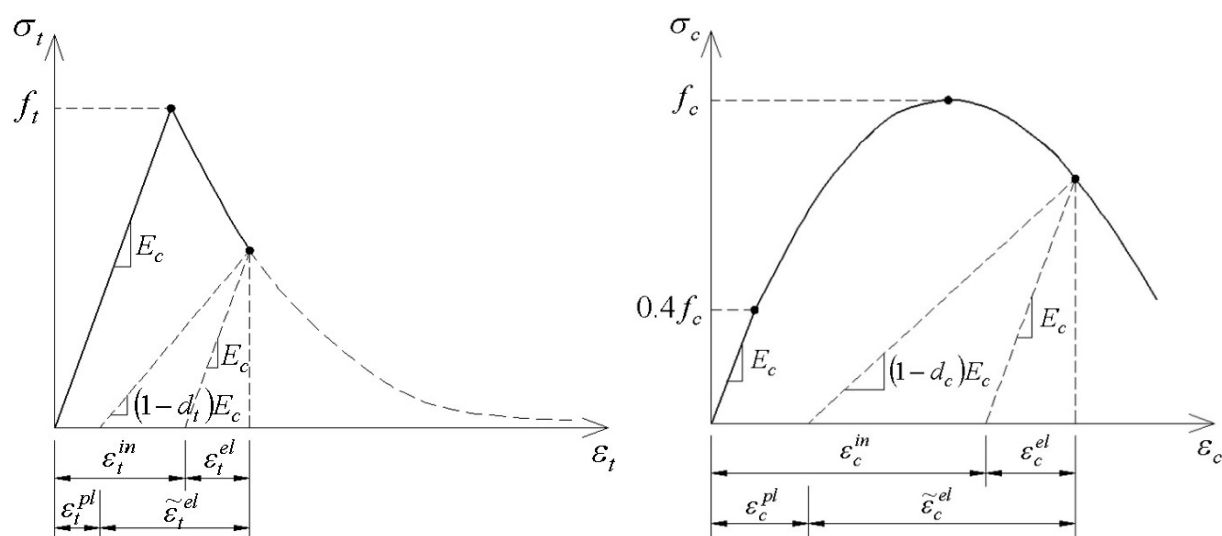


Fig. 6.1. Curba de comportare a betonului: a. întins și b. comprimat

În mod uzual, comportare betonului întins este dirijată de curba prezentată în *Fig. 6.1.a.*, compusă dintr-o primă ramură ascendentă liniară, definită prin modulul de elasticitate longitudinal al betonului E_c și coeficientul de contracție transversală μ , și o a doua porțiune descendentă parabolică, ce corespunde cu formarea de microfisuri, al căror efect este reprezentat la nivel macroscopic prin degradarea rigidității inițiale și apariția deformațiilor plastice. Această ultimă porțiune este definită prin perechi de valori de forma tensiune – deformație inelastică, obținută prin scăderea deformației elastice din deformația totală [15]:

$$\varepsilon_t^{in} = \varepsilon_t - \varepsilon_t^{el}; \quad (6.1)$$

unde,

$$\varepsilon_t^{el} = \frac{\sigma_t}{E_c}; \quad (6.2)$$

Deformația specifică plastică este calculată automat de program în baza următoarei relații:

$$\varepsilon_t^{pl} = \varepsilon_t^{in} - \frac{d_t}{1-d_t} \varepsilon_t^{el}; \quad (6.3)$$

sau,

$$\varepsilon_t^{pl} = \varepsilon_t^{in} - \tilde{\varepsilon}_t^{el}; \quad (6.4)$$

Comportarea betonului comprimat este guvernată de curba prezentată în *Fig. 6.1.b.* Porțiunea elastică este definită asemenea betonului întins prin modulul de elasticitate E_c și

coeficientul lui Poisson μ . Limita acestui domeniu de comportare se consideră a fi $0.4 \cdot f_c$, unde f_c reprezintă rezistența betonului la compresiune determinată pe cilindru. Ramura inelastică este compusă din două porțiuni, ambele definite prin perechi de valori tensiune-deformație inelastică. Prima, este caracterizată prin creșteri atât ale tensiunilor cât și ale deformațiilor (*stress hardening*), iar a doua este caracterizată prin creșteri ale deformațiilor și reduceri ale tensiunilor (*strain softening*). Deformațiile inelastice și cele plastice se calculează în mod similar cu cele determinate în situația betonului supus la întindere. Astfel:

$$\varepsilon_c^{in} = \varepsilon_c - \varepsilon_c^{el}; \quad (6.5)$$

unde ε_c^{el} reprezintă deformația specifică elastică:

$$\varepsilon_c^{el} = \frac{\sigma_c}{E_c}; \quad (6.6)$$

unde E_c reprezintă modulul de elasticitate longitudinal al betonului, considerat același atât la întindere cât și la compresiune. Deformațiile plastice sunt calculate automat de program, folosind deformațiile inelastice, introduse de utilizator, și variabilele de degradare d_c asociate fiecărui punct caracteristic de pe ramura descendentă a curbei de comportare a betonului comprimat [15]:

$$\varepsilon_c^{pl} = \varepsilon_c^{in} - \frac{d_c}{1-d_c} \varepsilon_c^{el}; \quad (6.7)$$

sau,

$$\varepsilon_c^{pl} = \varepsilon_c^{in} - \tilde{\varepsilon}_c^{el}; \quad (6.8)$$

Variabilele de degradare d_t și d_c pot lua valori între zero (materialul este nedegradat) și unu (degradare totală), însă se recomandă a nu se folosi valori mai mari decât 0.99 pentru a se evita dificultățile de convergență. Dacă nu se introduc aceste variabile, deformațiile plastice sunt egale cu cele inelastice și modulul de elasticitate transversal nu este degradat [15]. Acest model constitutiv poate fi asociat cu o varietate însemnată de elemente finite bi- (*shell*) și tri-dimensionale (*brick*), însă nu poate fi atribuit, decât în cazuri particulare, elementelor finite unidimensionale (*beam*). Mai mult, în cazul EF de tip *shell* a căror comportare este descrisă de modelul *CDP*, se recomandă utilizarea a cel puțin nouă puncte de integrare pe grosimea EF, pentru obținerea de rezultate cu grad de acuratețe rezonabil.

6.1.1.2 Oțel

Ramura de comportare elastică a oțelului este definită prin modulul de elasticitate longitudinal E_s și coeficientul de contracție transversală, în timp ce pentru ramura postelastice s-a optat pentru utilizarea modelului clasic de plasticitate al metalului, regăsit în cadrul programului Abaqus [1] sub denumirea **Plastic*. Acest model s-a utilizat pentru definirea comportării profilelor laminate, a armăturilor din dala de beton și a conectorilor, în situația în care aceștia au fost explicit modelați.

Modelul ales se bazează pe suprafața de curgere *Mises* și permite definirea de materiale cu comportare perfect plastică sau cu reconsolidare izotropă, ce presupune că suprafața de curgere își modifică mărimea uniform în toate direcțiile [15]. Reconsolidarea se definește în formă tabelară, prin perechi de valori tensiune – deformație plastică.

Legea de curgere plastică este asociată cu criteriul de plasticitate, ceea ce înseamnă că pe măsură ce materialul se plastifică (curge), deformațiile incrementale inelastice au direcția normalei la suprafața de curgere. Această ipoteză este în general acceptabilă în cazul metalelor [1].

Modelul clasic de plasticitate al metalelor poate fi atribuit oricărui tip de element finit formulat în deplasări (grade de libertate - deplasări).

6.1.2 Elemente finite utilizate pentru modelarea componentelor sistemului mixt

În cadrul acestei secțiuni se prezintă succint particularitățile elementelor finite selectate pentru modelarea diferitelor componente ale sistemului mixt oțel-beton. În vederea selecției cât mai judicioase a modelului de analiză și a tipurilor de elemente finite asociate, pe parcursul acestui capitol se va prezenta un exemplu numeric ce constă într-o grindă cu secțiune mixtă oțel-beton, a cărei modelare și simulare numerică se va face în trei variante distincte, diferențiate prin tipul (dimensiunea) elementelor finite selectate pentru reprezentarea componentelor grinzii. În Tab. 6.2 se prezintă categoriile de EF asociate fiecărui model numeric studiat. Trebuie menționat că în cazul modelului A sunt modelate explicit și zonele de conjeu.

Tab. 6.2. Categoriile de EF utilizate în modelările studiate

	Model		
	A	B	C
Beton	solid	solid	solid
Profil	solid	placă	bară
Armături	bară	bară	bară
Conectori	solid	conector	conector

Analizând Tab. 6.2 se poate sesiza că modelul A are cel mai înalt grad de complexitate fiind alcătuit din EF tridimensionale, excepție făcând armăturile a căror reprezentare s-a făcut prin EF de tip bară. La cealaltă extremă se situează modelul C, rezultat prin combinarea EF tridimensionale, selectate pentru modelarea dalei de beton, cu EF unidimensionale, selectate pentru modelare profilului metalic și a armăturilor. Legătura profil-placă se realizează prin intermediul unor elemente speciale asupra cărora se va reveni în paragrafele următoare. Modelul B, se diferențiază de modelul C prin utilizarea de EF bidimensionale pentru modelarea profilului metalic. Se poate observa că, în cadrul fiecărui model numeric, modelarea componentei de beton s-a realizat cu EF tridimensionale, principalul argument al acestei opțiuni constând în posibilitatea includerii explicite a armăturilor și a interacțiunii acestora cu betonul înconjurător. În continuare se prezintă principalele clase de EF utilizate pentru modelarea componentelor sistemului mixt.

6.1.2.1 Modelarea volumelor de beton

Componentele de beton s-au modelat utilizând EF tridimensionale de forma paralelipipedică având opt noduri dispuse în colțuri (v. Fig. 6.2.a.). În funcție de numărul gradelor de libertate și de schema de integrare folosită, se disting trei EF: *C3D8*, *C3D8R* și *C3D8I*. În cazul

fiecărui element, gradele de libertate considerate sunt deplasările din nodurile elementului, iar în orice alt punct de pe volumul EF, deplasarea se obține prin interpolare liniară a deplasărilor de la nodurile adiacente punctului. Diferența între primele două EF constă în numărul punctelor de integrare folosite pentru formarea matricei de rigiditate. *C3D8* folosește integrare completă (8 puncte de integrare), iar *C3D8R* folosește un singur punct de integrare (centrul EF) pentru obținerea matricei de rigiditate a elementului, fiind astfel mai eficient din punct de vedere computațional. Un dezavantaj al acestui tip de EF constă în posibilitatea apariției efectului de *hourglassing*, caracterizat prin distorsionarea necontrolată a rețelei de discretizare în cazul în care deformațiile din punctul de integrare înregistrează valori nule, deși în realitate EF suferă modificări ale geometriei (v. Fig. 6.2.b.), deformațiile trebuind a fi reprezentate cel puțin cu variație liniară. Acest efect nu apare în cazul EF cu integrare completă (8 puncte) *C3D8* însă, în cazul solicitării la încovoiere, acesta este predispus unui alt fenomen numeric denumit în literatura de specialitate *shear locking* (v. Fig. 6.2.c), EF manifestând astfel rigiditate superioară nejustificată. Datorită adoptării variației liniare a deformațiilor, laturile EF trebuie să rămână drepte, iar pentru surprinderea convenabilă a încovoierii sunt introduse "false" deformații unghiulare în ecuațiile de compatibilitate ale EF, rigidizând astfel comportarea acestuia la încovoiere.

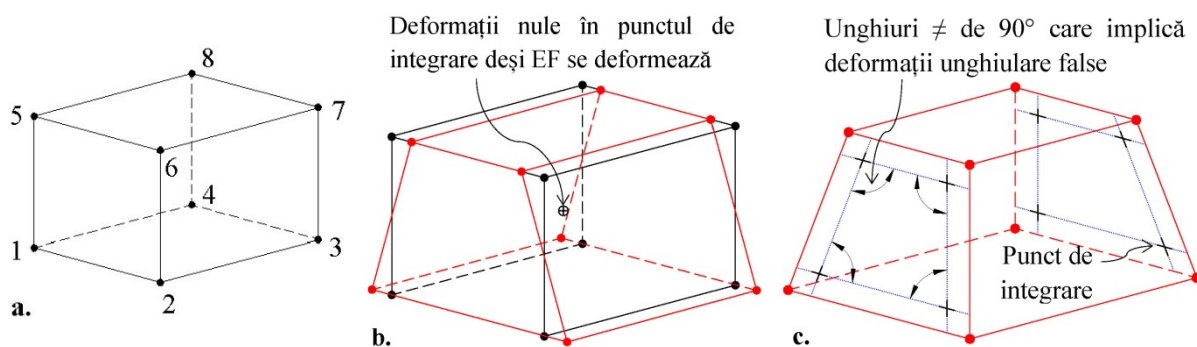


Fig. 6.2.a. EF tridimensional cu 8 noduri; b. Efectul de *hourglassing*; c. Efectul de *shear locking*

Pentru eliminarea acestui efect, formularea elementului finit *C3D8I* include suplimentar 13 GDL interioare care detectează cu acuratețe ridicată deformarea EF supus la încovoiere, fiind astfel mai costisitor decât *C3D8*, dar mai eficient decât *C3D20R* (20 de noduri, 8 puncte Gauss de integrare), nivelul de acuratețe fiind similar cu cel obținut folosind EF având 20 de noduri [15]. Pe baza acestor considerente, volumele de beton s-au modelat cu EF de tip *C3D8I*, aceste furnizând rezultate cu nivel înalt de acuratețe când fețele elementelor sunt rectangulare.

6.1.2.2 Modelarea profilului metalic

În cadrul modelului A, profilul metalic s-a discretizat în EF tridimensionale cu 8 noduri *C3D8I*, particularitățile acestuia fiind prezentate în secțiunea acestora. Suplimentar, zonele de conțeu s-au modelat cu EF tetraedrice cu 4 noduri denumite *C3D4*, selecția acestui EF fiind impusă de forma zonelor de racordare dintre tălpi și inima profilului. Starea de tensiune pe aceste elemente este constantă, iar rigiditatea manifestată este, în general, prea mare. Acuratețe satisfăcătoare poate fi obținută prin utilizarea unei rețele fine de discretizare.

Schematizarea profilelor laminate în cadrul modelului B s-a făcut folosind elemente finite de tip placă (*shell*), de formă patrulateră având patru noduri dispuse în colturi și admitând variație liniară a deplasărilor între noduri. În funcție de numărul gradelor de libertate și de schema de integrare folosită, se disting trei EF: *S4*, *S4R* și *S4R5*. Primele două EF au câte șase GDL per nod, trei translații și trei rotații, dar se diferențiază prin numărul punctelor de integrare folosite pentru formarea matricei de rigiditate: *S4* – 4 puncte (v. *Fig. 6.3.a.*), iar *S4R* – 1 punct (v. *Fig. 6.3.b.*). În formularea ambelor elemente se ține cont de efectul deformațiilor de unghiulare (admițând variații constante ale acestora pe grosimea EF), putând fi folosite atât în teoria de placă subțire (când grosimea este mai mică decât 1/15 din lungime) cât și în teoria de placă groasă. Fenomenul de *shear locking* nu este tipic acestor elemente însă efectul de *hourglassing* poate apărea în situații particulare când sunt folosite EF cu schemă redusă de integrare. Totuși, programul Abaqus [15] are implementată o metodă de control artificial al acestui fenomen care coroborată cu folosirea unei discretizări fine reduce efectele nefavorabile ale aceste instabilități. EF *S4R5* are doar cinci GDL per nod – trei translații și cele două rotații din planul elementului. Un inconvenient major al acestui EF constă în neglijarea efectului deformațiilor unghiulare fiind pretabil doar pentru analiza sistemelor cu grosime mică. În urma acestor considerente, dar și ținând cont de rezultate studiilor de senzitivitate prezentate în manualul programului Abaqus [15], s-a optat pentru utilizarea EF *S4R*, pentru modelarea profilului metalic în cazul modelului B (v. *Tab. 6.2*). Răspunsul secțional se obține folosind metoda Simpson de integrare considerând 7 puncte pe grosimea fiecărui EF. Suprafața de referință este considerată a fi suprafața mediană a EF.

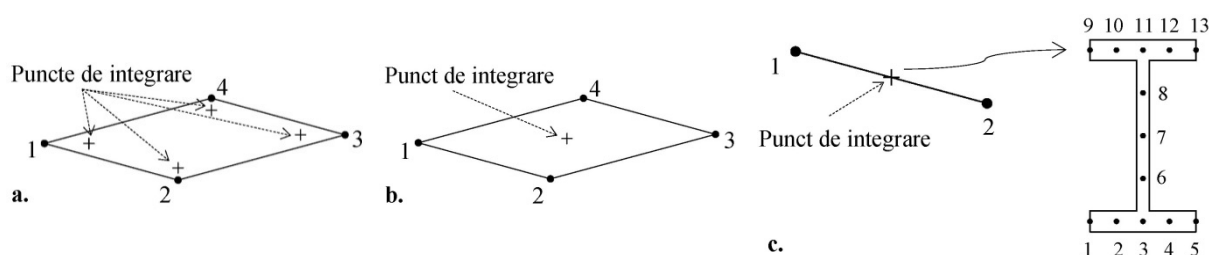


Fig. 6.3.a. EF de tip S4; b. EF de tip S4R; c. EF de tip B31

În cadrul modelului C, profilul laminat s-a modelat prin intermediul EF unidimensionale de tip bară cu două noduri și șase GDL per nod (trei translații și trei rotații). În această categorie, se înscriu EF *B31* și *B33*. Primul dintre ele consideră variația liniară a deplasărilor pe lungimea elementului și este formulat în baza teoriei Timoshenko, luând astfel în considerare și efectul deformațiilor unghiulare. Formularea consideră doar comportarea elastică la forfecare (definită prin modulul de elasticitate transversal), independentă de răspunsul la sollicitări axiale sau la încovoiere. În cazul profilelor laminate de tip I, aria ce preia forța tăietoare este considerată a fi 44% din aria secțiunii [15]. De cealaltă parte, elementul *B33* admite ipoteza secțiunilor plane dar și normale la axa barei, neglijând astfel efectul deformațiilor de lunecare transversale. Formularea folosește funcții cubice pentru interpolarea deplasărilor pe lungimea EF. Elementele selectate pentru modelarea profilului metalic în cazul modelului C sunt cele ce includ și efectul deformațiilor unghiulare și anume *B31*. La nivel de secțiune, răspunsul este obținut prin integrare Simpson, utilizând câte 5 puncte de integrare pe fiecare latură a secțiunii laminate I. (v. *Fig. 6.3.c.*)

6.1.2.3 Modelarea armăturilor

În fiecare din cele trei modele numerice studiate (v. Tab. 6.2) reprezentarea armăturilor se face cu elemente finite unidimensionale cu două noduri denumite *T3D2*. Spre deosebire de EF folosite pentru modelarea profilului metalic în cazul modelului C, aceste EF nu prezintă rigiditate la încovoiere fiind pretate pentru modelarea structurilor solicitate axial. Deplasările din lungul EF se determină prin interpolarea valorilor din noduri, iar tensiunea este constantă pe întreg elementul. Aderența dintre armături și betonul înconjurător s-a considerat perfectă, această interconectare fiind obținută cu ajutorul opțiunii *Embedded elements*.

6.1.2.4 Modelarea conectorilor

În cadrul modelului numeric A conectorii au fost modelați explicit, iar discretizarea lor s-a făcut în EF tridimensionale de tip *C3D8I*. În acest caz, o atenție deosebită trebuie acordată partiționării conectorilor, în așa fel încât EF rezultate în urma discretizării să aibă forme regulate pentru a evita problemele de convergență datorate distorsiunii acestora. Contactul dintre conectori și betonul înconjurător s-a definit atât în direcție normală (*hard contact*) cât și tangențială (coeficientul de frecare folosit fiind 0.2, ales pe baza rezultatelor numerice raportate de *Guezouli & Lachal* [94]).

În celelalte două modele numerice, conectorii s-au modelat discret prin utilizarea unor elemente speciale de tip *connector* regăsite în biblioteca programului Abaqus [15] și denumite formal *CONN3D2*. Aceste elemente prezintă două noduri și sunt utilizate pentru crearea unor interacțiuni între două componente ale sistemului ce urmează a fi analizat. În cazul de față primul punct al conectorului aparține profilului metalic, iar cel de-al doilea aparține plăcii de beton. Fiecare nod component al conectorului are șase grade de libertate dând astfel posibilitatea producerii a cel mult șase deplasări relative distincte (trei translații și trei rotații) ale nodului 2 față de nodul 1. Trebuie menționat că aceste deplasări relative sunt raportate la sistemul local al conectorului. În biblioteca programului Abaqus [15] sunt implementate o gamă largă de tipuri de conectori funcție de combinațiile de deplasări permise în sistemul local al elementului. În analizele ce fac obiectul prezentei teze de doctorat s-a optat pentru utilizarea unui conector compus denumit formal *Cartesian+Align*, în cadrul căruia sunt permise doar translații relative între cele două noduri, rotațiile acestora fiind egale. Mai mult, este împiedicată translația relativă dintre cele două noduri în direcția perpendiculară interfeței de contact dintre componenta de beton și profilul metalic, neglijând astfel fenomenul de *uplift*. Deplasarea nodului 2 raportată la cea a nodului 1, pe cele două direcții ale planului de contact dintre componentele sistemului mixt, se definește tabelar prin perechi de valori forță-deplasare existând astfel posibilitatea simulării comportării neliniare a conectorilor. Așa cum s-a precizat și în capitolele anterioare, curba de comportare a conectorilor se obține experimental, prin încercări pe specimene standardizate, sau analitic, folosind modelul propus de *Ollgaard* cu parametrii de formă asociați [37].

6.1.2.5 Modelarea nodurilor grindă-stâlp

Exemplul numeric tratat în cadrul acestui capitol constă într-o grindă cu secțiune mixtă oțel-beton și astfel nu dispune de conexiuni grindă-stâlp însă, datorită faptului că pe parcursul

capitolului de validare a modelului de analiză propus, se tratează și structuri în cadre mixte oțel-beton, vedem oportună prezentarea câtorva particularități de modelare ale nodurilor dintre elementele verticale (stâlpi) și cele orizontale (grinzi). În toate exemplele numerice realizate pe cadre nodurile sunt considerate rigide (nedeformabile) în consecință fiind modelate cu EF rigide de tip *R3D4* care nu se deformează ci doar transmit încărcări. Legătura dintre aceste EF și extremitățile elementelor concurente în nod s-a modelat utilizând opțiunea *Rigid Body*, deplasarea de corp rigid a nodului fiind guvernată de deplasarea punctului de referință asociat, ales în general în centrul geometric al conexiunii.

6.1.3 Modelarea tensiunilor reziduale și a imperfecțiunilor geometrice inițiale

În cadrul acestei secțiuni ne propunem trecerea în revistă a principalelor particularități referitoare la modelarea tensiunilor reziduale și a imperfecțiunilor geometrice globale inițiale (deviația de la verticalitate), efectul acestora trebuind să fie luat în considerare în contextul unei analize avansate.

În cazul profilelor formate prin laminare la cald, în urma răcirii după laminare, secțiunea transversală este supusă acțiunii unor tensiuni reziduale autoechilibrate de tip membranar, constante pe grosimea pereților profilului (*Dubină* [149]), al căror efect devine important în cazul elementelor supuse acțiunii unor eforturi axiale mari (*Chiorean* [11]). În literatura de specialitate pot fi consultate mai multe distribuții ale tensiunilor reziduale (*Kim ș.a.* [150], *Szalai & Papp* [151]), iar în analizele prezentate în această lucrare s-a optat pentru distribuția liniară propusă de ECCS [152], prezentată în *Fig. 6.4.a*.

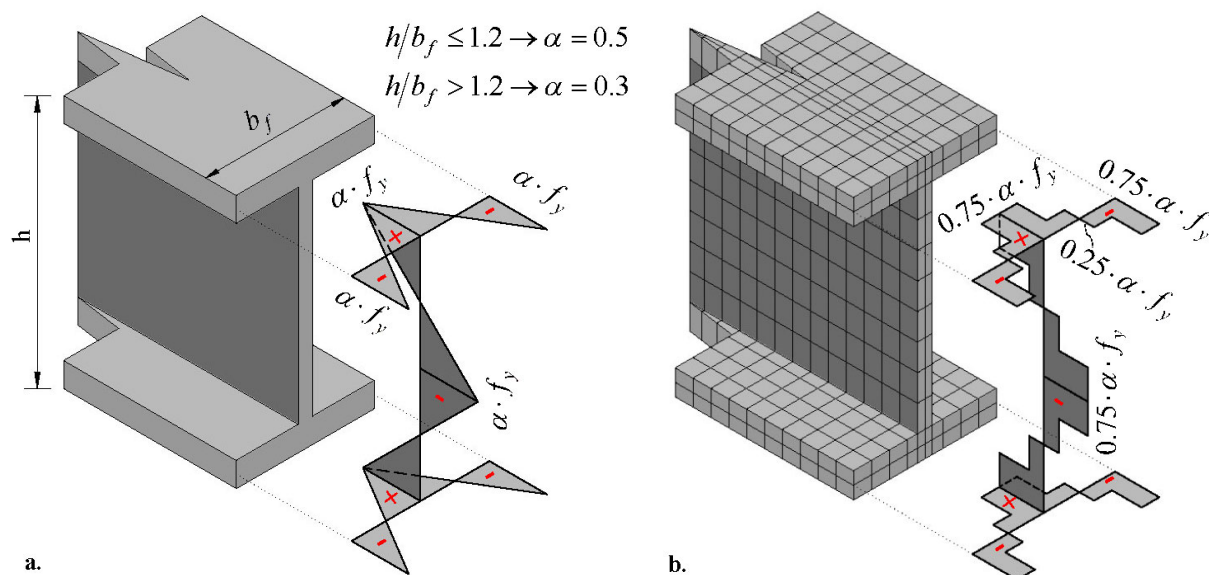


Fig. 6.4. Tensiuni reziduale: **a.** Distribuția ECCS; **b.** Distribuția modelată în Abaqus

Efectul tensiunilor reziduale (sub formă de condiții inițiale) poate fi introdus în Abaqus [15] în două moduri distincte: fie indirect, utilizând subrutina *Sigini* (programată în limbajul Fortran), fie direct, folosind opțiunea *Initial Conditions, Type – Stress*, aceasta din urmă fiind metoda aleasă pentru reprezentarea tensiunilor reziduale. Tensiunile inițiale sunt introduse în nodurile rețelei de discretizare, impunându-se astfel modelarea profilului metalic de EF bi – sau tridimensionale, pentru a se putea introduce valori distincte ale tensiunilor reziduale

punctele caracteristice ale secțiunii transversale. Totuși, utilizarea subrutinei *Sigini* permite reprezentarea aproximativă a variației tensiunilor reziduale și în cazul folosirii EF unidimensionale de tip bară, prin introducerea de valori inițiale în punctele de integrare ale secțiunii transversale (*Shayan* [153]). În situația utilizării EF de tip *shell* sau *solid*, reprezentarea mai fidelă a variației prezentate în...se poate obține prin folosirea unei rețele fine de discretizare a profilului metalic. În prezenta lucrare, în cazul introducerii tensiunilor reziduale, tălpile și inima profilului au fost divizate în 10 respectiv 8 EF, iar variația aproximativă considerată a tensiunilor reziduale este prezentată în *Fig. 6.4.b*.

În cazul barelor, imperfecțiunile geometrice inițiale pot fi divizate în două categorii: deviația de la verticalitate (*out of plumbness*) respectiv deviația de la rectilinitate (*out of straightness*). Într-o analiză avansată aceste fenomene trebuie luate în considerare, deoarece pot influența capacitatea de rezistență a structurilor analizate, efectul fiind mai pronunțat în cazul stâlpilor predispuși la pierderea stabilității prin flambaj. În literatura de specialitate se disting mai multe metode de includere a efectelor imperfecțiunilor geometrice inițiale dintre care amintim: scalarea (cu factorii de magnitudine ai imperfecțiunilor geometrice) coordonatelor nodurilor corespunzătoare geometriei modului fundamental de flambaj, introducerea de forțe concentrate orizontale în nodurile grindă – stâlp (pentru simularea deviației de la verticalitate) respectiv de sarcini orizontale uniform distribuite (pentru simularea deviației de la rectilinitate), modelarea geometriei inițiale cu includerea explicită a imperfecțiunilor geometrice în coordonatele inițiale ale nodurilor și reducerea modulului de elasticitate longitudinal [153]. În analizele ce fac obiectul acestei lucrări s-a optat pentru utilizarea primei metode de includere a imperfecțiunilor geometrice. În acest sens, în prima etapă se efectuează o analiză elastică de tip *Buckle* (pe geometria inițială ‘perfectă’) pentru determinarea formelor proprii de flambaj. În cea de-a doua etapă, coordonatele nodurile corespunzătoare primului mod de flambaj sunt scalate cu valoarea considerată a magnitudinii imperfecțiunilor. În acest fel, încărcările exterioare sunt aplicate pe configurație geometrică modificată. Trebuie menționat că în analizele prezentate în capitolul următor s-au introdus doar imperfecțiuni de tipul deviație de la verticalitate (acolo unde e cazul).

6.1.4 Aplicarea încărcărilor și modul de conducere a analizei neliniare

În cazul grinzilor supuse acțiunii unor forțe concentrate, pentru evitării concentrărilor de tensiuni și implicit a instabilităților numerice, încărcările s-au transmis elementelor structurale (grinzilor) prin intermediul unor plăcuțe rigide de mici dimensiuni (având lungimea de 100 mm, iar lățimea egală cu cea a tălpilor profilului metalic). Aceste plăcuțe s-au poziționat pe partea superioară a dalei de beton, iar legătură dintre acestea s-a considerat perfectă, fiind realizată prin intermediul opțiunii *Tie Constraint*. Sarcinile uniform distribuite s-au simulat prin presiuni aplicate la partea superioară a componentei de beton, lățimea suprafeței de încărcare fiind egală cu cea a profilului metalic al grinzii mixte. Încărcările orizontale întâlnite în cazul cadrelor s-au aplicat concentrat în punctele de referință ale conexiunilor rigide dintre grinzi și stâlpi.

Analizele neliniare ce fac obiectul acestei lucrări au fost conduse folosind un procedeu incremental iterativ, cu control în lungimea de arc, această metodă asigurând convergența soluției chiar și în cazul problemelor unde răspunsul (în spațiul forță – deplasare) are un

puternic caracter neliniar și instabil sau unde răspunsul structurii în spațiul forță – deplasare manifestă rigiditate negativă. În cadrul acestei metode, atât deplasările cât și incrementul de încărcare (factorul incremental de încărcare $\Delta\lambda$) reprezintă necunoscute ale problemei. Predicția factorului incremental de încărcare se face pe baza unei ecuații suplimentare de constrângere în expresia căreia intervine o variabilă independentă denumită *lungimea de arc*. Programul Abaqus [15] are implementată metoda propusă de Riks, însă cu modificări asupra modalității de ajustare a valorii lungimii de arc pe parcursul fiecărui increment. Odată stabilit factorul incremental de încărcare $\Delta\lambda$, se inițiază un proces iterativ de echilibrare între forțele exterioare curente ($\lambda \cdot P$, unde P reprezintă încărcările de referință introduse de utilizator) și cele calculate pe baza deplasărilor corespunzătoare stării actuale. Soluția curentă este căutată într-un plan perpendicular pe tangenta, de lungime $\Delta\lambda$, dusă la curba de echilibru prin punctul din spațiul încărcare-deplasare corespunzător ultimei soluții. În cadrul procesului iterativ, soluția sistemului ecuațiilor de echilibru este obținută folosind metoda Newton. La finalul analizei programul furnizează evoluția factorului de încărcare λ , iar încărările aplicate se determină prin înmulțirea acestui factor cu valori încărărilor de referință introduse. Așa cum se poate deduce, pe parcursul unei analize Riks, toate încărcările exterioare sunt aplicate proporțional ($\lambda \cdot P$).

6.2 Exemplu numeric de verificare a modelelor numerice propuse

În cadrul acestei secțiuni se prezintă comparativ rezultatele și performanțele modelelor avansate discutate în paragrafele anterioare pe un exemplu numeric selectat din literatura de specialitate. Elementul mixt selectat pentru acest studiu este grinda E1 testată experimental de Chapman & Balakrishnan [17]. Schema statică și secțiunea transversală a elementelor analizate sunt prezentate în *Fig. 6.5*, iar caracteristicile mecanice ale materialelor sunt sintetizate în *Tab. 6.3*.

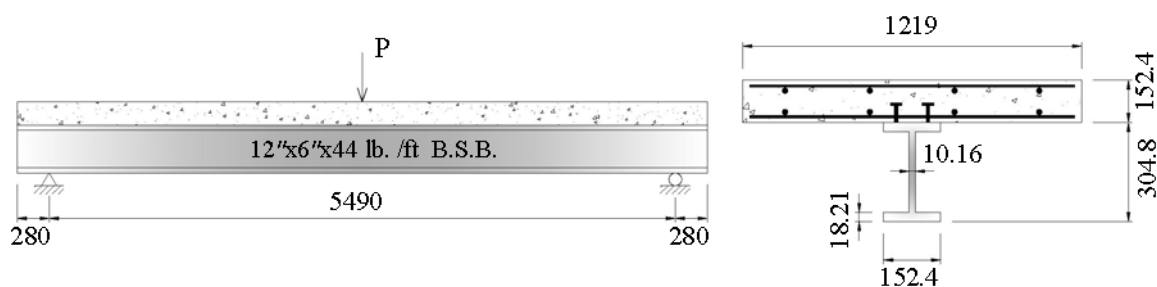


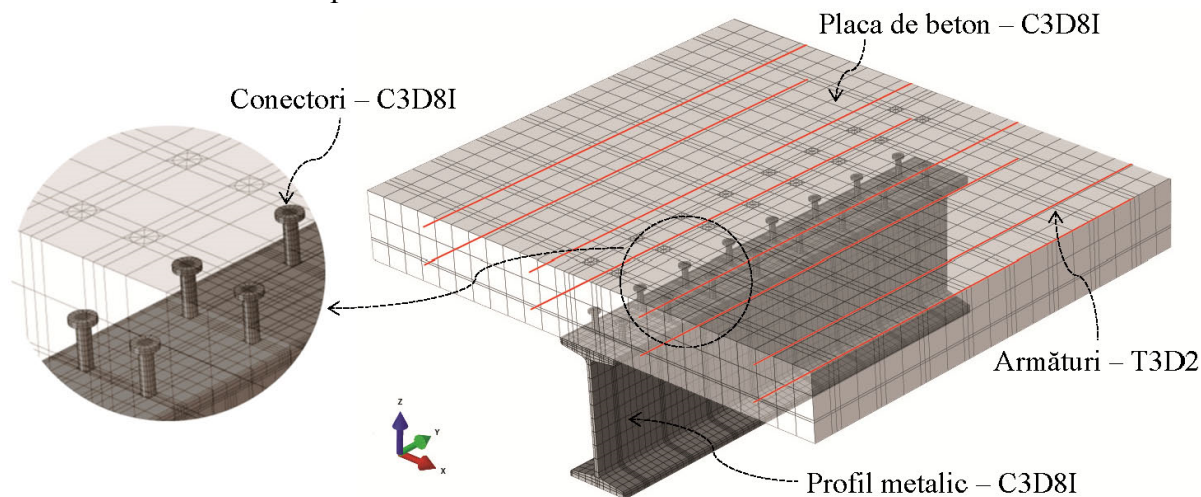
Fig. 6.5 Configurația geometrică a grinzii E1

Modulul de elasticitate longitudinal al betonului a fost calculat folosind relațiile CEB-FIP 1990 [136]. Proprietățile mecanice ale armăturilor dar și modulul de elasticitate longitudinal aferent porțiunii de consolidare au fost preluate din *Queiroz ș.a.* [78], deoarece acestea nu sunt menționate în lucrarea publicată de *Chapman & Balakrishnan* [17].

Tab. 6.3. Caracteristici mecanice ale materialelor grinzii E1

		E1	
Beton	f_c (MPa)	32.68	
	E_c (MPa)	31905	
Oțel	f_y (MPa)	tălpi	249.4
		inimă	296.5
		armături	320
		conectori (model A)	500
	f_u (MPa)	tălpi	464.9
		inimă	460.2
		conectori	565
	E_s (MPa)	tălpi	208497
		inimă	202320
		armături	205000
		conectori (model A)	205000
	ϵ_h	tălpi	0.0026
inimă		0.0015	
E_h (MPa)	tălpi	3500	
	inimă	3500	
Armare longitudinală	$\phi 8/304.8$ la partea superioară și inferioară a plăcii		
Armare transversală	$\phi 12.7/152.4$ la partea superioară a plăcii $\phi 12.7/304.8$ la partea inferioară a plăcii		
Conexiune	Număr total de conectori	100	
	Număr de rânduri@Spațiere (mm)	2@121	
	P_{sc} (kN) (model B și C)	64.67	

În Fig. 6.6. se prezintă cele trei modele numerice, generate pe baza detaliilor descrise în secțiunile anterioare. În ceea ce privește conexiunea dintre profilul metalic și componenta de beton, în cazul modelelor B și C, s-a realizat discret folosind elemente speciale dedicate conectării diferitelor componente ale unui model numeric.



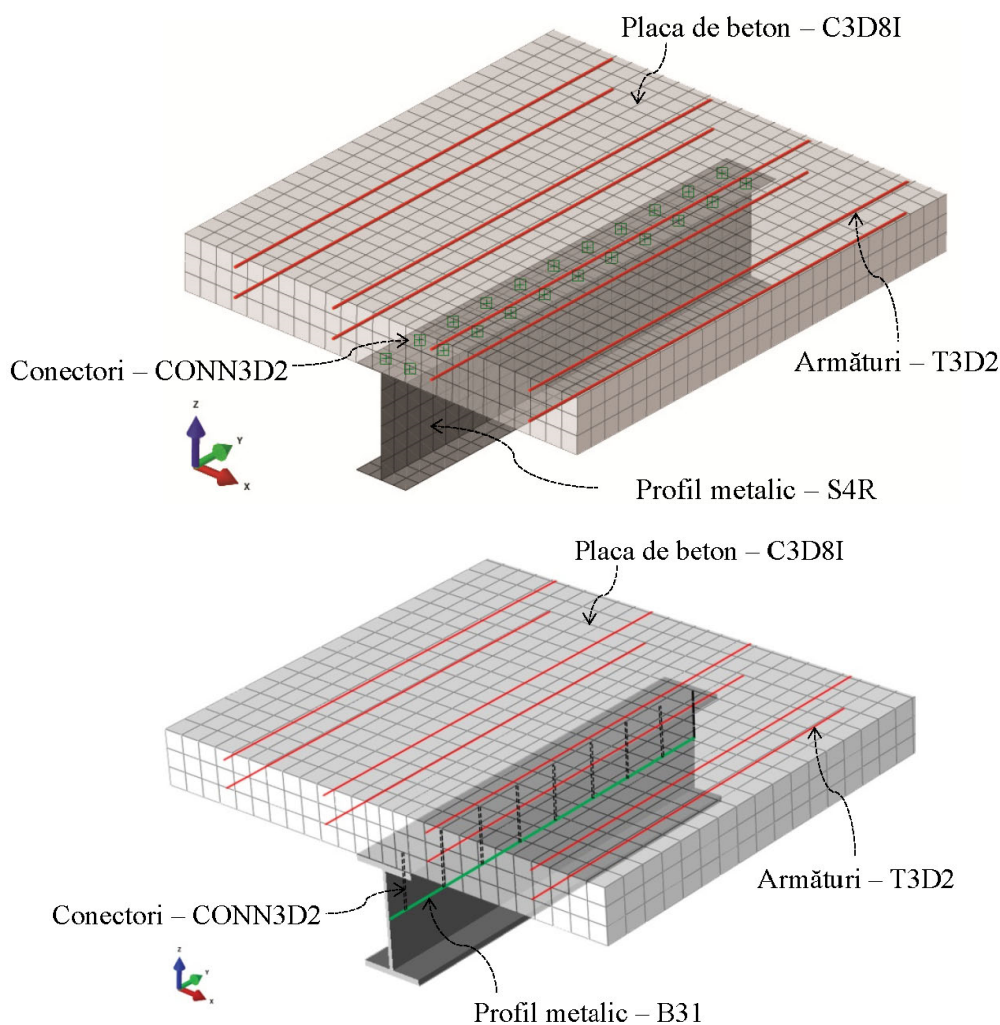


Fig. 6.6. Modele numerice testate

Așa cum se poate observa, în cazul modelului B, lungimea acestor elemente este zero, iar în cadrul modelului C lungimea elementelor de conectare corespunde cu jumătate din înălțimea profilului metalic. Curba introdusă pentru simularea comportării conectorilor este cea determinată experimental pe specimene standardizate și a fost preluată din [17]. Trebuie menționat că în cazul modelului C, în care nu este posibilă dispunerea în perechi a conectorilor (profilul metalic fiind modelat cu EF de tip bară), curba de comportare a fost modificată prin dublarea valorilor forțelor, simulând astfel în mod aproximativ dispunerea reală a dispozitivelor mecanice de conectare (în perechi, v. Fig. 6.5.).

În Fig. 6.7. se prezintă comparativ curbele de comportare ale grinzii E1 în spațiul încărcare-săgeată maximă, obținute cu cele trei modele numerice descrise anterior. Aceste rezultate sunt puse în antiteză cu cele experimentale raportate de Chapman & Balakrishnan [17]. În ceea ce privește modelul A, se observă că acesta surprinde cu acuratețe ridicată rigiditatea inițială a sistemului însă supraestimează capacitatea portantă a grinzii, acest aspect putând fi pus pe seama problemelor numerice manifestate de EF tridimensionale utilizate pentru modelarea zonelor de racordare dintre tălpile și inima profilului metalic. Pe de altă parte rigiditate crescută pot manifesta și EF de tip C3D8I (utilizate pentru modelarea betonului și a profilului metalic), deoarece acestea prezintă comportare optimă la încovoiere

în cazul în care fețele componente au formă rectangulară, acuratețea fiind afectată când forma fețelor este paralelogram sau trapez.

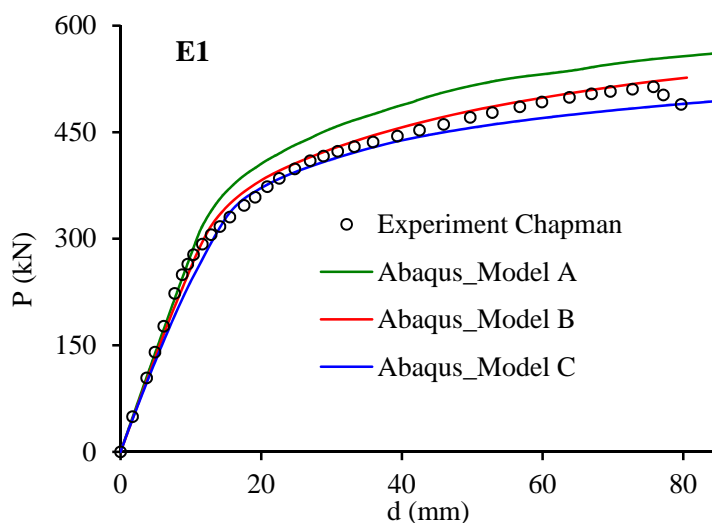


Fig. 6.7. Curbe încărcare-săgeată pentru grinda E1

Durata analizei pe un sistem de calcul dotat cu 2 procesoare având frecvența de 2.80 GHz și 8 nuclee fiecare respectiv 48 GB RAM este de aproximativ 7 h. Curba de comportare obținută cu modelul B este în foarte bună concordanță cu cea manifestată experimental, atât în ceea ce privește rigiditatea inițială cât și capacitatea portantă. Trebuie menționat că în acest caz efectul coneurilor este introdus doar aproximativ. Așa cum s-a specificat în secțiunile anterioare, în cazul modelului B, suprafețele de referință ale tălpilor și inimii sunt considerate a fi suprafețele mediane ale acestora și astfel se înregistrează o dublare a materialului în zonele de intersecție dintre tălpi și inimă, care compensează, în mod aproximativ, modelarea explicită a zonelor de racordare (model A). În altă ordine de idei, pe sistemul de calcul menționat anterior, modelul B trasează curba de comportare a grinzii în aproximativ 10 min. În fine, trecând la modelul C, cel mai puțin complex, se observă că acesta manifestă rigiditate inițială sensibil inferioară față de cea determinată experimental. Aceeași tendință de subestimare este observată și asupra capacității portante, încărcarea ultimă prezisă fiind mai mică cu 5%. În acest caz de modelare, nu se poate ține cont de efectul coneurilor și, mai mult, nu se pot atribui proprietăți distincte de material diferitelor porțiuni componente ale profilului metalic. Durata unei analize este sensibil mai mică decât în cazul folosirii modelului B.

Fig. 6.8 prezintă variația lunecărilor relative dintre placa de beton și grinda metalică, corespunzătoare nivelului de încărcare de 450 kN. Valorile lunecărilor longitudinale s-au măsurat în dreptul fiecărei secțiuni de poziționare a conectorilor ca diferență între deplasarea orizontală a plăcii de beton și cea a profilului metalic la nivelul interfeței de contact dintre cele două componente. Având în vedere aceste aspecte se poate deduce, că în cazul modelului C, nu a fost posibilă cuantificarea deplasărilor orizontale relative dintre componente, deoarece profilul metalic este modelat prin EF unidimensionale, a căror puncte de integrare numerică aparțin axei de referință ce corespunde cu axa de greutate a profilului metalic și astfel valorile deplasărilor nu sunt calculate în punctele aparținând tălpii superioare. Se poate observa că modelul B furnizează rezultate cu acuratețe considerabilă, fiind în bună

concordanță cu cele obținute experimental, în timp ce modelul A manifestă și în acest caz rigiditate sporită.

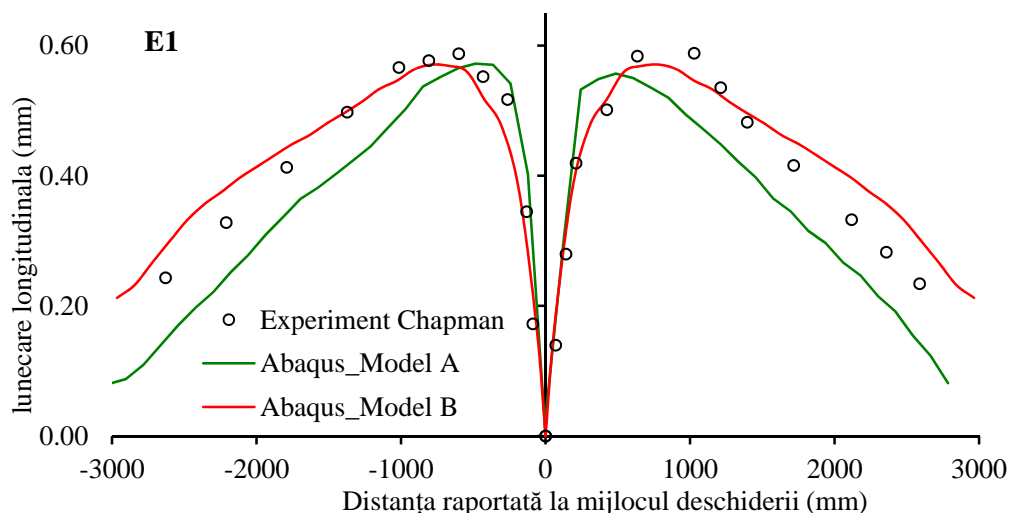


Fig. 6.8 Variația lunecării longitudinale în lungul grinzii

Analizând în ansamblu performanțele celor trei modele numerice considerate, se observă că modelul B furnizează rezultatele cele mai apropiate de cele experimentale, iar timpul de analiză este mult inferior celui corespunzător modelului A, respectiv comparabil cu cel aferent modelului C, oferind astfel raportul optim dintre acuratețe și performanță numerică. În consecință acest model este selectat ca model de validare al procedurii avansate de analiză, prezentat în capitolul anterior. În general, acest model nu impune restricții de modelare, permițând, spre deosebire de modelul C, includerea efectului tensiunilor reziduale, însă, spre deosebire de modelul A, efectul coneurilor este considerat în mod aproximativ.

6.3 Considerații finale

În cadrul acestui capitol s-au prezentat principalele detalii cu privire la modelul numeric dezvoltat în pachetul comercial de EF, Abaqus [15]. Atenție sporită s-a acordat modelelor constitutive selectate pentru modelarea materialelor, asupra tipurilor de EF utilizate pentru simularea diferitelor componente ale sistemului mixt și nu în ultimul rând asupra metodei de conducere a analizei neliniare. În vederea alegerii modelului numeric optim, s-a prezentat un exemplu numeric simulat în trei configurații diferite, funcție de categoria de EF selectate pentru simularea profilului metalic și a conexiunii dintre acesta și placa de beton. Analizând performanțele și acuratețea rezultatelor furnizate de fiecare model în parte, s-a decis selectarea modelului B ca model de calibrare, ce urmează a fi aplicat în studiile numerice prezentate în capitolul următor. Acest modelul numeric s-a generat prin combinare EF tridimensionale de tip C3D8I (folosite pentru modelare dalei de beton), cu EF bidimensionale de tip S4R (utilizate pentru modelarea profilului metalic) respectiv cu EF unidimensionale de tip B31 (utilizate pentru simularea comportării armăturilor).

7 Validarea modelului de analiză propus prin experimente numerice

În vederea validării modelului de analiză propus, au fost selectate din literatura de specialitate o serie de structuri având secțiune transversală mixtă oțel–beton, fiecare dintre acestea fiind modelate și analizate urmând specificațiile și detaliile prezentate în capitolele anterioare ale prezentei lucrări. Rezultatele obținute s-au comparat cu cele obținute pe cale experimentală și/sau cu rezultate numerice obținute de alți cercetători și prezentate în literatura tehnică internațională. Majoritatea exemplurilor, utilizate pentru verificarea modelului propus, sunt grinzi simplu rezemate și continue, deoarece, pe de-o parte, studiile experimentale sunt, în general, concentrate pe astfel de elemente datorită dimensiunilor reduse iar, pe de altă parte, factorii care influențează răspunsul structural (de ex. interacțiunea parțială dintre dala de beton și grinda metalică), sunt mai bine evidențiați pe elemente solitare (grinzi) decât pe structuri alcătuite din elemente cu secțiune mixtă oțel–beton (cadre plane și spațiale). Totuși, pe parcursul acestui capitol, se vor prezenta experimente numerice și pe stâlpi cu secțiune mixtă, în principal pentru evidențierea efectelor combinate ale neliniarității geometrice și fizice coroborate cu cele ale efectelor tensiunilor reziduale asupra răspunsului structural al acestor elemente, iar în cele din urmă performanțele procedurii numerice descris vor fi testate pe structuri în cadre alcătuite din elemente cu secțiune compozită oțel–beton, al căror răspuns este dominat de ambele surse de neliniaritate (fizică și geometrică).

7.1 Testări numerice pe grinzi cu secțiune mixtă oțel–beton

7.1.1 Grinzi mixte simplu rezemate testate experimental de Chapman & Balakrishnan

În cadrul aceste secțiuni se prezintă principalele rezultate furnizate de modelul propus în comparație cu rezultatele experimentale aferente și cu alte rezultate similare publicate în literatura de specialitate pentru grinzi mixte denumite formal A3, A5, A6, E1 și U4 ce fac parte din studiul experimental condus de Chapman & Balakrishnan [17]. Schema statică și secțiunea transversală a elementelor analizate sunt prezentate în Fig. 7.1, iar caracteristicile mecanice ale materialelor sunt sintetizate în Tab. 7.1.

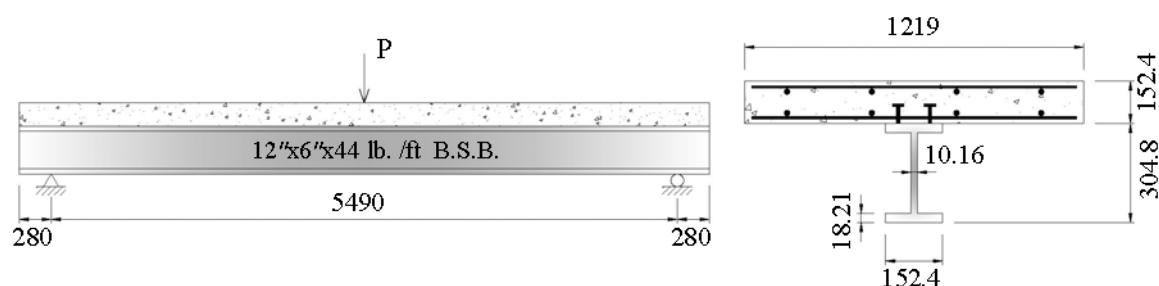


Fig. 7.1 Configurația geometrică a grinzilor A3, A4, A5 și E1

Grinda U4 prezintă aceeași schemă de rezemare și aceeași secțiune transversală însă este supusă acțiunii unei sarcini uniforme distribuite pe distanța dintre reazeme. Așa cum se observă în Fig. 7.1, principala deosebire între grinzi analizate constă în valoarea rezistențelor materialelor constitutive și a nivelului de conectare dintre placa de beton și grinda metalică. Trebuie menționat că gradul de conectare s-a determinat aplicând

prescripțiile de calcul ale standardului EC4 [1] și utilizând caracteristicile materialelor determinate experimental. Conectorii dispuși pe cele două console nu s-au luat în considerare în calculul gradului de conectare. De asemenea, modulul de elasticitate longitudinal al betonului a fost calculat folosind relațiile *CEB-FIP 1990* [136]. Proprietățile mecanice ale armăturilor dar și modulul de elasticitate longitudinal aferent porțiunii de consolidare au fost preluate din *Queiroz ș.a.* [78], deoarece acestea nu sunt menționate în lucrarea publicată de *Chapman & Balakrishnan* [17].

Tab. 7.1. Caracteristici mecanice ale materialelor grinzilor A3, A5, A6, E1 și U4

		A3	A5	A6	E1	U4	
Beton	f_c (MPa)	18.27	24.75	23.72	32.68	33.78	
	E_c (MPa)	26284	29082	28673	31905	32260	
Oțel	f_y (MPa)	tălpi	256.2	235.5	240.2	249.4	268.7
		inimă	307.3	295	267.7	296.5	301.2
		armături	320				
	f_u (MPa)	tălpi	454.1	451	423.2	464.9	469.5
		inimă	451	451	466.4	460.2	478.8
	E_s (MPa)	tălpi	203864	206953	206953	208497	208497
		inimă armături	197686 199231	214675	202320	205409	205000
	ε_h	tălpi	0.0013	0.0011	0.0020	0.0026	0.0019
		inimă	0.0016	0.0015	0.0019	0.0015	0.0015
	E_h (MPa)	tălpi	3500				
inimă		3500					
Armare longitudinală	$\phi 8/304.8$ la partea superioară și inferioară a plăcii						
Armare transversală	$\phi 12.7/152.4$ la partea superioară a plăcii $\phi 12.7/304.8$ la partea inferioară a plăcii						
Conexiune	Număr total de conectori	68	44	32	100	32	
	Număr de rânduri@Spațiere (mm)	2@180	2@285	2@395	2@121	2@var	
	P_{sc} (kN)	126.5	118.5	124.5	64.67	126.4	
	Grad de conectare (%)	168	112	85	136	77	
	$K_{50\%}$ (N/mm)	221577	237511	136082	122701	221577	
	$k_{50\%}$ (N/mm ²)	2462	1667	689	2028	1122	
	γ	12.94	10.45	6.70	11.35	8.42	
	$f(\gamma)$	0.944	0.917	0.820	0.929	0.878	

Distribuția conectorilor în lungul elementelor mixte analizate este uniformă, mai puțin în cazul grinzii U4 unde repartiția conectorilor în lungul suprafeței de contact este triunghiulară (neuniformă), așa cum se poate observa în Fig. 7.2. În Fig. 7.3 se prezintă curbele de comportare ale conectorilor dispuși în elementele analizate pentru realizarea conexiunii dintre componenta metalică și cea de beton. Acestea au fost determinate pe cale experimentală pe specimene standardizate. Trebuie menționat că, în lipsa datelor experimentale, pentru grinzile

A6 și U4 sau folosit curbele de comportare aferente grinzilor A1 respectiv A3, conectorii dispuși în aceste grinzi având caracteristici geometrice și capacități ultime similare cu cele asociate grinzilor A6 și U4. Forța de forfecare din conectori (P_c) s-a reprezentat ca fracțiune din capacitatea portantă aferentă (P_{sc}).

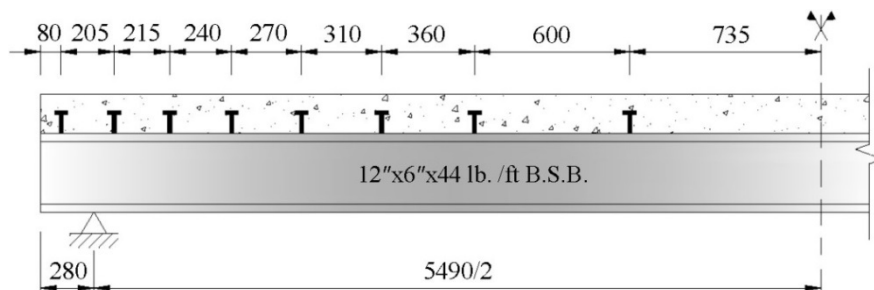


Fig. 7.2. Repartiția conectorilor în lungul grinzii U4

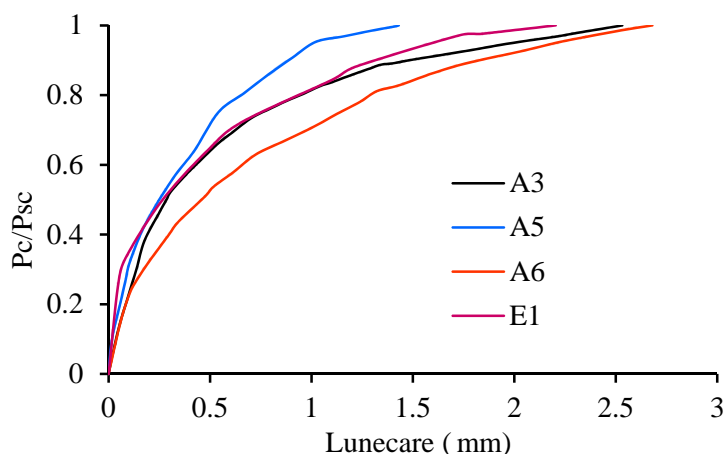


Fig. 7.3. Curbele constitutive ale conectorilor

7.1.1.1 Analiză elastică. Variația efortului axial din placa de beton

Procedura propusă pentru analiza grinzilor mixte oțel-beton cu conectare parțială este fundamentată, așa cum s-a prezentat în capitolul 5, pe o analiză la nivel de secțiune în cadrul căreia ecuațiile de echilibru secțional sunt exprimate considerând o valoare redusă a efortului axial din placa de beton față de efortul axial corespunzător situației interacțiunii totale. În definirea funcției de reducere a efortului axial din dala de beton în condițiile conectării parțiale, $f(\gamma)$, se ține cont atât de rezistența conectorilor (deci, implicit de gradul de conectare) cât și de rigiditatea acestora (deci, implicit de gradul de interacțiune). În cadrul aceste secțiuni ne propunem să evidențiem capacitatea modelului de a trasa variația efortului axial din dala de beton prin comparație cu soluția exactă a ecuației diferențiale de ordinul II asociate modelului *Newmark* [14], descris în capitolul 4. Aceste analize sunt realizate în limitele domeniului elastic de comportare a materialelor și sunt deosebit de importante având în vedere că modelul propus are la bază o predicție a efortului axial din componenta de beton. În Tab. 7.1 sunt prezentate succesiv valorile rigidității conectorilor ($K_{50\%}$), a rigidității conexiunii ($k_{50\%}$), gradul de acțiune compozită (γ) și funcția de reducere $f(\gamma)$, corespunzătoare domeniului elastic și calculate în concordanță cu relațiile prezentate în capitolul 5. În cazul grinzii U4, rigiditatea conexiunii ($k_{50\%}$), gradul de acțiune compozită (γ) și funcția de

reducere $f(\gamma)$ s-au calculat considerând o spațiere uniformă a conectorilor pe lungimea elementului.

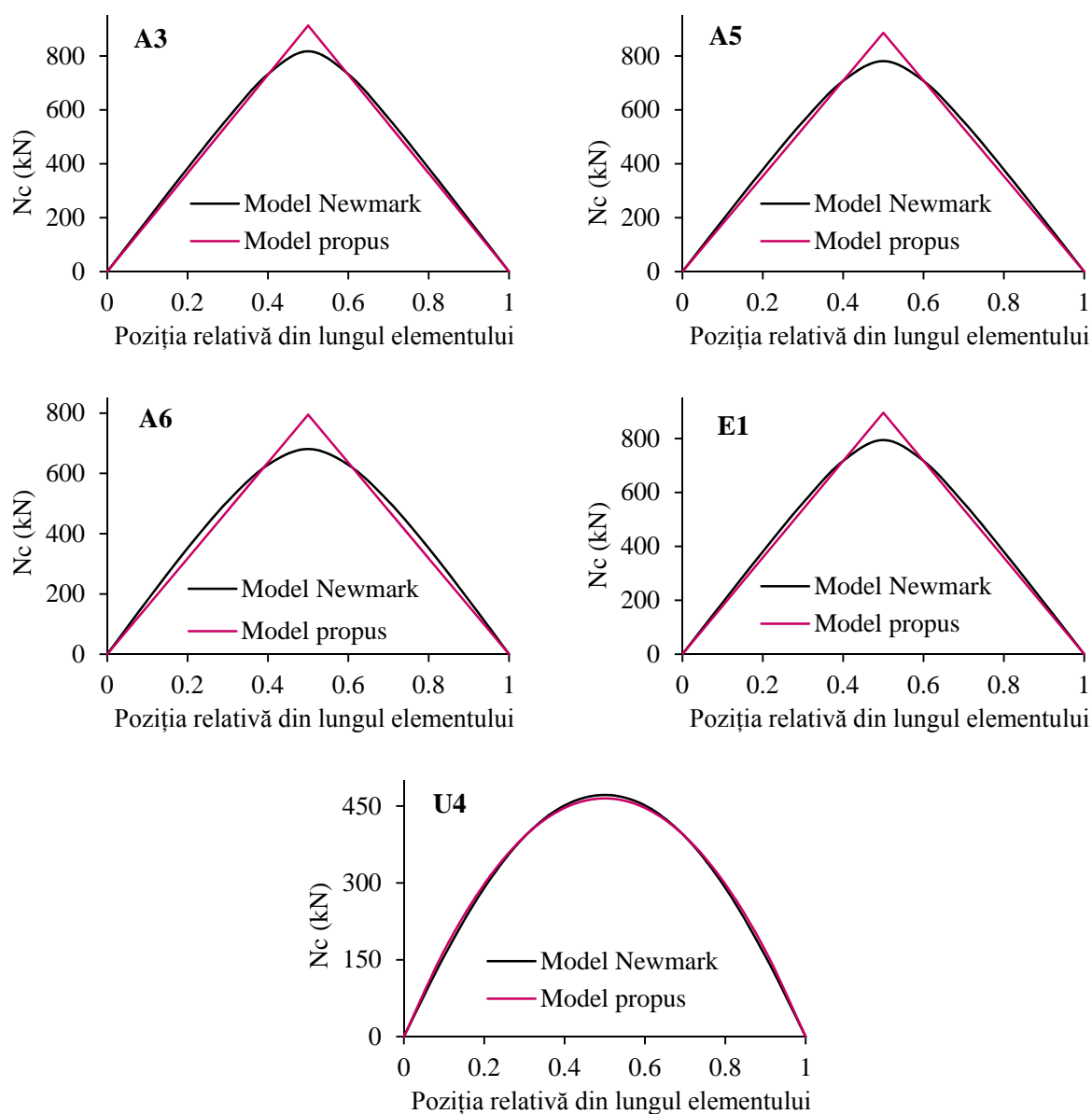


Fig. 7.4. Variația efortului axial din dala de beton în lungul grinzilor A3, A5, A6, E1 și U4

Fig. 7.4 prezintă variația efortului axial din dala de beton în lungul elementelor mixte analizate. În cazul grinzilor A3, A5, A6 și E1 forța concentrată ce este aplicată la mijlocul deschiderii s-a considerat a avea valoarea de 250 kN. Se observă că în cazul acestor grinzi modelul propus surprinde cu acuratețe ridicată variația efortului axial din dala de beton, mai puțin pe porțiunile adiacente mijlocului deschiderii, unde procedeul propus supraestimează sensibil valoarea efortului axial din componenta de beton. Asupra grinzii U4 s-a aplicat o încărcare uniform distribuită de 50 kN/m, iar curba de variație a efortului axial din dala de beton obținută cu modelul propus este practic suprapusă pe cea trasată pe baza soluției ecuației diferențiale de ordinul II caracteristică modelului *Newmark* de analiză a grinzilor mixte cu interacțiune incompletă. Exemplele prezentate în această secțiune atestă capacitatea

modelului de a furniza o predicție realistă a efortului axial din componenta de beton în domeniul elastic de comportare a materialelor.

7.1.1.2 Analiză inelastică la nivel de secțiune. Trasarea curbelor moment încovoiitor-curbura ($M-\Phi$)

Având în vedere faptul că, în metoda propusă, efectele neliniarității fizice și ale interacțiunii incomplete sunt luate în considerare la nivel de secțiune, în continuare acuratețea modelului propus este evaluată la acest nivel secțional. Astfel, în vederea testării eficienței și a stabilității numerice a procedurii propus, în cele ce urmează se prezintă comparativ curbele neliniare $M-\Phi$ trasate cu algoritmul descris în capitolul 5, în raport cu cele experimentale asociate și, în unele situații, cu altele similare preluate din literatura de specialitate. În analizele efectuate, valorile utilizate pentru funcția de reducere a efortului axial din dala de beton, $f(\gamma)$, sunt cele din Tab. 7.1, deci corespunzătoare unor eforturi solicitante în conectori egale cu jumătate din capacitatea lor portantă. În Fig. 7.5 pot fi consultate curbele moment încovoiitor-curbură asociate secțiunilor transversale ale grinzilor mixte A3, A5 și A6 testate experimental de Chapman & Balakrishnan [17].

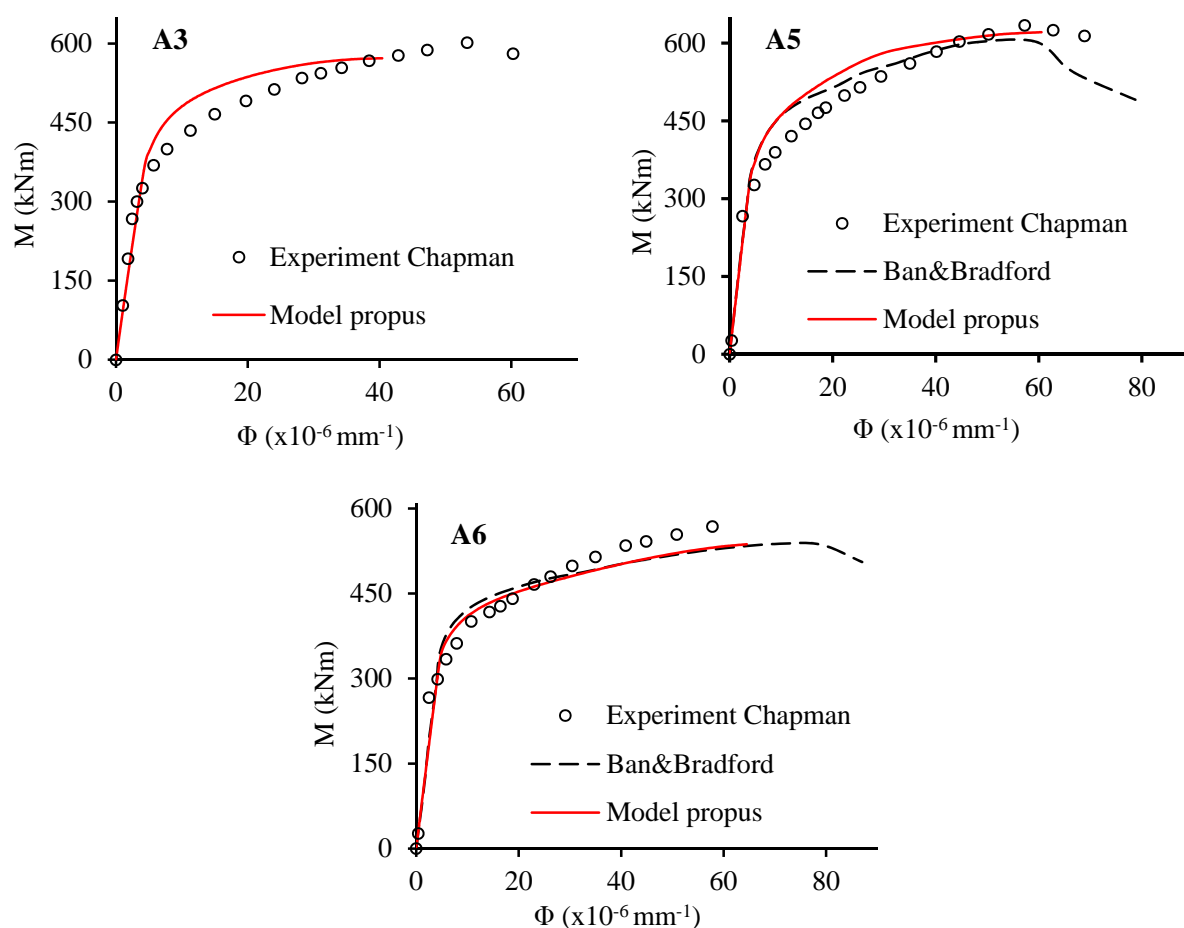


Fig. 7.5. Curbe moment încovoiitor-curbură pentru grinzile A3, A5 și A6

Așa cum se poate observa modelul propus surprinde cu acuratețe considerabilă comportarea secțiunilor mixte în spațiul moment încovoiitor-curbură atât pe porțiunea inițială elastică, cât

și pe cea post-elastică. Pentru grinzile A3 și A5, între curbele trasate cu algoritmul propus și cele obținute experimental se disting neconcordanțe sensibile pe zona inițială a comportării post-elastice. Curbele $M-\Phi$ trasate pentru elementele A5 și A6 au fost comparate suplimentar cu cele publicate de *Ban & Bradford* [154], al cărui procedeu de analiză secțională are la bază o predicție a deformației de alunecare longitudinale în funcție de gradul de conectare. Aceste comparații relevă o bună corelare între cele două modele numerice, diferențele dintre ele fiind de cel mult 4%, putându-se afirma că modelul propus pentru analiza secțională este unul fiabil și eficient, oferind un nivel sporit de precizie.

În continuare se prezintă rezultatele studiului parametric și de senzitivitate condus la nivel de secțiune. Secțiunile transversale pe care au fost conduse aceste studii sunt cele aferente grinzilor mixte A5 și A6. Parametrii, a căror influență asupra răspunsului secțional a fost studiată, sunt rezistența betonului la compresiune, rigiditatea $K_{50\%}$ a conectorilor (aferentă diferitelor curbe experimentale de comportare a conectorilor), limita de curgere a oțelului din inima respectiv tălpile profilului metalic și deformația specifică corespunzătoare inițierii reconsolidării oțelului.

În Fig. 7.6 se prezintă sensibilitatea curbelor moment încovoietor-curbură la modificarea rezistenței betonului la compresiune, celelalte caracteristici mecanice rămânând neschimbate. Se poate sesiza cu ușurință că variația rezistenței de referință la compresiune (cea aferentă modelului experimental) cu $\pm 10\%$ și $\pm 20\%$ induce modificări minore (de maxim 5%) asupra momentului capabil al secțiunii compozite, putându-se astfel afirma că, pentru secțiunile studiate, rezistența betonului la compresiune nu reprezintă un factor determinant asupra capacității de rezistență.

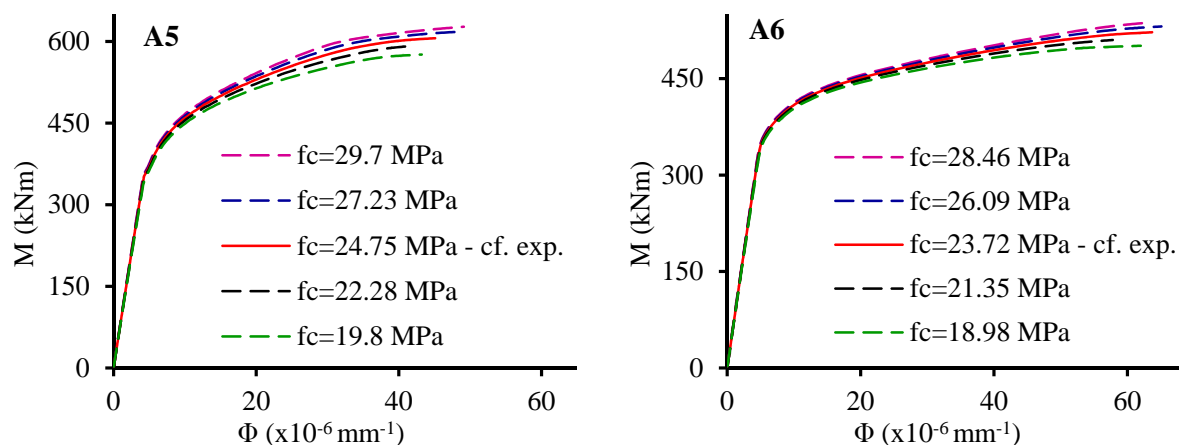


Fig. 7.6 Influența variației rezistenței betonului la compresiune asupra curbelor $M-\Phi$

Pentru studiul influenței rigidității $K_{50\%}$ a conectorilor, s-au selectat cinci valori diferite ale acestora, aferente rezultatelor experimentale pe speciunile standardizate PA1, PA2, PA3, PA4 și PA5 [17]. Aceste speciunile au avut în componență conectori identici, având diametrul de 19.05 mm (3/4 inch) și lungimea de 101.6 mm (4 inch), însă betonul prezenta rezistențe la compresiune distincte, rezultând astfel și forțe de rupere diferite pentru conectori. În *Tab. 7.2* se specifică rezistența betonului la compresiune, capacitatea portantă a conectorilor și rigiditatea $K_{50\%}$ aferentă fiecărui specimen testat experimental. Amintim faptul că rigiditatea $K_{50\%}$ reprezintă raportul dintre forța de forfecare egală cu jumătate din capacitatea portantă a conectorilor și alunecarea longitudinală asociată. Folosind aceste

rigidități s-au determinat pentru secțiunile aferente grinzilor A5 și A6 valorile rigidităților conexiunii $k_{50\%}$, ale gradului de acțiune compozită γ și ale funcției de reducere $f(\gamma)$.

Tab. 7.2 Caracteristici ale epruvetelor testate pentru determinarea capacității conectorilor

		PA1	PA2	PA3	PA4	PA5
f_c (MPa)		27.7	30.7	29.6	19.7	28
P_{sc} (kN)		124.5	122.6	126.5	112.6	118.5
$K_{50\%}$ (N/mm)		136082	213196	221577	154634	237511
$k_{50\%}$ (N/mm ²)	A5	955	1496	1555	1085	1667
	A6	689	1079	1122	783	1203
γ	A5	7.913	9.904	10.097	8.435	10.453
	A6	6.70	8.382	8.545	7.139	8.847
$f(\gamma)$	A5	0.864	0.909	0.912	0.878	0.917
	A6	0.820	0.877	0.881	0.838	0.888

Analizând curbele din Fig. 7.7 se poate deduce că influența rigidității $K_{50\%}$ a conectorilor asupra momentului capabil al secțiunilor analizate este redusă. Majorarea rigidității $K_{50\%}$ aferentă specimenului PA5 cu 75% față de cea asociată epruvetei PA1 conduce la o majorare a momentului încovoietor capabil cu 1.5% respectiv 3.4% pentru secțiunile A5 respectiv A6.

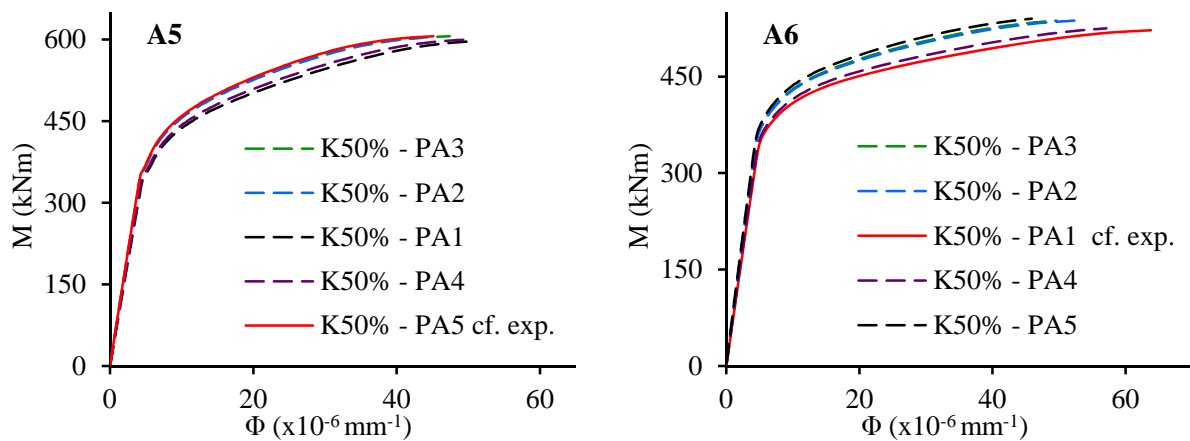


Fig. 7.7 Influența variației rigidității $K_{50\%}$ a conectorilor asupra curbelor $M-\Phi$

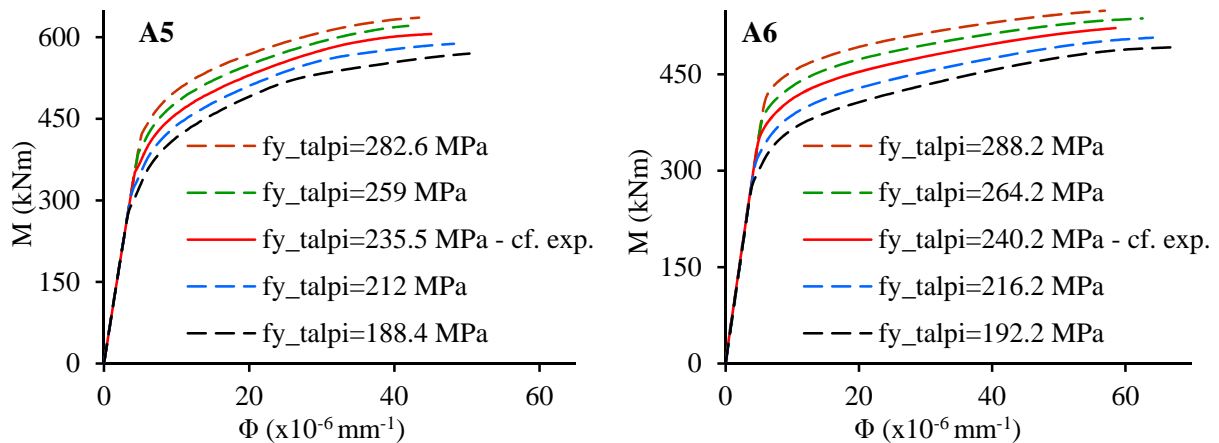


Fig. 7.8 Influența variației limitei de curgere a oțelului din tălpile profilului asupra curbelor $M-\Phi$

Fig. 7.8 și Fig. 7.9 prezintă comparativ curbele moment încovoieror-curbură obținute prin modificarea limitei de curgere a oțelului structural din tălpile respectiv inima profilului cu $\pm 10\%$ și $\pm 20\%$, caracteristicile betonului și ale conexiunii menținându-se constante. Variația limitei de curgere a oțelului din tălpile profilului cu procente amintite anterior produce modificări ale momentului capabil cu cel mult 6.3%, în timp ce odată cu variația tensiunii la curgere a oțelului din inimă modificările în valoarea momentului încovoieror capabil sunt de maxim 4.1%. Se poate afirma astfel că o influență mai pronunțată asupra răspunsului secțional o are calitatea oțelului din tălpile profilului.

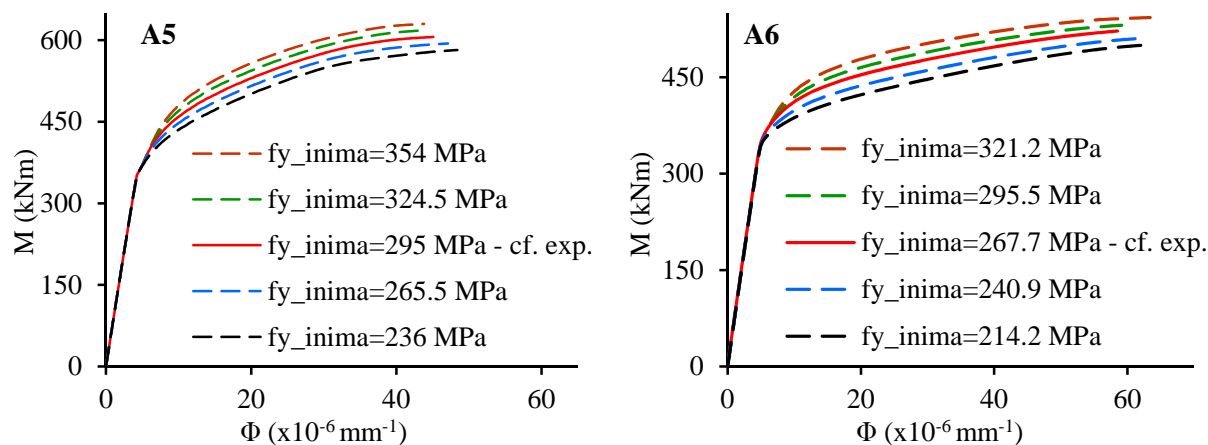


Fig. 7.9 Influența variației limitei de curgere a oțelului din inima profilului asupra curbelor $M-\Phi$

Influența variației deformației specifice corespunzătoare inițierii reconsolidării (ϵ_h) oțelului este reprezentată în Fig. 7.10. Pentru valorile considerate ale raportului dintre ϵ_h și ϵ_y (deformația la curgere) momentul încovoieror capabil se modifică cu cel mult 6.3% în cazul secțiunii A5 respectiv cu cel mult 4.2% în cazul secțiunii A6. Se observă că alura curbelor este direct influențată de deformațiile specifice aferente inițierii reconsolidării oțelului, aceste curbe prezentând un pseudo-palier proporțional cu mărirea deformațiilor corespunzătoare ecruisării. Trebuie menționat că în toate studiile de senzitivitate prezentate anterior, cedarea secțiunii s-a produs prin depășirea deformației ultime a betonului comprimat și rezistența betonului la întindere a fost neglijată.

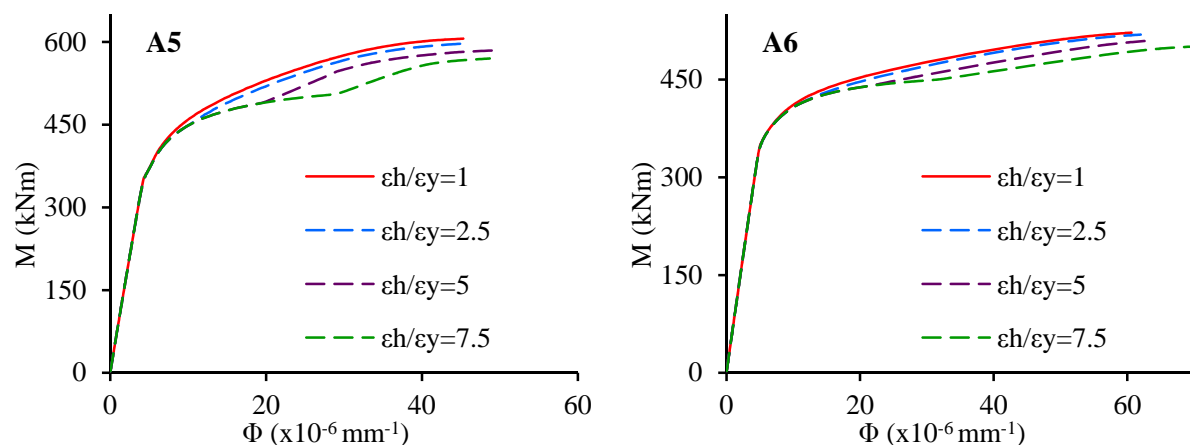


Fig. 7.10 Influența variației deformației aferente inițierii reconsolidării asupra curbelor $M-\Phi$

Din studiile de senzitivitate prezentate anterior se poate deduce că influența cea mai pregnantă asupra răspunsului secțional moment încovoietor-curbură este dată de variația caracteristicilor mecanice ale oțelului structural.

Tab. 7.3. Grade de conectare considerate în studiul parametric asupra secțiunii A5

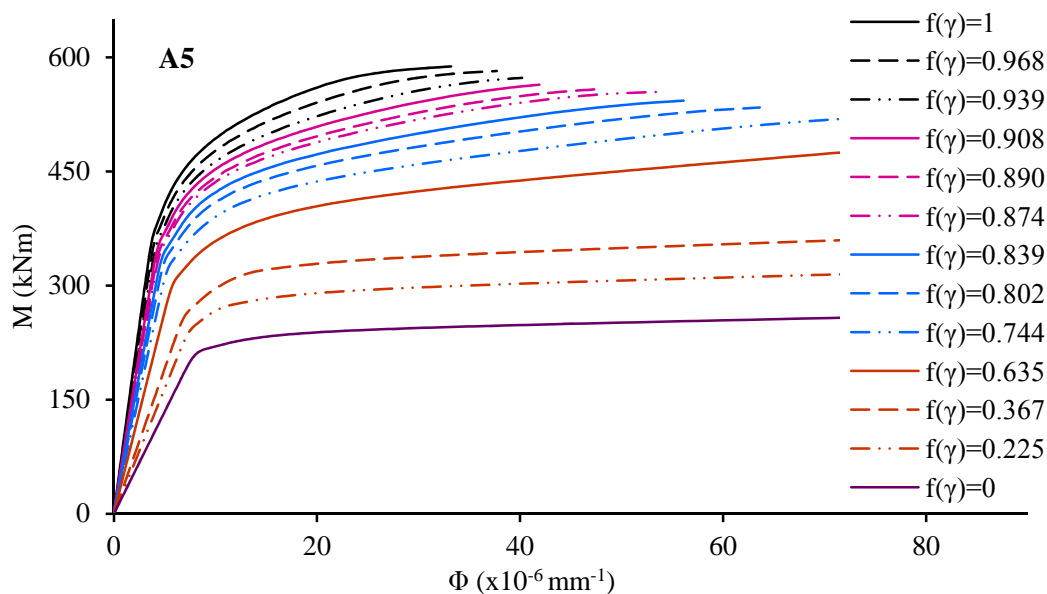
η	300	150	100	85	73	56	45	34	22	11	6
n	106	54	36	30	26	20	16	12	8	4	2
$k_{50\%}$	4540.5	2270.3	1484.4	1222.5	1047.9	785.9	611.2	436.6	261.7	87.3	43.65
γ	17.253	12.2	9.865	8.952	8.288	7.178	6.33	5.35	4.144	2.392	1.691
$f(\gamma)$	0.968	0.938	0.908	0.890	0.874	0.839	0.802	0.744	0.635	0.367	0.225

Tab.7.4. Grade de conectare considerate în studiul parametric asupra secțiunii A6

η	300	150	103	85	73	60	48	36	24	12	6
n	100	50	34	28	24	20	16	12	8	4	2
$k_{50\%}$	2451.5	1201	800.5	650.4	550.3	450.3	350.2	250.2	150.1	50	25
γ	12.632	8.840	7.218	6.506	5.985	5.414	4.774	4.035	3.126	1.805	1.276
$f(\gamma)$	0.942	0.888	0.841	0.811	0.784	0.748	0.698	0.623	0.497	0.248	0.142

În continuare se studiază variația curbelor moment încovoietor-curbură și moment încovoietor-rigiditate instantanee la încovoiere în raport cu variația gradului de conectare și implicit a gradului de acțiune compozită (γ) și a funcției de reducere a efortului axial din dala de beton ($f(\gamma)$).

În Tab. 7.3 și Tab.7.4 sunt prezentate gradele de conectare considerate în prezentul studiu parametric, numărul asociat de conectori, rigiditățile $k_{50\%}$ ale conexiunii (în MPa) precum și valorile γ și $f(\gamma)$ aferente. Acestea din urmă s-au calculat utilizând valorile rigidităților conectorilor $K_{50\%}$ menționate în Tab. 7.1 și caracteristicile mecanice ale materialelor determinate experimental de Chapman & Balakrishnan [17], redate în Tab. 7.1.



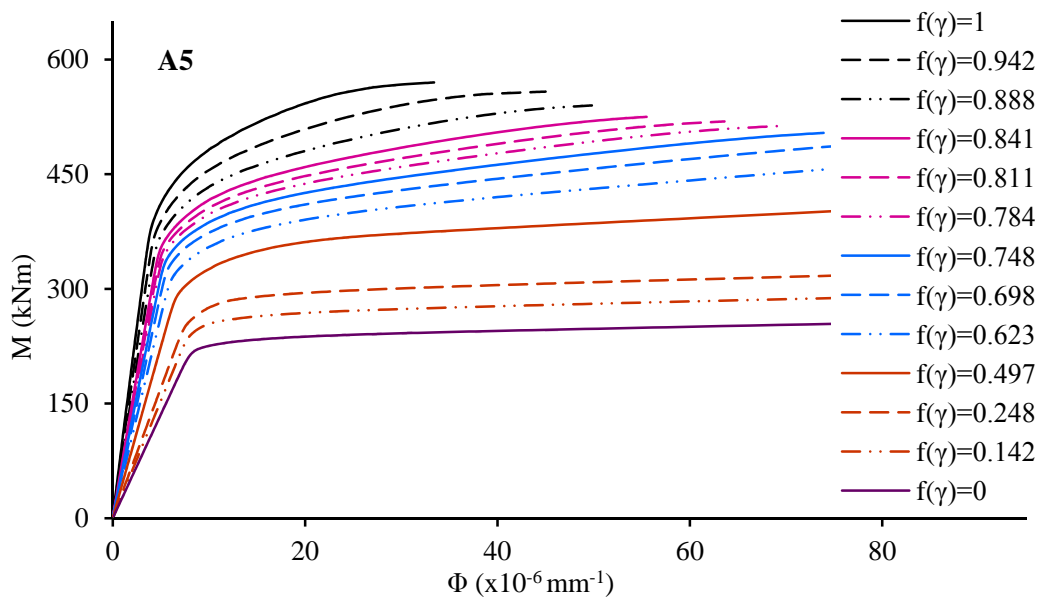
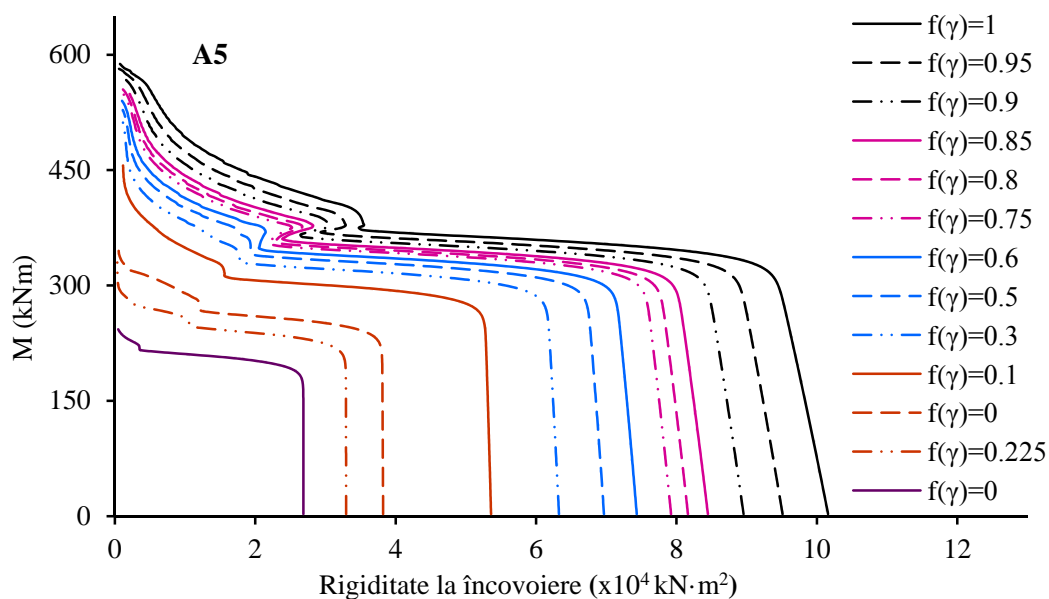


Fig. 7.11 Curbe $M-\Phi$ pentru diferite grade de conectare

Suplimentar, față de gradele de conectare precizate în Tab. 7.3 și Tab.7.4, studiile parametrice includ și situațiile extreme de interacțiune dintre placa de beton și grinda metalică: interacțiunea totală (lunecarea relativă dintre cele două componente fiind zero) și lipsa interacțiunii (lunecarea dintre cele două componente putându-se produce liber). Aceste două situații sunt caracterizate prin valori ale funcției $f(\gamma)$ egale cu unu respectiv zero. Rezultatele obținute prin modificarea gradului de interacțiune (și implicit a gradului de conectare) sunt prezentate comparativ sub formă unor curbe moment încovoietor-curbură (Fig. 7.11.) respectiv curbe moment încovoietor-rigiditate la încovoiere instantanee (Fig. 7.12.). Se observă capacitatea modelului propus de a surprinde degradarea atât a capacității de rezistență cât și a rigidității odată cu micșorarea gradului de conectare dintre componentele secțiunii mixte. Analizând curbele $M-\Phi$ se observă că, pe măsură ce gradul de conectare scade, curbura ultimă crește deoarece efectul betonului asupra răspunsului secțional devine din ce în ce mai redus.



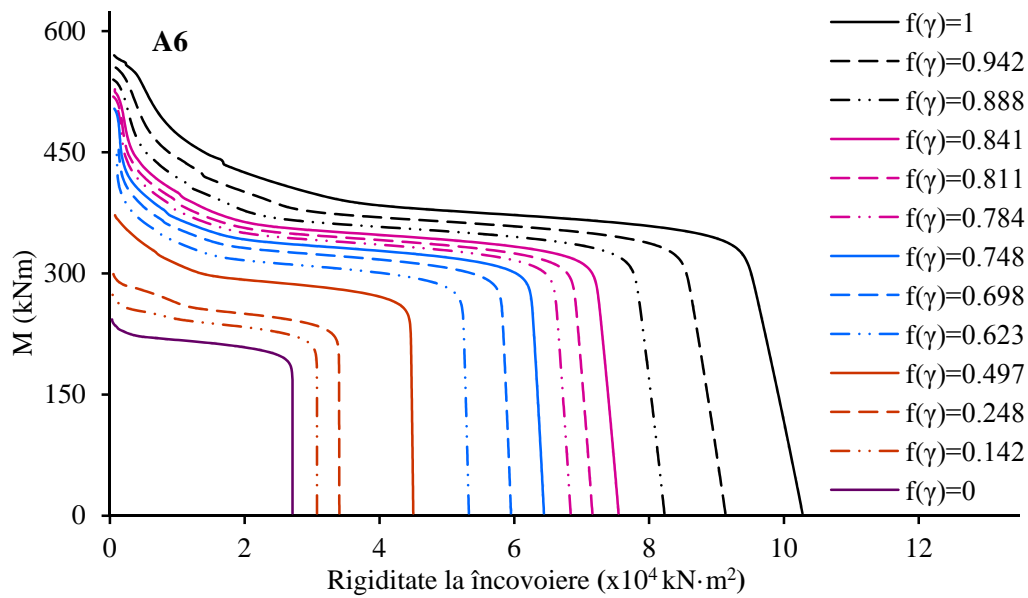


Fig. 7.12 Curbe $M-(EI)_i$ pentru diferite grade de interacțiune

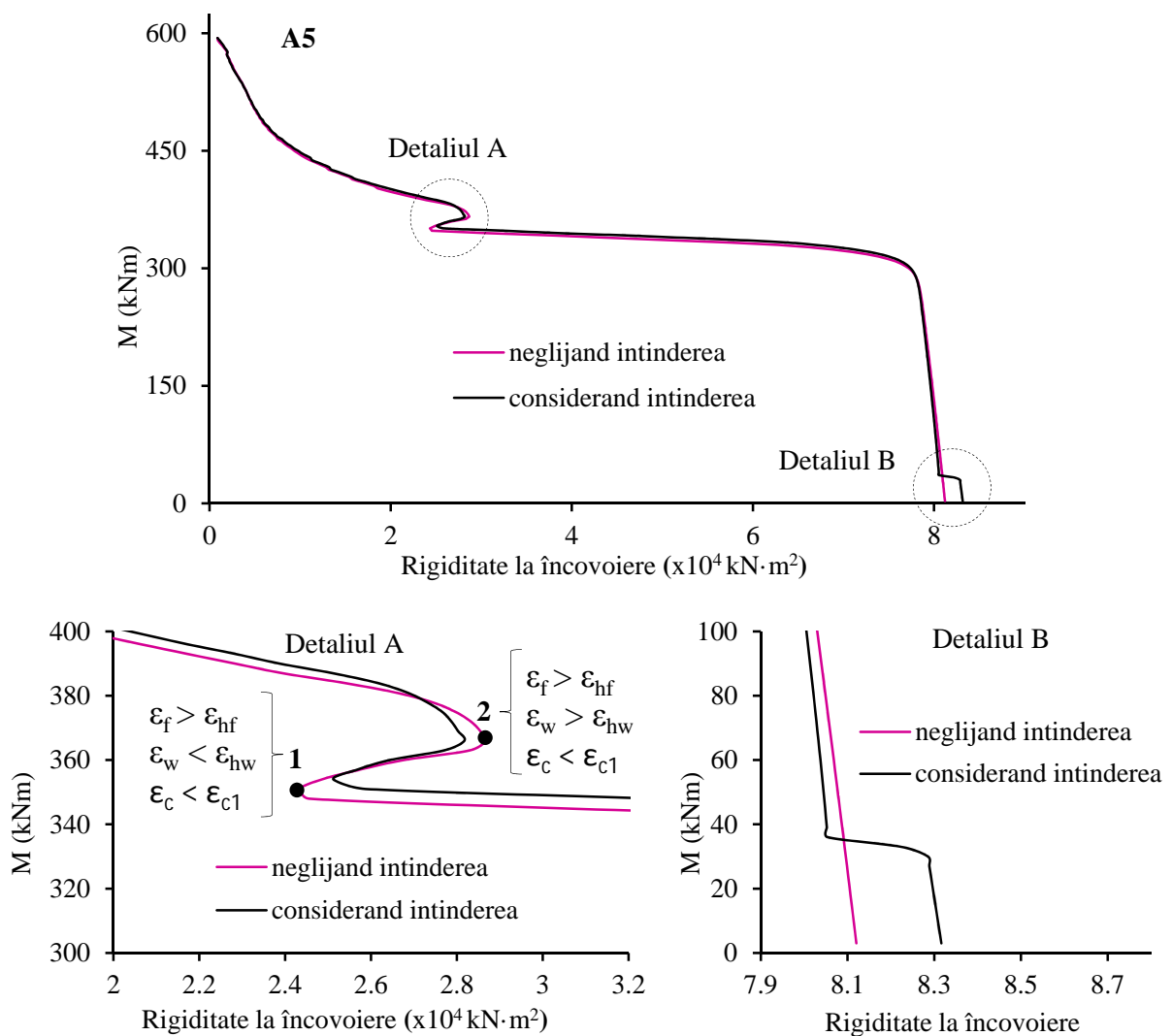


Fig. 7.13 Efecte locale manifestate de secțiunea A5

Curbele $M-(EI)_t$ trasate pentru secțiunea grinzii A5 scot în evidență un efect local care va fi detaliat în cele ce urmează. Pentru aceasta în Fig. 7.13. se prezintă curba $M-(EI)_t$ pentru secțiunea grinzii A5, folosind gradul real de conectare și valoarea funcției $f(\gamma)$ corespunzătoare. Suplimentar se trasează aceeași curbă dar ținând cont și de rezistența la întindere a betonului. Analizând Detaliul A prezentat în Fig. 7.13. se observă că pentru o anumită valoare a momentului încovoietor curba $M-(EI)_t$ prezintă un punct de inflexiune (punctul 1), urmat de creșteri ale rigidității la încovoiere până la următorul punct de inflexiune (punctul 2). Corespunzător punctului 1, deformațiile specifice în punctele maxim solicitate ale tălpii inferioare (ϵ_f) sunt egale cu cele aferente inițierii reconsolidării (ϵ_{hf}), modulul de elasticitate scăzând astfel în talpa inferioară. Mai departe, punctul 1 este caracterizat prin comportări elastice ale oțelului din inima profilului respectiv ale betonul din placă. În punctul 2, în fibrele maxim solicitate ale inimii profilului metalic se atinge deformația specifică corespunzătoare inițierii reconsolidării, betonul comprimat rămânând în continuare pe porțiunea ascendentă de comportare (deformațiile specifice fiind mai mici decât cele aferente rezistenței la compresiune). Majorarea rigidității instantanee la încovoiere manifestată între punctele 1 și 2 se datorează extinderii zonei de beton comprimat crescând astfel momentul de inerție al acestei zone și compensând micșorarea rigidității datorate degradării modulului de elasticitate din talpa inferioară a profilului.

Analizând acum Detaliul B din Fig. 7.13. se observă cu ușurință că în cazul considerării rezistenței la întindere a betonului, rigiditatea inițială la încovoiere este mai mare decât cea calculată în cazul neglijării aportului betonului întins. Acest efect este absolut firesc deoarece în primele etape de solicitare, betonul întins este nefisurat și astfel întreaga secțiune de beton contribuie la rigiditate la încovoiere a secțiunii. Acest exemplu scoate în evidență capacitatea modelului propus de a lua în considerare aportul betonului supus la întindere.

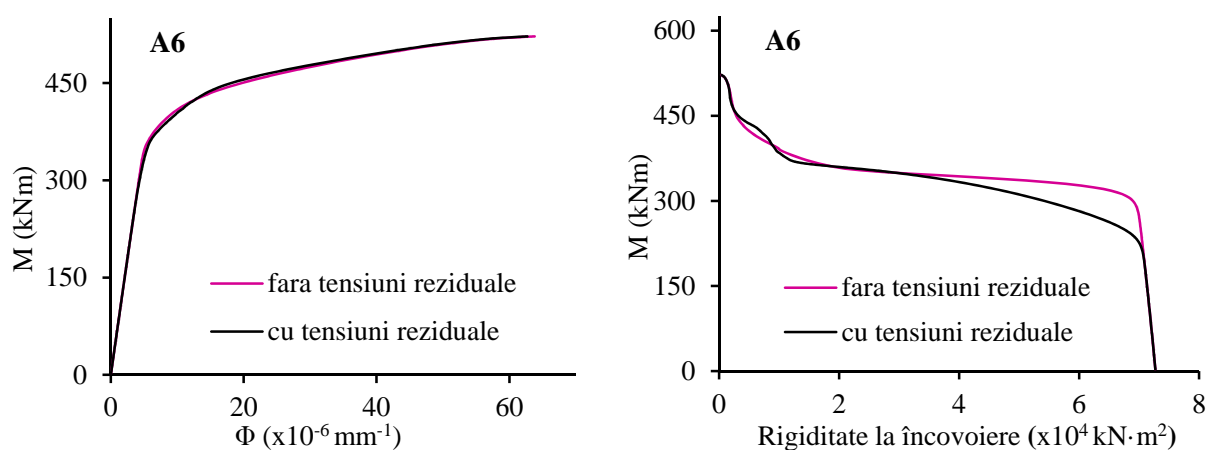


Fig. 7.14. Efectul tensiunilor reziduale

În Fig. 7.14. se prezintă efectul tensiunilor reziduale asupra curbelor $M-\Phi$ și $M-(EI)_t$ pentru secțiunea grinzii A6. Distribuția considerată a tensiunilor reziduale este cea propusă de ECCS [152] și prezentată succint în capitolul 6. Se observă că răspunsul $M-\Phi$ nu este sensibil la efectul tensiunilor reziduale, însă acestea contribuie semnificativ la degradarea rigidității la încovoiere, deoarece intrarea în curgere respectiv inițierea reconsolidării sunt manifestate, în

acest caz, mai devreme decât în cazul contrar al neglijării efectului tensiunilor reziduale. Deși în literatura de specialitate acest efect este studiat cu preponderență doar în cazul stâlpilor supuși acțiunii unor eforturi axiale considerabile, acesta trebuie considerat și în cazul grinzilor mixte cu interacțiune parțială deoarece pentru valori mari ale gradului de conectare, în grinda metalică se dezvoltă eforturi axiale interioare semnificative.

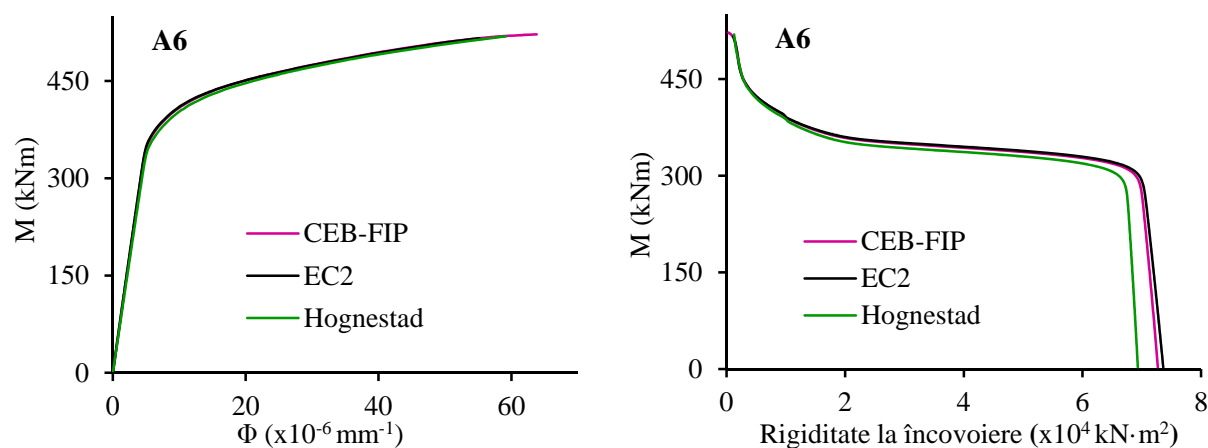


Fig. 7.15. Influența modelului constitutiv al betonului comprimat

Fig. 7.15. prezintă influența modelului constitutiv selectat pentru modelarea comportării betonului comprimat. Studiul s-a realizat pentru secțiunea grinzii A6 și cuprinde trei modele constitutive: CEB–FIP Model Code 1990 [136], EC 2 [137] și modelul propus de Hognestad [134]. Se observă că relațiile $M-\Phi$ sunt foarte asemănătoare, mici diferențe existând între valorile momentelor încovoietoare capabile datorită valorilor distincte ale deformațiilor ultime din betonul comprimat acceptate în cele trei modele: 4.6 ‰, 3.5 ‰ respectiv 3.8 ‰. În ceea ce privește rigiditatea instantanee la încovoiere, modelul Hognestad furnizează valori mai mici în primele stadii de încărcare deoarece modulul de elasticitate longitudinal considerat de acest model (23321 MPa) pentru betonul comprimat este mai mic față de valorile similare considerate de celelalte două modele constitutive (28673 MPa – CEB–FIP respectiv 30072 MPa – EC2).

7.1.1.3 Analiza inelastică la nivel de element

Următorul set de analize se realizează la nivel de element, urmărind comportarea globală a celor cinci grinzi detaliate în secțiunea anterioară. Testările numerice au fost realizate pe modele având caracteristici mecanice în concordanță cu cele experimentale, comportarea conectorilor fiind de asemenea considerată a fi cea din modelele experimentale. În cazul analizelor efectuate în aplicația Abaqus [15], conectorii s-au dispus discret, iar comportarea lor a fost guvernată în întregime de curbele reale de comportare, determinate experimental de Chapman & Balakrishnan [17]. În modelul de analiză propus, pentru valori ale forței de forfecare din conectori mai mici decât jumătate din capacitatea lor portantă, gradul de acțiune compozită γ și funcția $f(\gamma)$ corespunzătoare, s-au calculat utilizând rigiditatea secantă $K_{50\%}$ calculată ca raportul dintre jumătate din forța capabilă a conectorilor și lunecarea longitudinală corespunzătoare. Pentru valori mai mari ale forței din conectori, rigiditatea secantă a acestora s-a actualizat la fiecare increment de încărcare pe baza curbei de

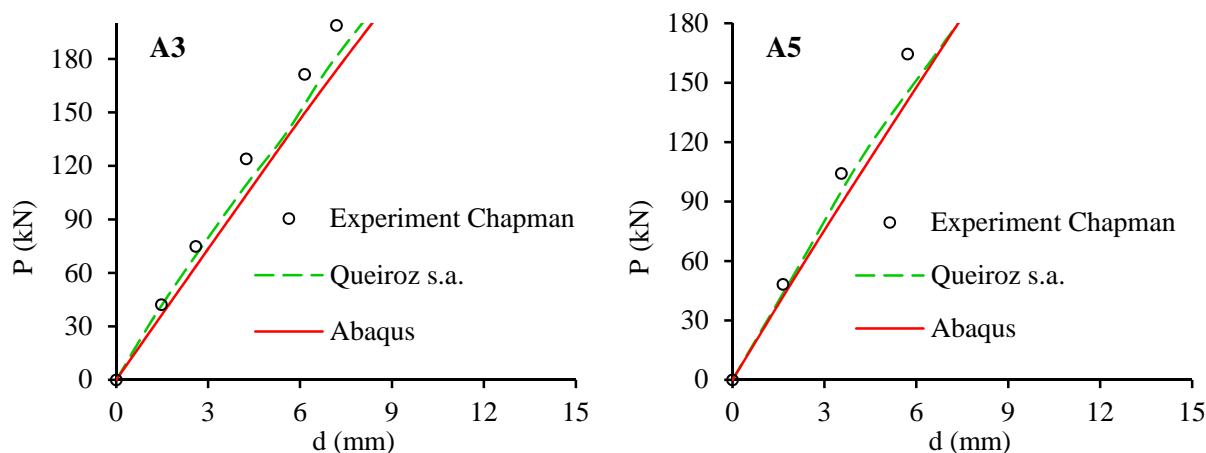
Această pagină a fost eliminată din conținutul electronic al acestei lucrări

În ceea ce privește numărul elementelor finite utilizate, modelele numerice analizate în Abaqus [15] au fost discretizate în elemente finite având dimensiunea maximă de 50 mm pe fiecare direcție, în timp ce în modelul propus s-au utilizat patru EF în situația în care au fost modelate și consolele respectiv două EF în situația contrară. Această discretizare este impusă doar din motivul de a avea noduri în punctele de rezemare respectiv încărcare. În lungul celor două EF utilizate pentru modelarea deschiderii grinzilor s-au considerat câte șapte puncte de integrare pentru considerarea dezvoltării graduale a zonelor plastice. În Tab. 7.6. se prezintă comparativ numărul de elemente finite utilizate pentru modelarea grinzilor analizate.

Tab. 7.6. Număr comparativ de EF utilizate pentru modelarea grinzilor A3, A5, A6, E1 și U4

	A3	A5	A6	E1	U4
<i>Nefcad</i>	4	4	4	4	3
<i>Abaqus</i>	13450	13378	13342	13546	13382

Fig. 7.16. prezintă curbele de comportare, în spațiul încărcare – săgeată la mijlocul deschiderii, pentru grinzilor mixte analizate. Se observă că rezultatele trasate cu modelul de analiză propus sunt în bună concordanță cu rezultatele experimentale raportate de *Chapman & Balakrishnan* [17] și cu cele obținute cu modelul numeric dezvoltat în programul Abaqus [15]. Diferențele maxime sesizate între capacitățile portante obținute cu procedeul de analiză propus aici și forțele ultime obținute experimental se încadrează în limita a 3%. Modelul propus trasează cu acuratețe semnificativă și curba de comportare a grinzii U4 încărcate uniform distribuit, o foarte mică subestimare a încărcării ultime putând fi sesizată. Împărțirea barei, în segmente caracterizate prin valori distincte ale funcției de reducere a efortului axial din dala de beton, ar conduce îmbunătățirea suplimentară a acurateței încărcărilor ultime. Curbele trasate cu modelul propus sunt în bună concordanță și cu cele raportate de *Queiroz ș.a.* [78], obținute cu un model numeric dezvoltat în pachetul comercial de elemente finite Ansys respectiv cu cele publicate de *El-Lobody & Lam* [82] pentru grinda E1. Fig. 7.17. indică faptul că modelul propus este capabil să reproducă cu acuratețe semnificativă rigiditatea inițială a sistemelor mixte analizate, curbele trasate fiind similare cu cele trasate cu celelalte modele numerice. Totuși, dacă influența deformațiilor unghiulare este neglijată, atunci modelul propus manifestă o rigiditate ușor sporită, față de cazul în care deformațiile unghiulare sunt incluse în răspunsul structural, prin intermediul rigidității echivalente la forfecare.



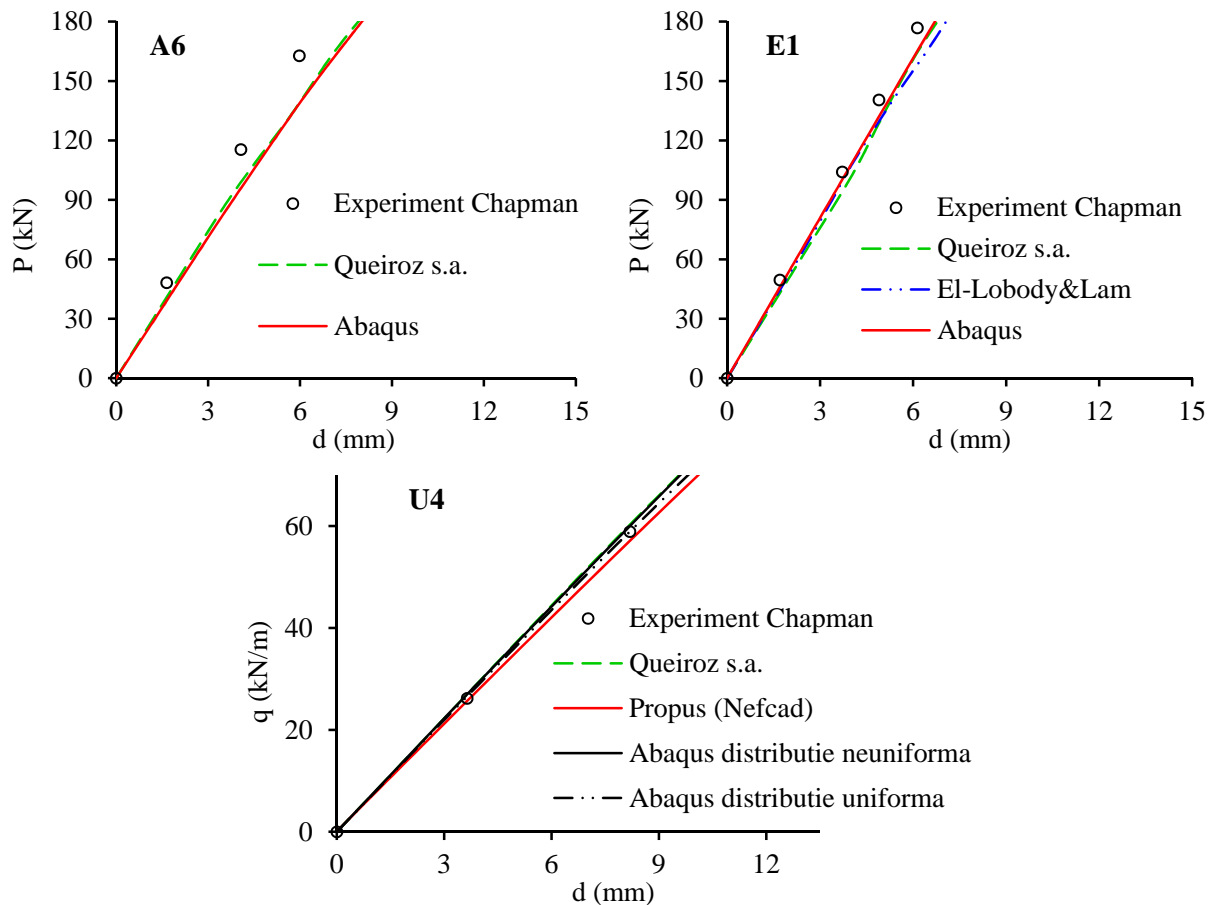


Fig. 7.17 Curbe încărcare-săgeată. Rigiditate inițială

În continuare se prezintă o serie de studii parametrice realizate la nivel de element, în vederea stabilirii influenței diferitelor caracteristici mecanice ale materialelor asupra răspunsului structural. Analizele s-au realizat pe grinda mixtă E1, folosind modelul numeric generat în aplicația Abaqus [15], iar principalii parametri variați sunt rezistența la compresiune a betonului, limita de curgere a oțelului din tălpile respectiv inima profilului și gradul de conectare.

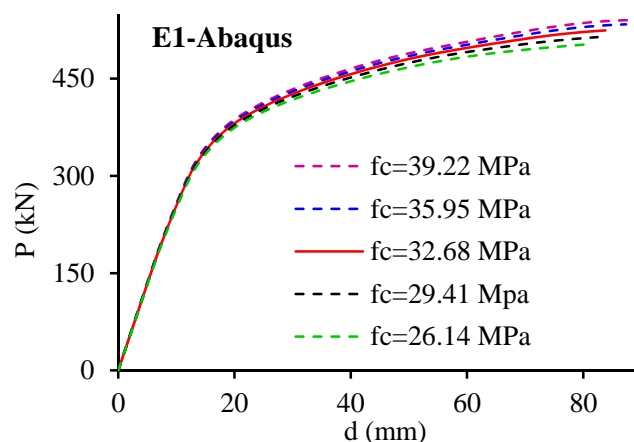


Fig. 7.18 Influența variației rezistenței betonului la compresiune asupra curbelor $P-d$

În Fig. 7.18. se prezintă sensibilitatea curbelor încărcare-săgeată, la modificarea rezistenței betonului la compresiune, celelalte caracteristici mecanice rămânând neschimbate. Se poate sesiza cu ușurință că variația rezistenței de referință la compresiune (cea aferentă modelului experimental) cu $\pm 10\%$ și $\pm 20\%$ induce modificări minore (de maxim 4%) asupra sarcinii concentrate capabile, putându-se astfel afirma că și la nivel de element rezistența betonului la compresiune nu reprezintă un factor determinant asupra capacității de rezistență, această concluzie fiind valabilă și la nivel de secțiune.

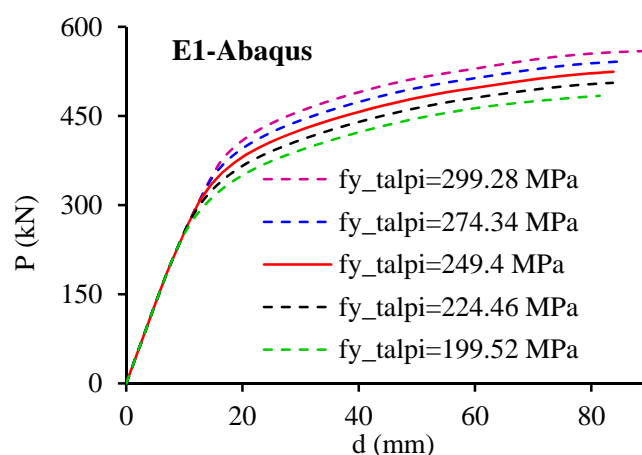


Fig. 7.19 Influența variației limitei de curgere a oțelului din tălpile profilului asupra curbelor P-d

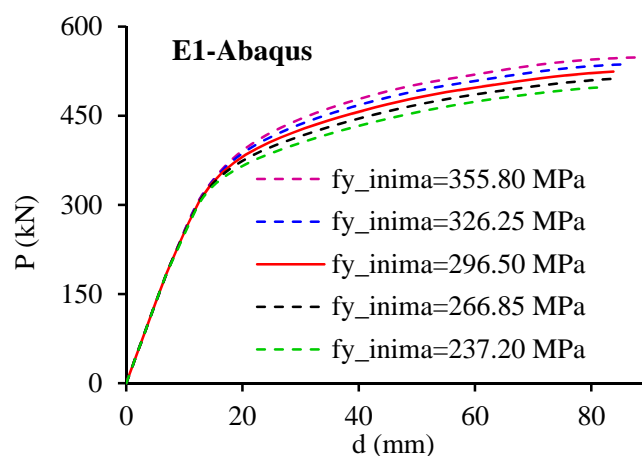


Fig. 7.20 Influența variației limitei de curgere a oțelului din inima profilului asupra curbelor P-d

Fig. 7.19. și Fig. 7.20. prezintă comparativ curbele încărcare-săgeată maximă, obținute prin modificarea limitei de curgere a oțelului structural din tălpile respectiv inima profilului cu $\pm 10\%$ și $\pm 20\%$, caracteristicile betonului și ale conexiunii menținându-se constante. Variația limitei de curgere a oțelului din tălpile profilului cu procente amintite anterior produce modificări ale încărcării capabile cu cel mult 8%, în timp ce odată cu variația tensiunii la curgere a oțelului din inimă modificările în valoarea momentului încovoietor capabil sunt de maxim 5.2%. Se poate astfel afirma că o influență mai pronunțată asupra răspunsului la nivel de element o are calitatea oțelului din tălpile profilului, această concluzie fiind consistentă cu cea desprinsă în urma studiilor efectuate la nivel de secțiune.

Eficacitatea modelului propus este în continuare evaluată prin variația gradului de conectare (prin modificarea numărului de conectori) și compararea rezultatelor obținute cu cele furnizate de modele numerice complexe realizate în Abaqus (urmând detaliile prezentate în capitolul 6) și Ansys (rezultate preluate din articolul publicat de *Queiroz ș.a.* [78]). Gradele de conectare considerate și caracteristicile de modelare aferente sunt descrise în Tab. 7.7.

Tab. 7.7 Grade de conectare considerate pentru grinda E1

η	136	118	100	89	71	47
n	92	80	68	60	48	32
$k_{50\%}$	2028	1753	1478	1298	1031	672
γ	11.35	10.55	9.69	9.08	8.09	6.54
$f(\gamma)$	0.929	0.919	0.905	0.893	0.869	0.812

Fig. 7.21.a și Fig. 7.21.b prezintă curbele comparative de comportare în spațiul încărcare concentrată - săgeată maximă pentru gradele de conectare 136%, 100 % și 71% respectiv 118%, 89% și 47%. S-a optat pentru redarea diferențiată a curbelor de comportare pentru a se putea face distincția între diferitele curbe și implicit pentru a observa diferențele calitative dintre acestea. Comparând rezultatele propuse, cu cele obținute cu modele complexe, se poate observa că procedeul propus este capabil să descrie cu acuratețe considerabilă comportarea elementelor mixte analizate, încărcările ultime furnizate diferențiindu-se cu cel mult 2% față de cele obținute cu modelele complexe. Totuși, diferențe sensibile sunt manifestate pe prima porțiune a comportării post-elastice, acestea putând fi atribuite modului în care procedeul propus i-a în considerare rigiditatea conectorilor și implicit a conexiunii. Pe de altă parte, diferențele sensibile sesizate între rezultatele furnizate de Abaqus și cele trasate cu Ansys pot fi puse pe seama modului distinct de considerare a comportării betonului comprimat. Spre deosebire de modelul numeric realizat în Abaqus, *Queiroz ș.a.* [78] consideră o comportare liniarizată a betonului până la atingerea deformației de 2‰ corespunzătoare efortului unitar maxim, iar după această valoare, pentru evitarea problemelor numerice, comportarea betonului se consideră cvasi-constantă până la atingerea deformației ultime, neglijând astfel porțiunea descendentă de comportare a betonului comprimat. Pentru completitudine, în Fig. 7.21.c sunt redate curbele obținute cu modelul de analiză propus, pentru întreaga paletă de grade de conectare considerate, scoțându-se astfel în evidență capacitatea modelului propus de a surprinde calitativ degradarea rigidității și a rezistenței odată cu micșorarea nivelului de conectare dintre grinda metalică și placa de beton. Așa cum era de așteptat degradarea proprietăților mecanice este mai pronunțată pentru valori reduse ale gradului de conectare. O altă observație importantă trebuie făcută asupra comportării grinzilor caracterizate prin grade de conectare mai mari decât 100%. Crescând numărul de conectori cu aprox. 35%, de la 68 ($\eta=100\%$) la 92 ($\eta=136\%$), se înregistrează o creștere a încărcării capabile cu doar 7%, iar aportul de rigiditate este chiar mai redus.

În Fig. 7.22 se prezintă porțiunile inițiale ale curbelor reprezentate în Fig. 7.21 cu scopul de a reliefa capacitatea modelului propus de a surprinde degradarea rigidității inițiale odată cu diminuarea gradului de conectare. Comparând curbele trasate cu procedeul propus cu cele trasate cu modelele FEM (Fig. 7.22.a și Fig. 7.22.b), se poate observa că rigiditatea inițială redată de modelul propus este sensibil mai mică decât cele obținute cu Abaqus și Ansys. Acest aspect se datorează, în principal, modului în care se consideră rigiditatea conectorilor

în primele etape de solicitare, și anume, considerarea unei rigidități constante până când forțele solicitante din conectori (evaluate conform relațiilor prezentate în capitolul 5) ating jumătate din capacitatea lor portantă.

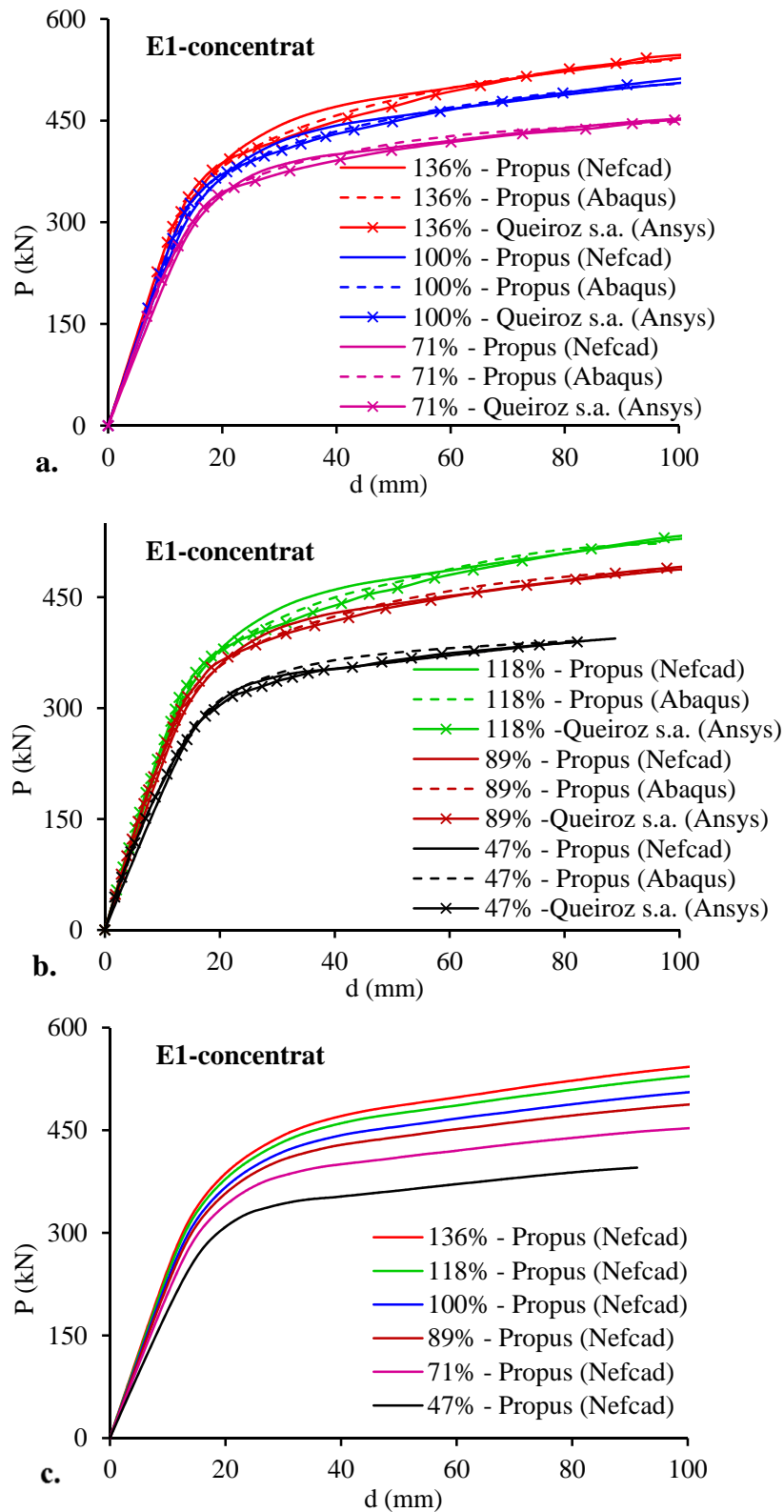


Fig. 7.21 Curbe $P-d$ pentru diferite grade de conectare

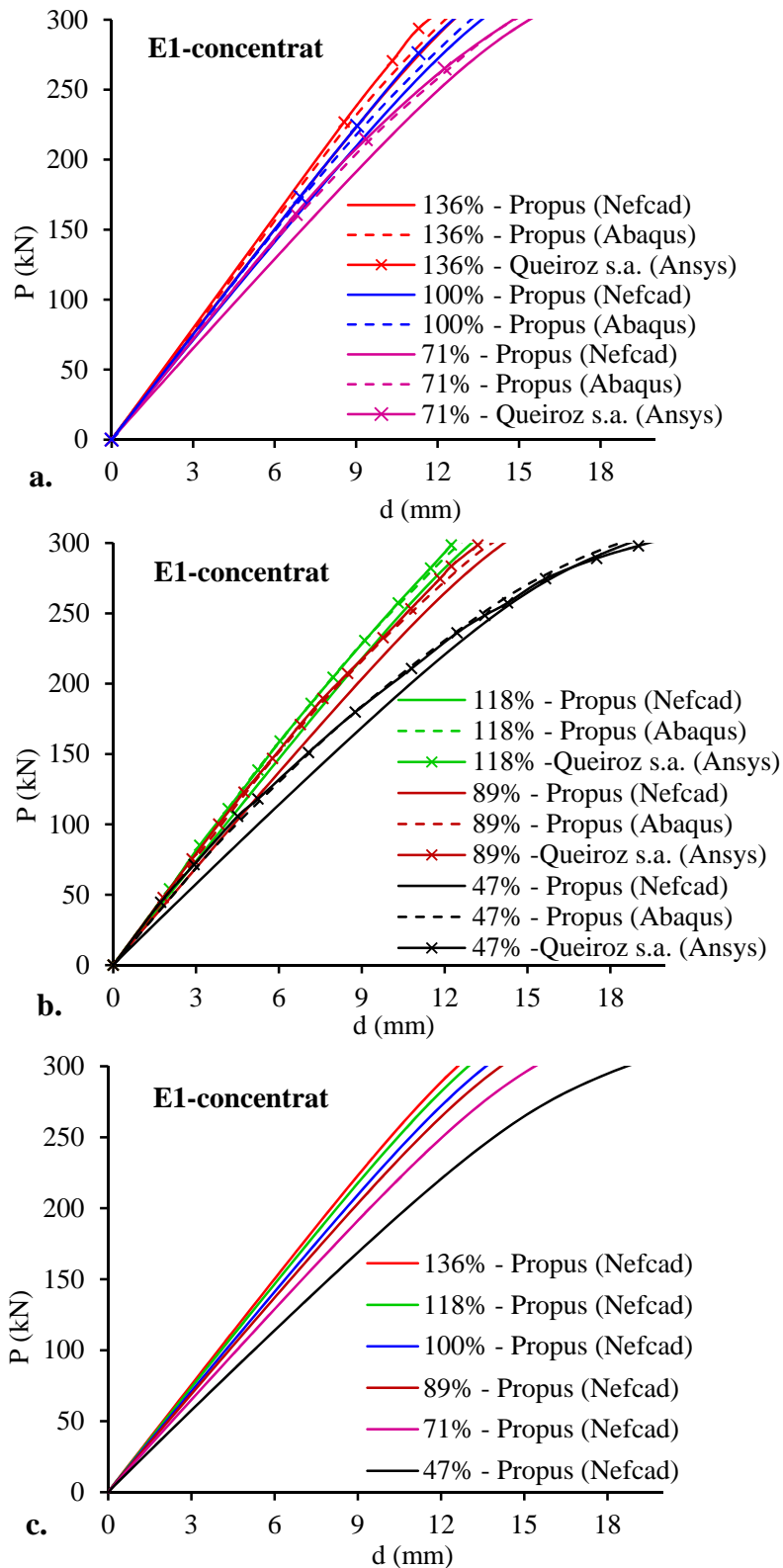


Fig. 7.22 Curbe P-d pentru diferite grade de conectare. Rigiditate inițială

În continuare, se consideră grinda E1 supusă, spre deosebire de situația precedentă, acțiunii unei sarcini uniform distribuite. Testele de validare a eficienței metodei propuse, constau în variația gradului de conectare (conform Tab. 7.7) și compararea rezultatelor cu cele trasate cu modelele numerice FEM.

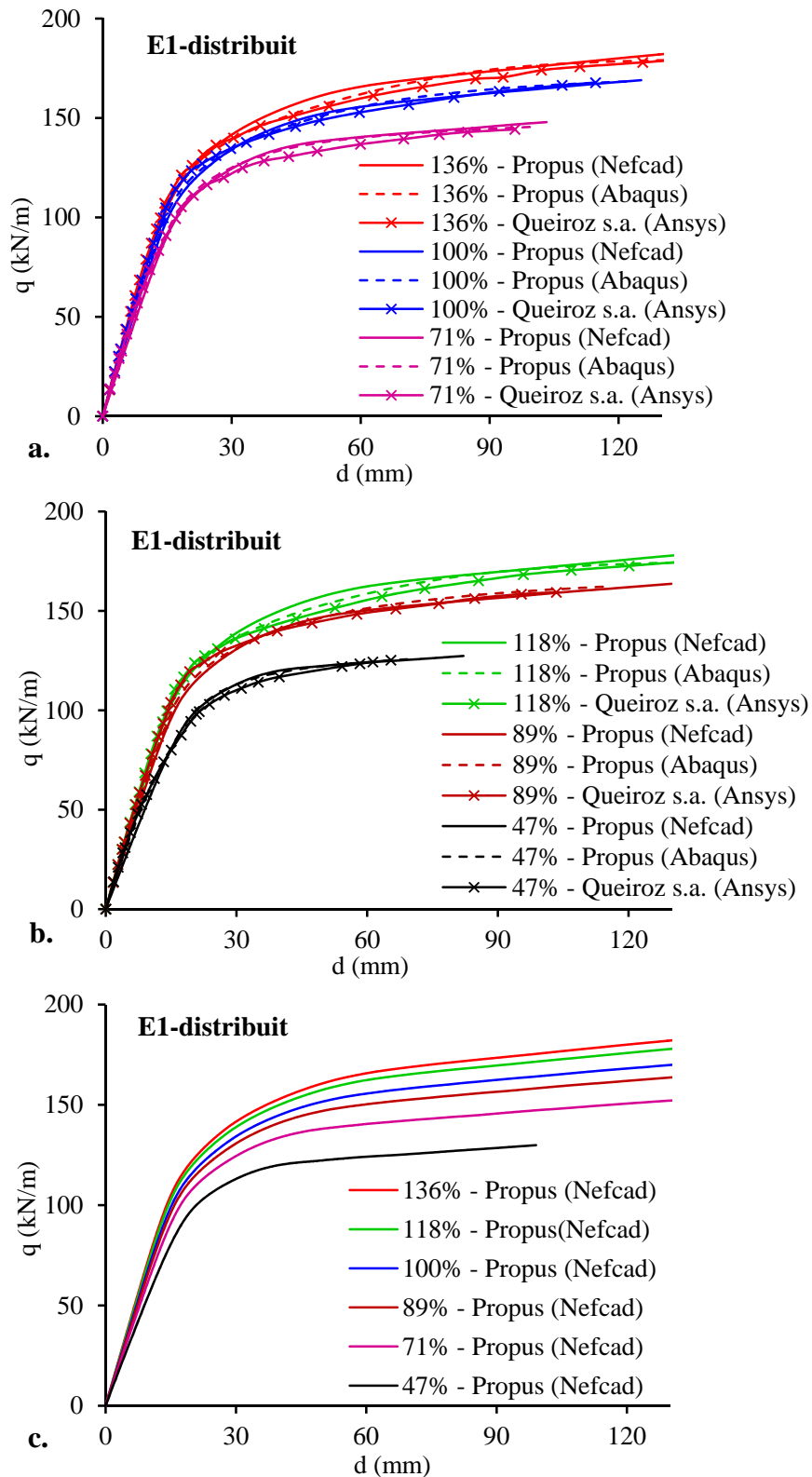


Fig. 7.23 Curbe q-d pentru diferite grade de conectare

Analizând Fig. 7.23. și Fig. 7.24. se poate constata că modelul propus furnizează rezultate cu un grad de acuratețe considerabil și în cazul grinzilor mixte încărcate uniform distribuit. Forțele capabile determinate cu procedeul propus sunt în bună concordanță cu cele similare prezise de modelele complexe realizate în pachetele comerciale de elemente finite Abaqus și

Ansys, diferențele înregistrate situându-se în limita a 3%. În ceea ce privește rigiditatea inițială manifestată de grinzile analizate cu procedeul propus, se poate observa că aceasta este ușor subestimată datorită considerării unei rigidități constante pentru conectori în primele incremente de încărcare, mai precis până la atingerea unor forțe în conectori egale cu jumătate din capacitatea lor portantă.

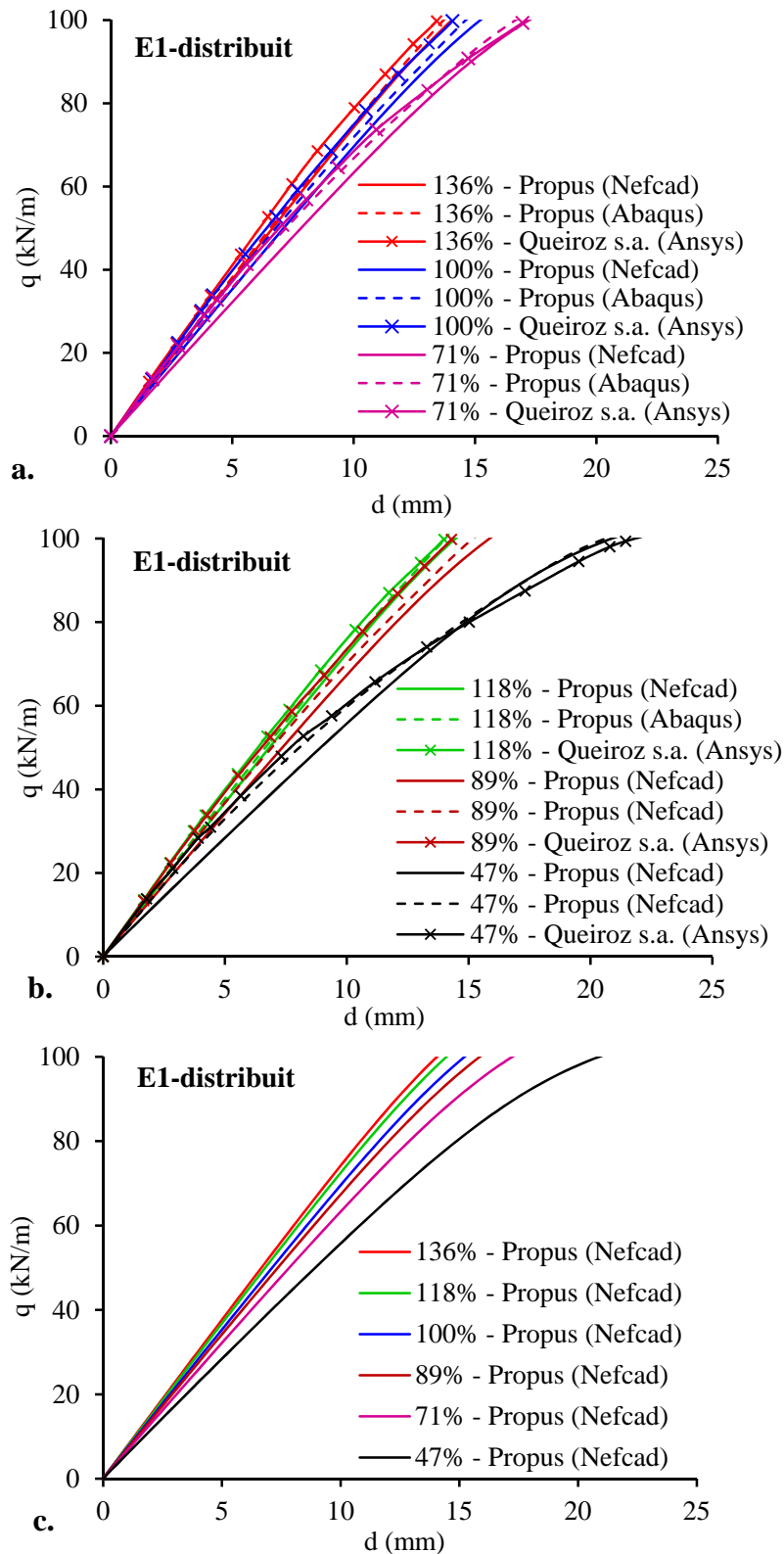


Fig. 7.24 Curbe q - d pentru diferite grade de conectare. Rigiditate inițială

Discuțiile și concluziile trasate în cazul grinzii E1 supuse acțiunii unei forțe concentrate la mijlocul deschiderii sunt adecvate și în situația grinzii supuse acțiunii unei încărcări uniform distribuite.

Numeroasele studii parametrice discutate în secțiunile anterioare atestă eficiența, fiabilitatea și stabilitatea numerică a procedurii de analiză propus, acesta fiind capabil să surprindă cu acuratețe apreciabilă capacitatea de rezistență și de rigiditate atât la nivel de secțiune cât și la nivel de element. Trebuie punctat că, spre deosebire de modelele numerice dezvoltate în pachete comerciale de elemente finite precum Abaqus și Ansys, procedeul propus furnizează rezultate comparabile, utilizând resurse computaționale și timpi de calcul semnificativ mai mici. Pentru exemplificare, o analiză la nivel de element în programul Abaqus pe un sistem de calcul dotat cu 2 procesoare având frecvența de 2.80 GHz și 8 nuclee fiecare respectiv 48 GB RAM durează în medie 8 min., în timp ce o analiză similară condusă în programul Nefcad pe un sistem inferior din punct de vedere al performanțelor, echipat cu 1 procesor cu 2 nuclee având frecvența de 2.0 GHz respectiv 2 GB RAM, se finalizează în mai puțin de 5 secunde cu toate că rularea a fost lansată din interfața grafică a programului.

7.1.2 Grinzi mixte simplu rezemate testate de Nie & Cai

În cadrul acestei secțiuni sunt analizate numeric două dintre cele șase grinzi simplu rezemate cu secțiune mixtă oțel-beton testate experimental de Nie & Cai [49] în scopul observării efectelor conectării parțiale asupra rigidității și rezistenței grinzilor mixte. Grinda SCB-1 este încărcată concentrat în două secțiuni în timp ce grinda SCB-3 este acționată concentrat la mijlocul deschiderii.

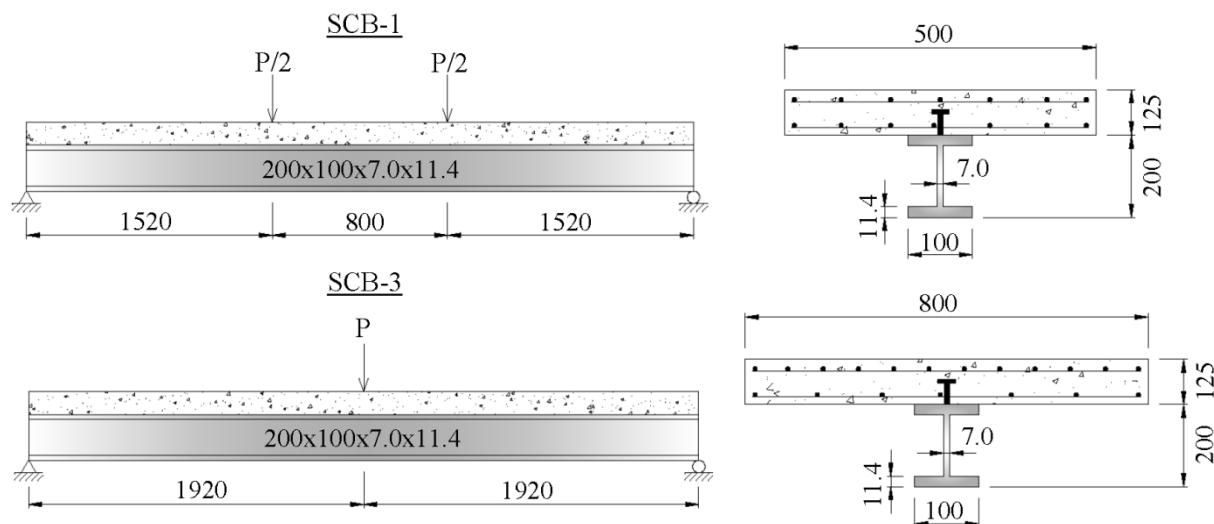


Fig. 7.25 Configurația geometrică a grinzilor SCB-1 și SCB-3

Schema statică și secțiunea transversală a elementelor analizate sunt prezentate în Fig. 7.25, iar caracteristicile mecanice ale materialelor sunt sintetizate în Tab. 7.8. Comportarea betonului comprimat s-a considerat a urma modelul *CEB-FIP* [136]. Modelul constitutiv al oțelului profilului metalic este cel elasto-plastic cu reconsolidare, iar deformația la rupere s-a considerat 10%. Armăturile s-au modelat cu comportare elastică-perfect plastică. În lipsa curbei experimentale de comportare a conectorilor, s-a ales modelul analitic *Ollgaard* [37] pentru definirea comportării acestora, cu parametrii $\alpha=0.558$ și $\beta=1 \text{ mm}^{-1}$. Corespunzător

acestei curbe de comportare s-a calculat rigiditatea secantă $K_{50\%}$ a conectorilor (v. Tab. 7.8). Pentru grinda SCB-1, rigiditatea secantă $k_{50\%}$ a conexiunii s-a calculat admițând o spațiere uniformă a conectorilor. Pentru analiza inelastică avansată cu procedeul propus, grinda SCB-1 a fost divizată în trei EF, iar grinda SCB-3 în două EF, aceste discretizări fiind condiționate de necesitatea existenței de noduri interioare în punctele de aplicare a forțelor concentrate. Numărul total de EF generat de programul Abaqus în urma unei discretizări cu dimensiunea maximă de 50 mm, este de 5055 respectiv 9415 pentru grinzile SCB-1 respectiv SCB-3.

Tab. 7.8 Caracteristici mecanice ale materialelor grinzilor SCB-1 și SCB-3

		SCB-1	SCB-3
Beton	f_c (MPa)	25.6	
	E_c (MPa)	29412	
Oțel	f_y (MPa)	profil	310
		armături	290
	E_s (MPa)	profil	200000
		armături	200000
ε_h	profil	0.025	
E_h (MPa)	profil	1000	
Armare longitudinală	Superioară	7 ϕ 6	12 ϕ 12
	Inferioară	7 ϕ 6	
Armare transversală	ϕ 6/75 la partea superioară și inferioară a plăcii		
Conexiune	Număr total de conectori ($\phi=19$ mm)	33	26
	Număr de rânduri@Spațiere (mm)	1@var ^a	1@148
	P_{sc} (kN)	97.76 ^b	
	Grad de conectare (%)	125	116
	$K_{50\%}$ (N/mm)	143457	
	$k_{50\%}$ (N/mm ²)	1226.1	969.3
	γ	10.136	8.328
	$f(\gamma)$	0.912	0.875

^a Pe zonele laterale spațierea conectorilor este de 115 mm, iar pe zona centrală 125 mm

^b S-a calculat conform relațiilor EC 4 [1]

Analizând Fig. 7.26 se poate constata că răspunsul moment încovoietor – săgeată maximă furnizat de modelul propus este în bună concordanță cu rezultatele experimentale, diferențele în ceea ce privește momentul ultim situându-se în limita a 2%, cedarea survenind ca urmare a atingerii deformației ultime a betonului comprimat. Totuși, în cazul grinzii SCB-3 modelul propus manifestă o rigiditate superioară pe zona de tranziție dintre domeniul de comportare elastic și cel postelastice. O bună corelare este observată și în raport cu relațiile M-d obținute cu modelul numeric dezvoltat în programul Abaqus, respectiv cu rezultatele publicate de *Nie s.a.* [74]. Modelul numeric folosit de aceștia a fost creat în programul MSC.MARC, grinda metalică fiind modelată cu EF de tip bară iar dala de beton cu EF de tip placă, conexiunea dintre aceste componente considerându-se rigidă și neglijând astfel efectele interacțiunii

parțiale, acesta fiind cel mai probabil unul dintre motivele pentru care acest model supraestimează capacitatea de rezistență a grinzii SCB-3. În cazul grinzii SCB-1 se observă că modelele numerice manifestă o racordare curbilinie între comportarea elastică și cea premergătoare cedării, spre deosebire de modelul experimental în care tranziția se realizează cvasi-liniar. Fig. 7.26. scoate de asemenea în evidență faptul că neglijaarea armăturilor conduce la subestimarea capacității de rezistență, acest aspect fiind relevat și de *Nie ș.a.* [74].

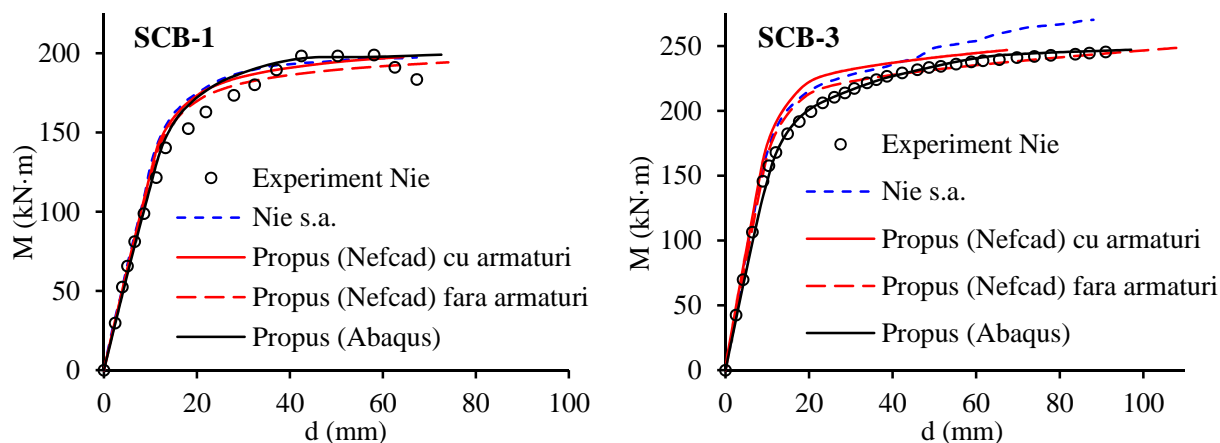


Fig. 7.26 Curbe moment încovoiator-săgeată pentru grinzile SCB-1 și SCB-3

7.1.3 Grinda simplu rezemată testată de Fabbrocino & Pecce

În cadrul acestei secțiuni se prezintă principale rezultate obținute pentru grinda de tip C testată experimental de *Fabbrocino & Pecce* [30], acest element cu secțiune mixtă fiind selectat pentru validarea modelului propus în situația particulară în care dala de beton este întinsă, situație întâlnită în zonele de reazem interior ale grinzilor continue. Grinda analizată este simplu rezemată și este acționată de o sarcină concentrată aplicată la mijlocul deschiderii (v. Fig. 7.27). Proprietățile materialelor și ale conexiunii dintre componente sunt detaliate în *Tab. 7.9*.

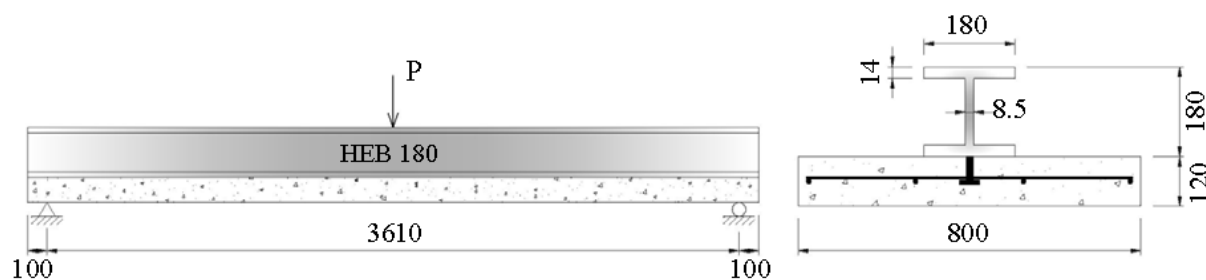


Fig. 7.27 Configurația geometrică a grinzii de tip C

În lipsa curbei experimentale de comportare a conectorilor, s-a ales modelul analitic *Ollgaard* [37] pentru definirea comportării acestora, cu parametrii de formă propuși de *Aribert* $\alpha=0.8$ și $\beta=0.7 \text{ mm}^{-1}$. Corespunzător acestei curbe de comportare s-a calculat rigiditatea secantă $K_{50\%}$ a conectorilor (v. *Tab. 7.9*). Rigiditatea echivalentă la forfecare $(GA)_{eq}$, determinată urmând relațiile prezentate în capitolul 5, are valoarea $3.19 \cdot 10^5 \text{ kN}$ când se ține cont de contribuția betonului și $3.19 \cdot 10^5 \text{ kN}$ când se i-a în considerare doar aportul

oțelului. În analizele efectuate cu modelul propus, fiecare jumătate de grindă s-a modelat cu un singur element finit având șapte puncte de integrare în lungul lui.

Tab. 7.9 Caracteristici mecanice ale materialelor grinzii de tip C

		Tip C	
Beton	f_c (MPa)	24	
	f_t (MPa)	2.5	
	E_c (MPa)	28786	
Oțel	f_y (MPa)	profil	375
		armături	540
	f_u (MPa)	profil	475
		armături	635
	E_s (MPa)	profil	200000
armături		200000	
ε_h	profil	0.0125	
E_h (MPa)	profil	2666	
Armare longitudinală	4 Φ 14 la mijlocul plăcii de beton		
Armare transversală	Φ 14 în apropierea secțiunilor de amplasare a conectorilor		
Conexiune	Număr total de conectori ($\Phi=16$ mm)	8	
	Număr de rânduri@Spațiere (mm)	1@515	
	P_{sc} (kN)	73.75	
	Grad de conectare (%)	89	
	$K_{50\%}$ (N/mm)	47319	
	$k_{50\%}$ (N/mm ²)	92	
	γ	1.97	
	$f(\gamma)$	0.282	

Scopul acestui studiu este de a testa capacitatea modelului de a surprinde comportarea de ansamblu a grinzilor mixte oțel-beton, având componenta de beton supusă la întindere din încovoiere. Procedura de validare constă în compararea rezultatelor obținute cu metoda propusă cu cele experimentale [30] precum și cu cele furnizate de programul Abaqus respectiv cu rezultatele publicate de *Nguyen ș.a.* [121], acestea din urmă fiind obținute folosind 72 de EF cu formulare mixtă. Relațiile încărcare - săgeată maximă și încărcare – rotire la rezeme sunt afișate în Fig. 7.28 și Fig. 7.29. Curbele furnizate de modelul propus sunt prezentate în trei variante diferențiate prin modul în care se consideră rigiditatea echivalentă la forfecare. Analizând Fig. 7.28 se poate constata că modelul de analiză propus generează un răspuns sensibil mai rigid în cazul în care se neglijează efectul deformațiilor de lunecare respectiv atunci când acestea sunt luate în considerare și rigiditatea la forfecare $(GA)_{eq}$ este determinată ținând cont de efectul betonului. În cazul contrar în care, pentru calculul valorii $(GA)_{otel}$ s-a considerat doar aportul profilului metalic, curba încărcare –

săgeată generată de modelul propus este în foarte bună concordanță cu cea determinată experimental respectiv cu cele obținute cu alte modele numerice complexe. Neglijarea aportului betonului în calculul rigidității echivalente este justificată în acest caz particular de solicitare deoarece betonul este întins, contribuția lui în stadiu fisurat fiind practic nesemnificativă. O corelare apreciabilă se remarcă și între curbele încărcare – rotire la reazeme, deși în acest caz modelul nu este sensibil la modul de luare în considerare a rigidității echivalente la forfecare, cu sau fără includerea aportului betonului. Exemplu numeric prezentat în această secțiune evidențiază eficiența modelului propus de a trasa răspunsul grinzilor mixte având componenta de beton supusă la întindere din încovoiere, fiind astfel adecvat și pentru analiza acestor sisteme structurale particulare.

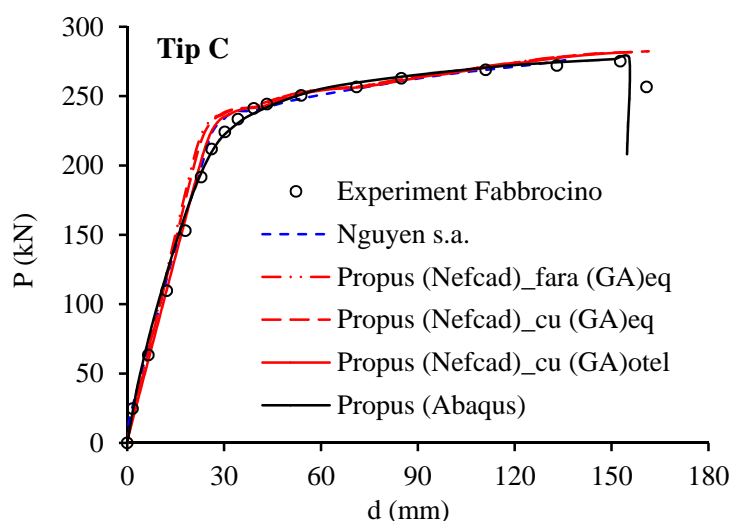


Fig. 7.28 Curbe încărcare-săgeată pentru grinda de tip C

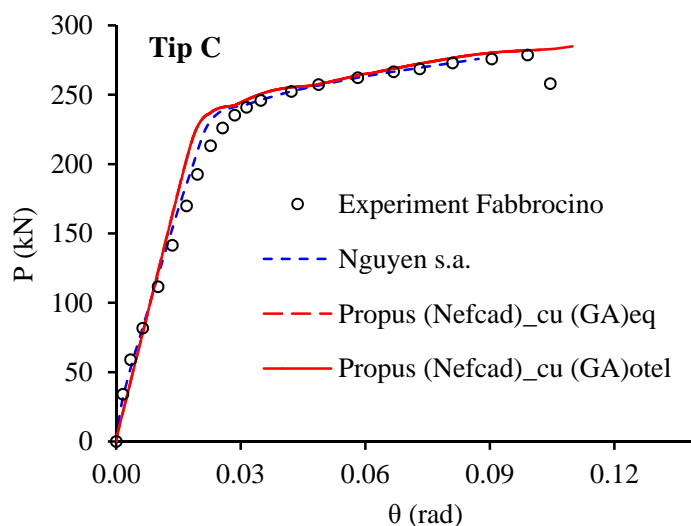


Fig. 7.29 Curbe încărcare-rotire la reazeme pentru grinda de tip C

7.1.4 Grinda simplu rezemată testată de Aribert ș.a.

În cadrul acestei secțiuni se prezintă analiza elastică a unei grinzi simplu rezemate, testate experimental de Aribert ș.a. [155] și analizate numeric de Nguyen ș.a. [68]. Scopul acestui studiu este de a evidenția capacitatea procedurii de analiză propus de a include efectul

deformațiilor unghiulare în răspunsului mecanic al grinzilor simplu rezemate cu secțiune mixtă oțel-beton. Amintim că, în cadrul metodei propuse, deformațiile unghiulare sunt luate în considerare prin intermediul unei rigidități echivalente la forfecare, în valoarea căreia se ține cont și de aportul betonului comprimat, ponderea acestuia fiind proporțională cu nivelul de conectare dintre componentele sistemului mixt. Schema statică și secțiunea transversală a elementului, ce face obiectul prezentului studiu, sunt redată în Fig. 7.30.

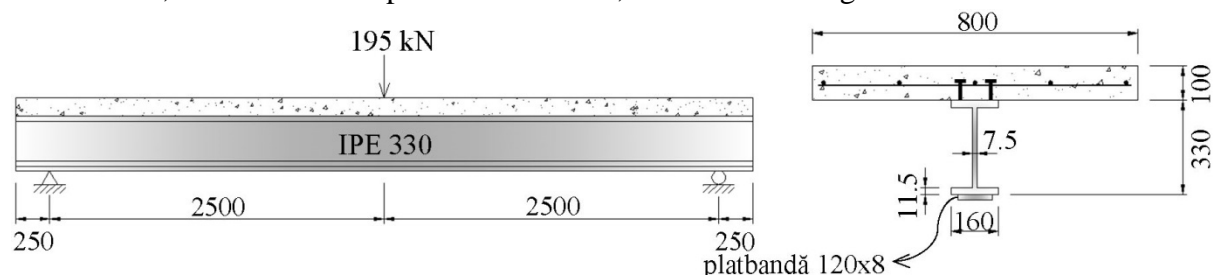


Fig. 7.30. Configurația geometrică a grinzii testate de Aribert

Proprietățile conexiunii și ale materialelor componente, utilizate în analizele elastice ce urmează a fi prezentate, sunt sintetizate în Tab. 7.10. Precizăm că, în lipsa documentației originale referitoare la încercările experimentale, caracteristicile materialelor sunt preluate din articolul publicat de *Nguyen ș.a.* [68], făcând astfel relevantă compararea rezultatelor obținute cu modelul propus cu cele raportate de autorii mai sus menționați.

Tab. 7.10. Caracteristici mecanice ale materialelor grinzii testate de Aribert

		Aribert
Beton	E_c (MPa)	20000
Oțel	E_s (MPa)	200000
Armare longitudinală	5 Φ 10 la mijlocul plăcii de beton	
Conexiune	Număr total de conectori ($\Phi=19$ mm)	24
	Număr de rânduri@Spațiere (mm)	2@450
	$k_{50\%}$ (N/mm ²)	450
	γ	6.02
	$f(\gamma)$	0.786
$(GA)_{eq}$ (kN)		$3.65 \cdot 10^5$

Rezultatele obținute cu procedeul propus sunt sintetizate în Fig. 7.31, alături de cele experimentale respectiv de cele publicate de *Nguyen ș.a.* [68], acestea din urmă fiind trasate pe baza unui model numeric în element finit, care permite includerea deformațiilor de lunecare transversală prin formularea Timoshenko adoptată și care nu introduce aproximații în matricea de rigiditate, aceasta fiind dedusă în baza ecuațiilor de compatibilitate și echilibru ce guvernează comportarea elementelor mixte în domeniul elastic de comportare. O bună corelare poate fi observată între modelele numerice corespondente (diferențe de maxim 5%), însă acestea supraestimează rigiditatea sistemului, o posibilă explicație a acestui fenomen fiind discrepanța dintre caracteristicile mecanice ale materialelor utilizate în modelul experimental respectiv cele folosite în procedurile numerice. Rezultatele obținute de *Nguyen*

ș.a. [68], aplicând modelul *Newmark* [14], sunt apropiate cu cele furnizate de procedeul propus în cazul neglijării aportului deformațiilor unghiulare respectiv cu cele obținute analitic în baza soluției ecuației diferențiale de ordinul II specifice grinzilor mixte oțel-beton cu interacțiune incompletă, prezentate detaliat în capitolul 4. Amintim că modelul *Newmark* admite ipoteza *Bernoulli*, neglijând astfel deformațiile unghiulare. O foarte bună corespondență poate fi sesizată între modelul propus, ținând cont de influența deformațiilor unghiulare via rigiditatea echivalentă la forfecare $(GA)_{eq}$, și modelul FEM - *Timoshenko* dezvoltat de *Nguyen ș.a.* [68], demonstrând astfel acuratețea și eficacitatea formulării prezentate în vederea includerii aportului betonului comprimat în expresia rigidității la forfecare.

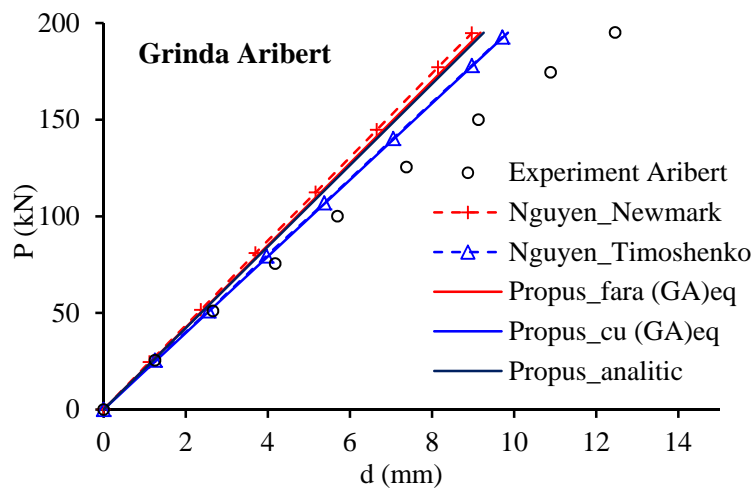


Fig. 7.31 Influența deformațiilor unghiulare asupra curbelor încărcare-săgeată pentru grinda Aribert

În continuare se prezintă sintetic principalele rezultate ale studiului parametric întreprins în scopul cercetării influenței deformațiilor unghiulare asupra deplasărilor transversale. Parametrii variați sunt nivelul de interacțiune dintre componente, prin valoarea rigidității conexiunii, și raportul dintre lungimea grinzii (L) și înălțimea secțiunii transversale (H). Fig. 7.32 prezintă rezultatele comparative pentru cele patru valori considerate pentru rigiditatea conexiunii. Curbele prezintă variația raportului dintre săgețile determinate cu (δ_T) și fără (δ_{EB}) includerea aportului deformațiilor unghiulare odată cu variația raportului L/H . Corespondența dintre cele două modele numerice este considerabilă, o supraestimare a săgeții determinate cu modelul propus putând fi observată în cazul grinzilor caracterizate prin valori foarte mici ale raportului L/H . În altă ordine de idei este evidentă importanța și necesitatea considerării efectului deformațiilor unghiulare asupra deplasărilor transversale în situația grinzilor scurte, acest efect devenind și mai important pe măsura majorării nivelului de interacțiune. Bine-nțelesul efectul studiat devine neglijabil pentru valori însemnate ale raportului lungime înălțime, chiar și în situațiile caracterizate prin valori mari ale rigidității k . Studiul prezentat dovedește pe de-o parte eficacitatea procedeului propus de a ține cont de efectul deformațiilor de lunecare transversală, prin considerarea unei rigidități echivalente la forfecare, iar pe de altă parte reliefează aportul componentei de beton în valoarea acestei rigidități.

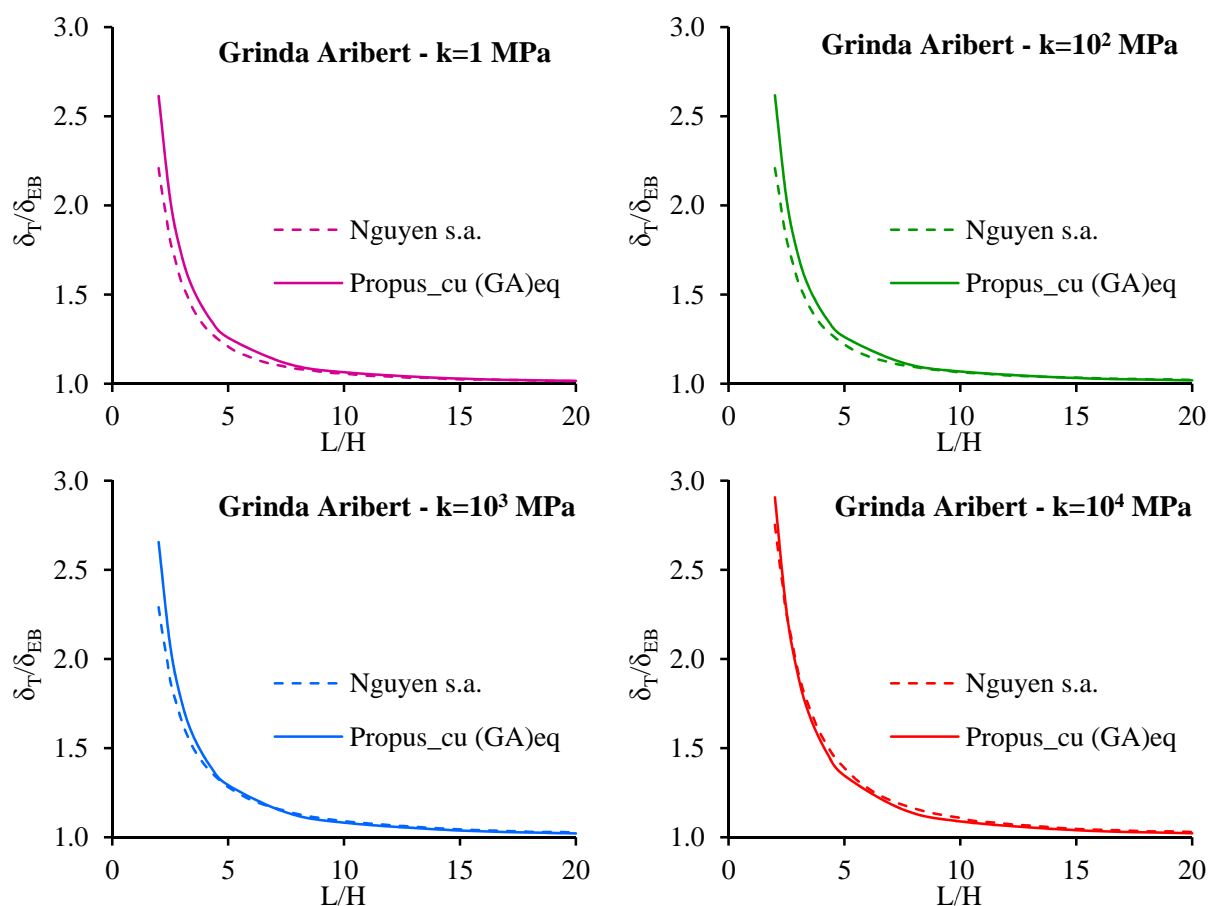


Fig. 7.32 Influența deformațiilor unghiulare asupra deplasărilor transversale ale grinzii Aribert

7.1.5 Grinzi continue mixte testate de Ansourian

Eficacitatea modelului propus este în continuare testată pe patru grinzi continue cu două deschideri testate experimental de *Ansourian* [25]. Grinda CTB 1 are deschideri diferite și este încărcată concentrat doar la mijlocul primei deschideri și astfel pentru atingerea momentului plastic negativ articulația plastică din deschiderea încărcată trebuie să posede capacitate de rotire considerabilă. Grinzile CTB 4, CTB 5 și CTB 6 au deschiderile egale ca lungime și sunt încărcate concentrat la mijlocul fiecărei deschideri. Schema statică și secțiunea transversală a elementelor analizate sunt prezentate în Fig. 7.33, iar caracteristicile mecanice ale materialelor sunt sintetizate în Tab. 7.11.

În lipsa curbei experimentale de comportare a conectorilor, s-a ales modelul analitic *Ollgaard* [37] pentru definirea comportării acestora, cu parametrii de formă propuși de *Loh ș.a.* [51] $\alpha=0.85$ și $\beta=1.2 \text{ mm}^{-1}$. În articolul publicat de *Ansourian* [25] nu se precizează capacitatea portantă a conectorilor și nici spațierea acestora și, în consecință, aceste date au fost preluate din alte studii numerice publicate în literatura de specialitate [51,97,121]. Gradele de conectare calculate cu aceste valori ipotetice sunt raportate în Tab. 7.11. În modelul de analiză propus, fiecare jumătate de deschidere s-a modelat cu un singur EF cu șapte puncte de integrare Gauss-Lobatto.

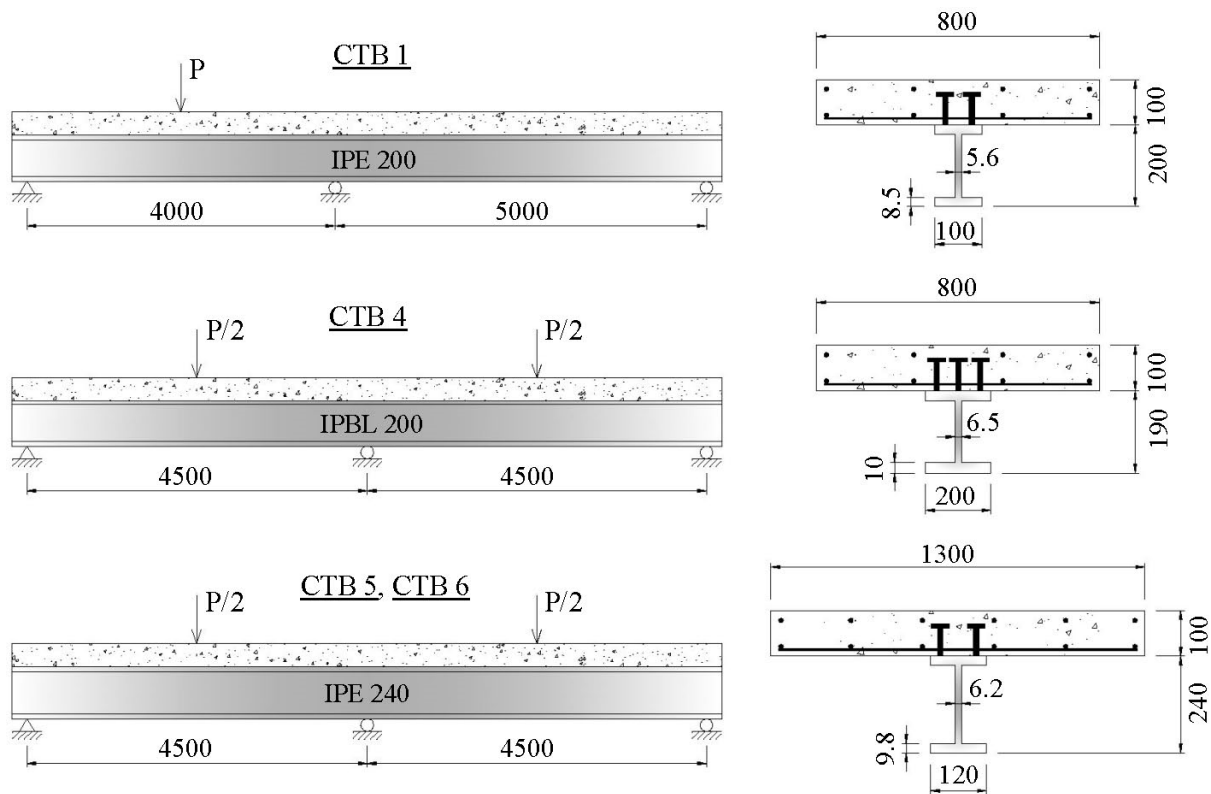


Fig. 7.33 Configurația geometrică a grinzilor CTB 1, CTB 4, CTB5 și CTB 6

În vederea verificării eficienței procedurii de calcul propus, rezultate furnizate de acesta au fost comparate cu cele experimentale [25] și cu cele obținute pe baza modelului creat în *Abaqus* [15]. Suplimentar, curbele propuse au fost comparate și cu altele similare trasate de aplicații particulare ce au la bază modelul elementelor finite cu formulare în deplasări [103,104]. Diferența dintre cele două formulări constă în abilitatea modelului propus de *Zona & Ranzi* [103] de a ține cont de efectul deformațiilor de lunecare prin modelarea celor două componente ale grinzilor mixte cu EF formulate în teoria Timoshenko (T), ținând cont astfel și de aportul betonului în preluarea forței tăietoare. Mai mult, acest model are implementate relații constitutive uniaxiale $\tau - \gamma$ ce detectează cedarea datorată forfecării. Modelul descris de *Ranzi & Bradford* [104] simulează comportarea profilului metalic și a plăcii de beton cu EF formulate în teoria Euler-Bernoulli (EB).

Tab. 7.11 Caracteristici mecanice ale materialelor grinzilor CTB 1, CTB 4, CTB5 și CTB 6

			CTB 1	CTB 4	CTB 5	CTB 6
Beton	f_c (MPa)		24	27.2	23.2	32.8
	f_t (MPa)		2.5	2.7	2.4	3.1
	E_c (MPa)		28786	30012	28462	31945
Oțel	f_y (MPa)	tălpi	277	236	265	292
		inimă	340	238	278	310
		armături		430		
	f_u (MPa)	tălpi	421	393	442	462
		inimă	440	401	428	450

	E_s (MPa)	armături tălpi inimă armături	533 206000 206000 206000			
	ε_h		0.012	0.018	0.019	0.014
	E_h (MPa)		6000	3000	4800	3800
Armare longitudinală	Zonă reazem – superior (mm^2)		800	804	1260	1260
	Zonă reazem – inferior (mm^2)		316	767	470	767
	Zonă câmp – superior (mm^2)		-	160	320	380
	Zonă câmp – inferior (mm^2)		160	160	160	160
Armare transversală	$\phi 10/100$ la partea inferioară a plăcii					
Conexiune	Număr total de conectori ($\phi=19mm$)		66	84	60	60
	Număr de rânduri@Spațiere (mm)		2@280	3@330	2@300	2@300
	P_{sc} (kN)		110			
	Grad de conectare (%)	Câmp	148	150	121	109
		Reazem	138	147	118	100
	$K_{sc.50\%}$ (N/mm)		112980			
	$k_{50\%}$ (N/mm ²)		807	1027	753.2	753.2
	γ		6.237	6.095	5.662	5.581
	$f(\gamma)$		0.798	0.790	0.764	0.759
	$(GA)_{eq}$ (kN)	Considerând aportul betonului		$2.95 \cdot 10^5$	$2.58 \cdot 10^5$	$3.43 \cdot 10^5$
Neglijând aportul betonului			$1.05 \cdot 10^5$	$1.17 \cdot 10^5$	$1.39 \cdot 10^5$	$1.39 \cdot 10^5$

Fig. 7.34 prezintă comparativ răspunsul încărcare – săgeată pentru cele patru grinzi considerate în acest studiu. Curbele generate de modelul propus includ efectul deformațiilor de lunecare, rigiditatea echivalentă la forfecare considerându-se constantă, pe întreaga lungime a elementelor, și având valorile redată în Tab. 7.11 în cazul includerii aportului betonului din acțiunea compozită cu profilul metalic. Se poate constata că modelul propus surprinde cu acuratețe însemnată răspunsul global al elementelor analizate, diferențele raportate la valorile experimentele încadrându-se în limita a 4% în ceea ce privește capacitatea de rezistență. O bună corelare poate fi observată și în raport cu celelalte modele numerice alese ca referințe. Totuși modelul propus manifestă rigiditate sporită față de modelul Abaqus și cel descris de Zona & Ranzi [103] deoarece procedeul curent consideră o comportare liniar elastică în ceea ce privește răspunsul la forfecare. Diferența de rigiditate este simțitor redusă (v. Fig. 7.35) prin utilizarea, în zonele cu moment încovoiator negativ, a unei rigidități echivalente la forfecare calculate considerând doar aportul oțelului (v. Tab. 7.11). În cazul grinzii CTB 1, încărcată doar pe prima deschidere, porțiunea cu moment încovoiator negativ s-a considerat a fi 15% din lungimea primei deschideri la stânga reazemului interior coroborată cu întreaga deschiderii la dreapta reazemului interior. Pentru celelalte grinzi continue analizate, încărcate simetric în ambele deschideri, porțiunile sollicitate la încovoiere negativă sunt adoptate a fi 15% din lungimea deschiderii de fiecare parte a reazemului interior, aceste lungimi fiind sugerate în principalele standarde de proiectare a elementelor mixte.

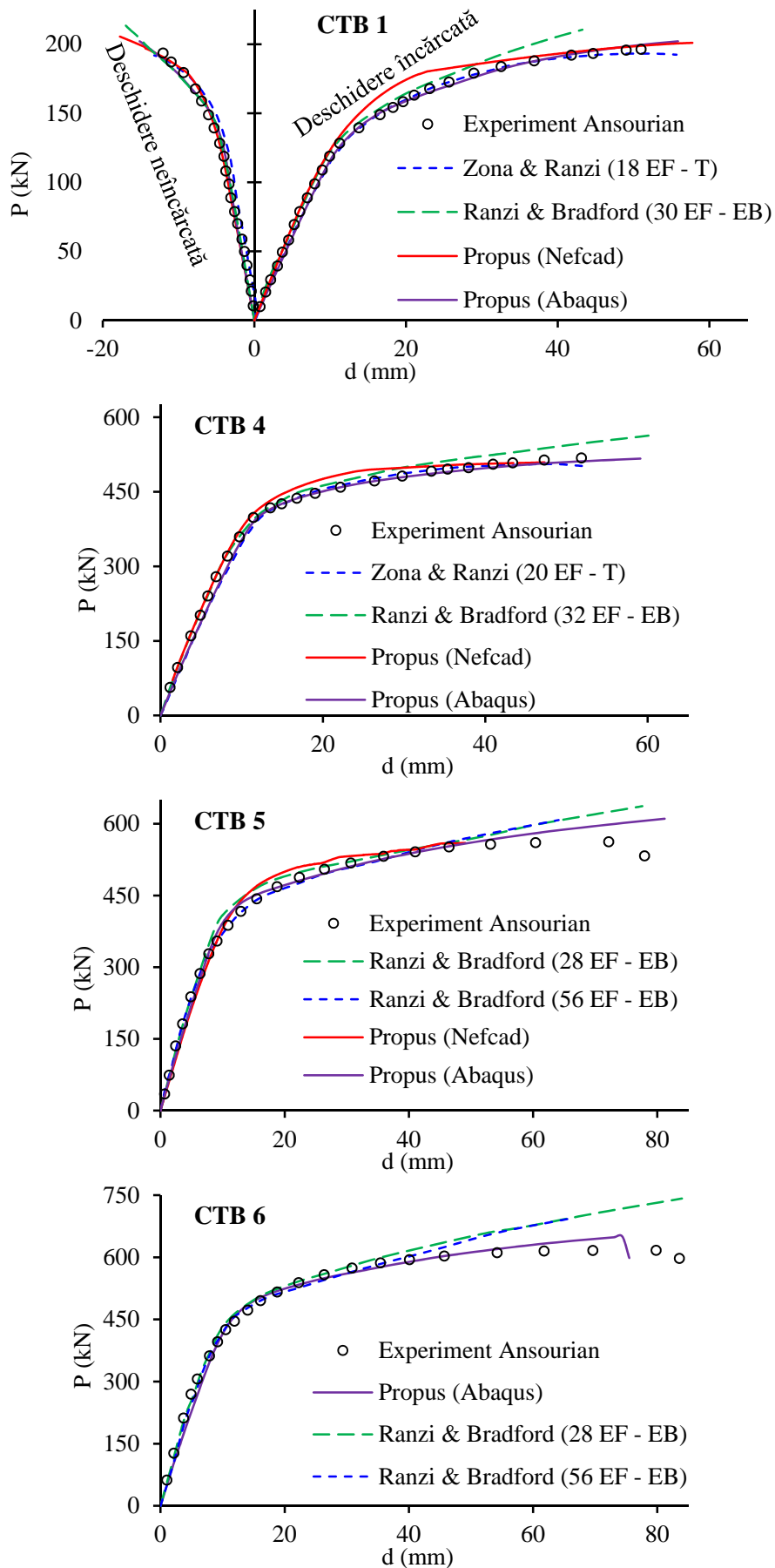


Fig. 7.34 Curbe încărcare-săgeată pentru grinzile CTB 1, CTB 4, CTB5 și CTB 6

În Fig. 7.35 curbele trasate cu procedeul propus pentru grinzile CTB 1 și CTB 4 sunt prezentate în trei forme distincte în funcție de modalitatea de considerare a efectului deformațiilor unghiulare. Un prim caz constă în considerarea pe întreaga lungime a grinzii a unei rigidități constante la forfecare calculate prin includerea aportului betonului în funcție de gradul de acțiune compozită dintre componente. În cele de-al doilea caz, pe porțiunea sollicitată la încovoiere negativă, rigiditatea la forfecare este inclusă în analiză cu o valoare redusă constând doar în aportul profilului metalic. Aceste două situații precedente sunt comparate cu cea în care efectul deformațiilor de lunecare este neglijat considerând astfel o rigiditate infinită la forfecare. Se poate constata că efectul deformațiilor de lunecare nu trebuie neglijat, acest aspect influențând rigiditatea manifestată de elementele mixte analizate. Studiul prezentat, demonstrează că, în mod conservativ, aportul betonului la forfecare poate fi neglijat pe zonele sollicitate la încovoiere negativă.

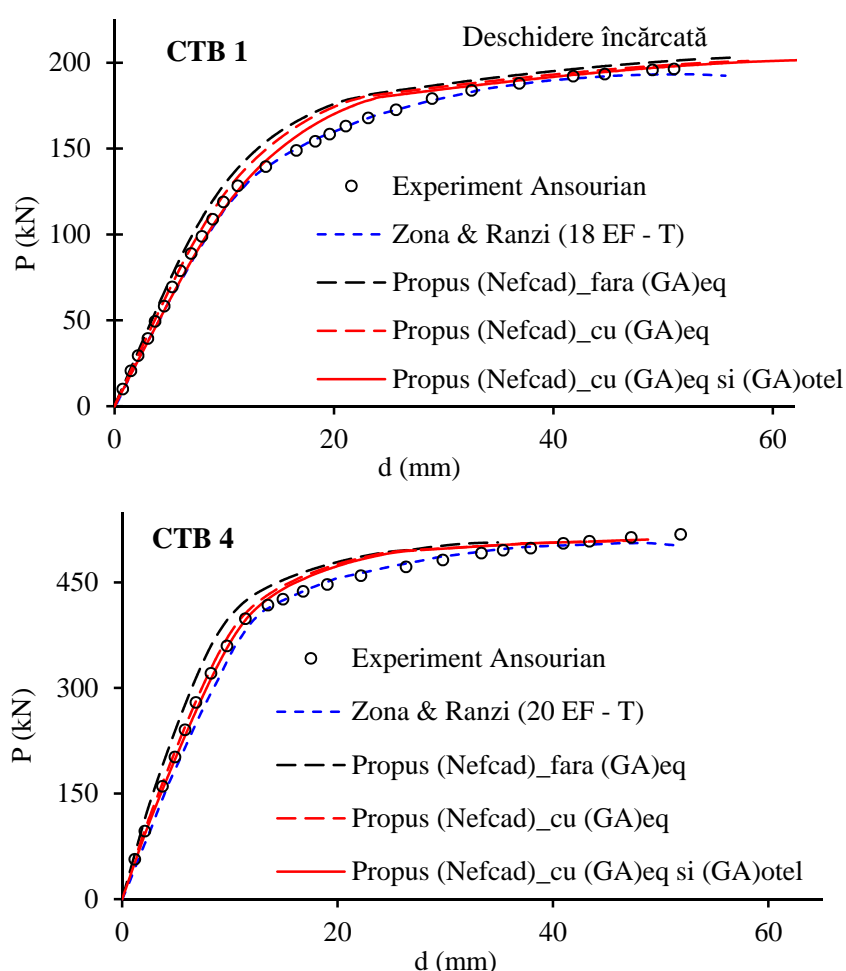


Fig. 7.35 Influența rigidității la forfecare asupra curbelor P-d pentru grinzile CTB 1 și CTB 4

Estimarea influenței deformațiilor unghiulare, în domeniul elastic de comportare, precum și testarea eficienței modelului propus de a ține cont de acest efect reprezintă principalele obiective al exemplului prezentat în continuare. Elementul selectat pentru acest studiu este grinda CTB 6, aceasta fiind analizată numeric și de *Nguyen ș.a.* [156] utilizând un model care include efectul deformațiilor de lunecare transversale prin formularea Timoshenko adoptată pentru elementele finite în care s-a discretizat bara. Spre deosebire de procedeul propus de

Zona & Ranzi [103], Nguyen ș.a. [156] nu introduc aproximații în elementele matricei de rigiditate a elementului, aceasta fiind dedusă pe baza ecuațiilor de echilibru și compatibilitate ce guvernează comportarea grinzilor cu secțiune mixtă oțel-beton în domeniul elastic de comportare și în ipoteza conexiunii parțiale dintre componente. Grinda este supusă acțiunii a două forțe concentrate de 160 kN, aplicate la mijlocul fiecărei deschideri și de asemenea se mai aplică o sarcină uniform distribuită de 3.3 kN/m reprezentând greutatea proprie. În lucrarea publicată de Nguyen ș.a. [156], rigiditatea k a conexiunii s-a considerat 10000 MPa. În Fig. 7.36 se prezintă curbele încărcare –săgeată obținute cu modelul propus, în raport cu cele preluate din [156], o bună corespondență între ele putând fi observată. Relațiile $P-d$ etichetate cu Newmark nu includ efectul deformațiilor unghiulare, în acest caz observându-se o supraestimare a rigidității manifestate de grinzile analizate. În cazul considerării efectului deformațiilor unghiulare (curbele etichetate cu 'nefisurat') se obține o reducere a rigidității față de cazul precedent. Aceste curbe sunt trasate considerând că betonul este nefisurat pe întreaga lungime a elementului, contribuind astfel la rigiditatea echivalentă la forfecare și la încovoiere, și supraestimând ușor rigiditatea comparativ cu modelul experimental. Dacă, în schimb, pe porțiunile adiacente reazemului interior (15% din fiecare deschidere) contribuția betonului la forfecare și la încovoiere este neglijată, rigiditatea manifestată de elementul analizat este considerabil redusă (curbele etichetate cu 'fisurat'), indicând astfel necesitatea includerii fisurării betonului chiar și în calculul în starea limită de serviciu. În această situație, pe porțiunea supusă la încovoiere negativă, procedeul propus consideră că rigiditatea la forfecare este alcătuită doar din contribuția profilului metalic în timp ce, rigiditatea la încovoiere i-a în considerare și aportul armăturilor întinse. Neglijarea contribuției armăturilor în preluarea momentului încovoiător negativ conduce la o flexibilizare semnificativă a sistemului structural analizat (v. Fig. 7.36). Aceste exemplu demonstrează încă o dată eficacitatea metodei propuse de a include în răspunsul structural efectul deformațiilor de lunecare prin intermediul rigidității echivalente la forfecare determinate în conformitate cu relațiile prezentate în capitolul 5.

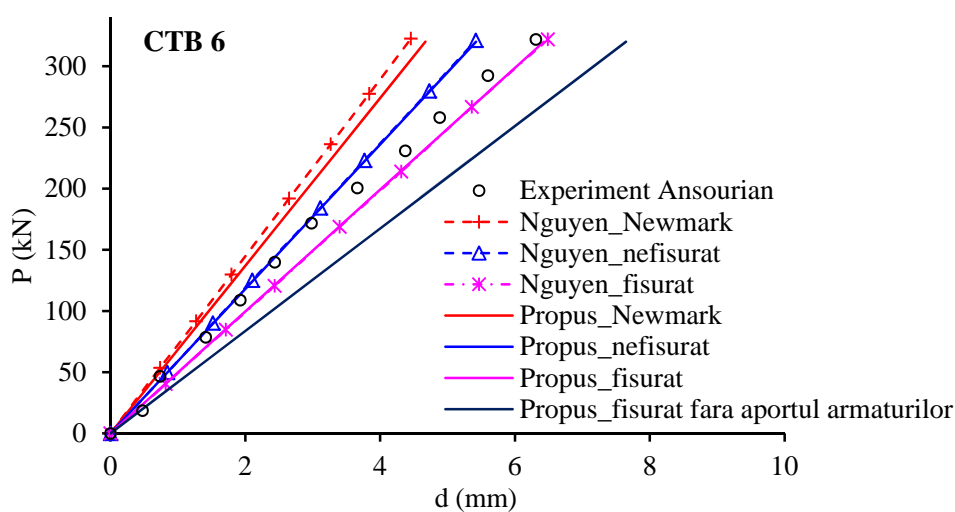


Fig. 7.36 Influența deformațiilor unghiulare asupra curbelor încărcare-săgeată pentru grinda CTB 6

Importanța considerării efectului deformațiilor unghiulare asupra deplasărilor transversale este reliefată în continuare printr-un studiu parametric realizat pentru patru valori distincte ale deschiderii grinzii continue respectiv unsprezece valori ale rigidității conexiunii, pornind de la valoarea 1 MPa (corespunzătoare situației extreme a lipsei interacțiunii) și ajungând la valoarea 10^6 MPa (corespunzătoare situației ipotetice de interacțiune completă). În Fig. 7.37 se prezintă variația raportului dintre deplasările transversale rezultate ca urmare a includerii efectului deformațiilor unghiulare ($\delta_{\text{nefisurat}}$) și cele obținute prin neglijarea acestui efect (δ_{Newmark}), odată cu variația rigidității conexiunii. Cunoșcând din rezistența materialelor faptul că deformațiilor unghiulare devin importante în calculul săgeților grinzilor scurte, studiul s-a realizat pentru patru valori distincte ale deschiderii grinzii continue, astfel încât raportul lungime (L) / înălțime (H) să aibă pe rând valorile 5, 7.5, 10 respectiv 20. Trebuie menționat că în evaluarea rigidității echivalente la forfecare și la încovoiere s-a ținut cont de aportul betonului pe întreaga lungime a grinzii continue, considerând că betonul este în stadiu elastic nefisurat pe porțiunea de bară supusă la încovoiere negativă. Rezultatele obținute sunt prezentate comparativ cu cele raportate de *Nguyen s.a.* [156], diferențele înregistrate fiind de cel mult 6%. Se poate constata că, și în cazul grinzilor continue cu secțiune mixtă oțel-beton, efectul deformațiilor unghiulare este important în cazul grinzilor cu deschideri mici, devenind mai pronunțat odată cu creșterea gradului de interacțiune. Bine-nțeles, odată cu creșterea raportului L/H, efectul deformațiilor de lunecare transversale asupra săgeților devine neglijabil, chiar și pentru valori mari ale rigidității conexiunii.

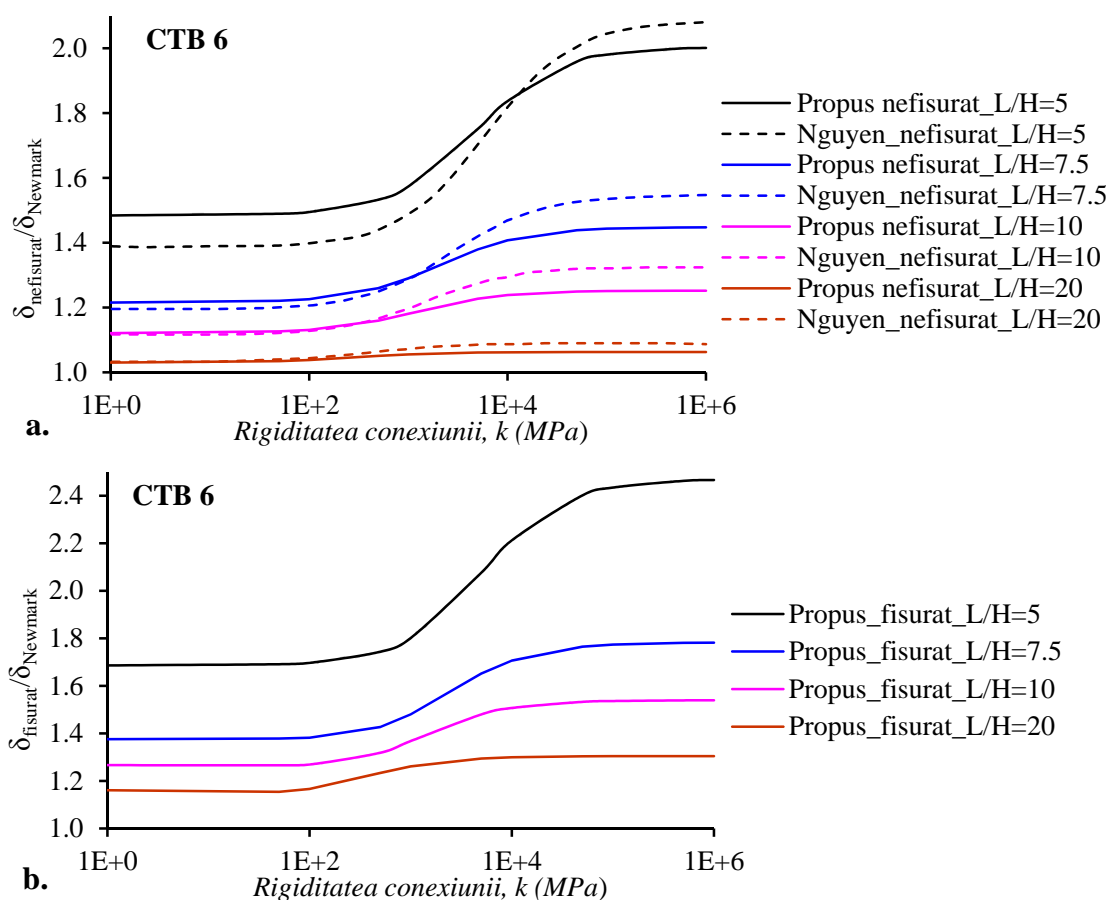


Fig. 7.37 Influența deformațiilor unghiulare asupra deplasărilor transversale ale grinzii CTB 6

În Fig. 7.37.b. se observă că, în cazul grinzilor scurte, influența deformațiilor unghiulare asupra deplasărilor transversale este și mai însemnată dacă aportul betonului întins este neglijat în calculul rigidităților la încovoiere și forfecare, asociate porțiunilor solicitate la încovoiere negativă.

7.2 Testări numerice pe stâlpi cu secțiune mixtă oțel-beton

Deși, în prezenta teză de doctorat accentul este pus pe formularea unei metode de analiză neliniară a grinzilor cu secțiune mixtă oțel-beton în ipoteza conectării parțiale dintre componente, în acest subcapitol se prezintă un exemplu numeric pe un stâlp mixt având armătură rigidă înglobată complet în volumul de beton. Scopul studiilor prezentate în această secțiune constă în testarea capacității modelului propus de a include efectele de ordinul doi și ale tensiunilor reziduale în răspunsul structural al elementelor analizate, aceste efecte jucând un rol important în condițiile aplicării unor eforturi axiale considerabile, situații întâlnite în cazul stâlpilor ce intră în alcătuirea cadrelor mixte. Menționăm că, în cadrul analizelor prezentate în continuare, interacțiunea dintre profilul metalic și betonul înconjurător s-a considerat perfectă, împiedicând astfel deplasările relative dintre cele două componente.

7.2.1 Stâlp cu secțiune mixtă analizat numeric de Chiorean

Principalul scop al prezentului studiu constă în cuantificarea influenței tensiunilor reziduale asupra capacității de rezistență și rigiditate. Studiile numerice sunt efectuate pe un stâlp în consolă având lungimea de 3m, propus de Chiorean în [11].

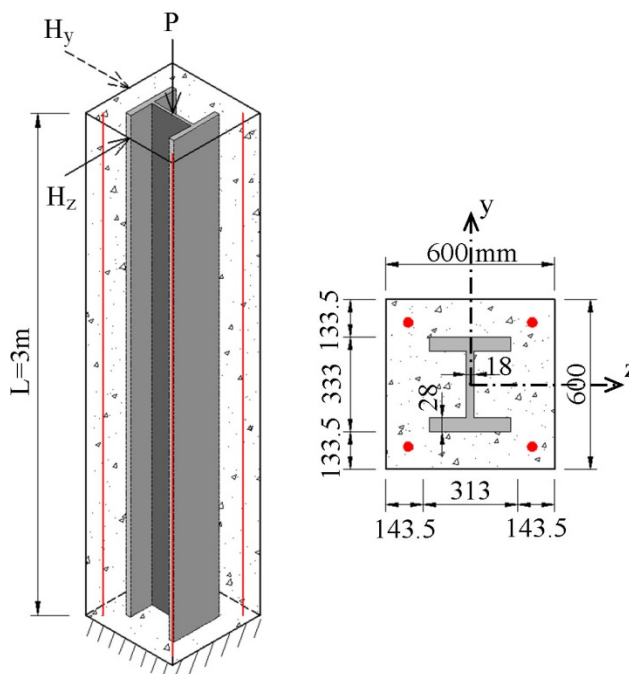


Fig. 7.38 Stâlp cu secțiune mixtă solicitat la încovoiere cu efort axial

Secțiunea stâlpului este pătrată cu latura de 60 cm, având înglobată în volumul de beton un profil metalic W12x120 (v. Fig. 7.38) și patru armături longitudinale de diametru $\Phi=20$ mm. Stâlpul este acționat la capătul liber de o forță axială concentrată aplicată centric și de forță

concentrată laterală aplicată după direcția axei y sau z . Comportarea betonului comprimat s-a idealizat pe baza modelului *Hognestad* [134], rezistența la compresiune considerându-se 20 MPa, iar modulul de elasticitate longitudinal corespunzător, determinat conform codului CEB-FIP [136], este 27088 MPa. Armătura rigidă și cea flexibilă au fost modelate ca materiale cu comportare elastică-perfect plastică, limitele de curgere considerate fiind 300 MPa respectiv 400 MPa. Modulul de elasticitate longitudinal al oțelului s-a considerat 200 GPa.

Testele numerice sunt divizate în două categorii. Prima, cuprinde studii realizate la nivel de secțiune, iar cea de-a doua este dedicată studiilor la nivel de element. În ambele situații accentul este pus pe studiul influenței tensiunilor reziduale asupra capacității de rezistență și rigiditate. Distribuția adoptată pentru tensiunile reziduale este cea propusă de ECCS [152], prezentată în cadrul capitolului 6. Rezultate prezentate la nivel de secțiune sunt obținute pe baza modelului de analiză secțională în situația interacțiunii perfecte dintre beton și oțel, descris în capitolul 5, și sunt publicate în [11]. În ceea ce privește analizele numerice la nivel de element, rezultatele publicate în [11] sunt puse în antiteză cu cele obținute cu programul Abaqus [15], folosind modelul numeric descris în capitolul 6, în vederea testării capacității modelului avansat de a include efectul tensiunilor reziduale.

În Fig. 7.39 sunt prezentate curbele de interacțiune plastică $N-M_y$ și $N-M_z$, cu și fără includerea efectului tensiunilor reziduale, trasate pe baza modelului de analiză secțională descris în capitolul 5. Se poate constata că luarea în considerare a tensiunilor reziduale conduce la diminuarea capacității de rezistență a secțiunilor mixte chiar și pentru valori relativ mici ale efortului axial, acest fenomen fiind mai pronunțat în cazul încovoierii în raport cu axa de inerție minimă. Diferențele maxime sesizate între curbele de interacțiune trasate cu și fără considerarea tensiunilor reziduale sunt de 8%.

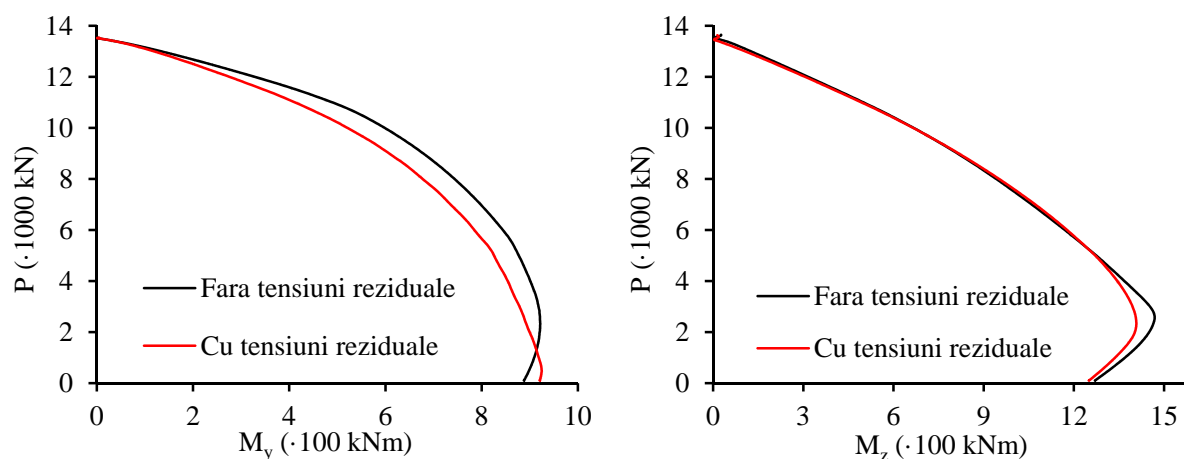


Fig. 7.39 Curbe de interacțiune plastică $N-M_y$ și $N-M_z$

Fig. 7.40 și Fig. 7.41 redau curbele moment încovoietor – curbură respectiv moment încovoietor – rigiditate la încovoiere, în raport cu ambele axe de inerție, pentru diferite valori ale efortului axial. Analizând relațiile moment încovoietor – curbură din Fig. 7.40, se poate observa o reducere a capacității de rezistență în situația în care tensiunile reziduale sunt luate în considerare, efectul fiind mai pregnant când încovoierea se produce în raport cu axa y (direcția slabă), momentul capabil plastic al secțiunii scăzând cu până la 14%. Prezența

tensiunilor reziduale duc și la degradarea rigidității instantanee la încovoiere, așa cum se poate constata în Fig. 7.41.

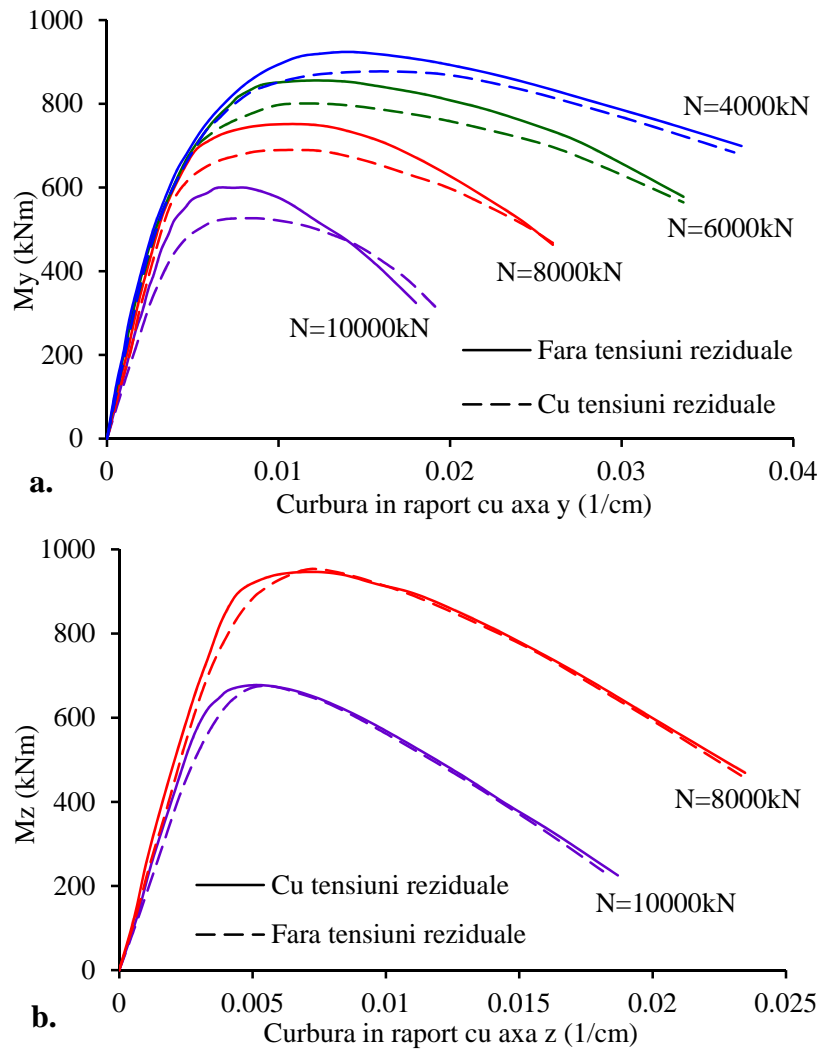
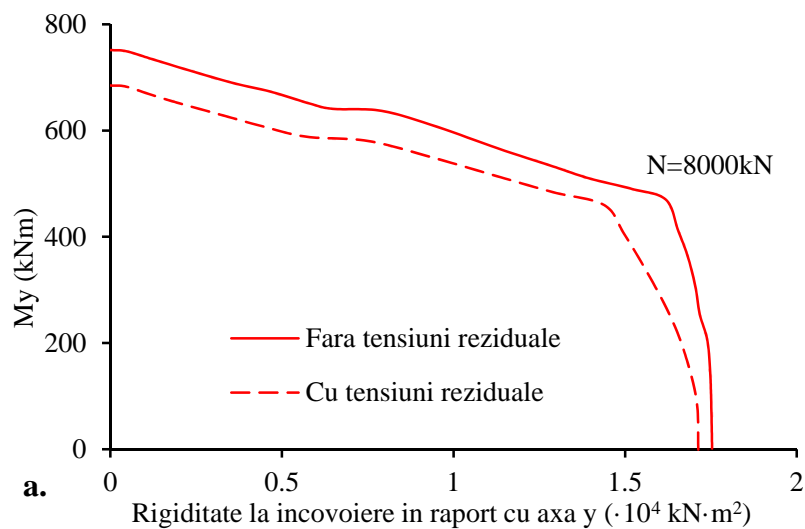


Fig. 7.40 Influența tensiunilor reziduale asupra curbelor moment încovoietor-curbură în raport cu axa: **a.** slabă; **b.** tare



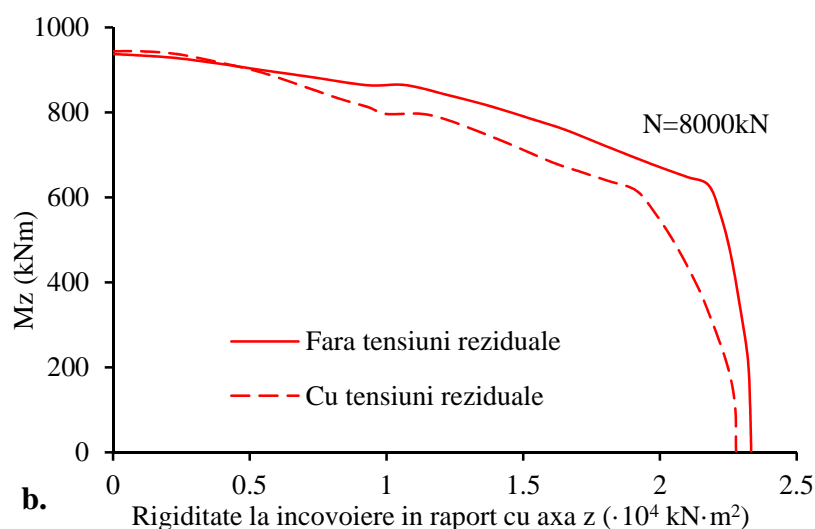


Fig. 7.41 Influența tensiunilor reziduale asupra curbelor moment încovoietor-rigiditate la încovoiere. în raport cu axa: a. slabă; b. tare

În continuare se prezintă principalele rapoarte ale analizelor efectuate la nivel de element. Rezultatele obținute cu modelul avansat de analiză, descris în capitolul 5, sunt comparate cu cele furnizate de programul *Abaqus* [15]. În fiecare dintre cele două modele numerice, încărcarea se realizează în două etape distincte. În prima, se aplică efortul axial considerat, urmând ca în cea de-a doua, să se aplice progresiv încărcarea laterală H_y sau H_z . În cadrul acestui studiu, modelul numeric generat în program *Abaqus* constă într-o combinație de elemente finite tridimensionale și unidimensionale. Prima categorie de elemente este utilizată pentru modelarea volumului de beton și a profilului metalic, iar cea de-a doua categorie este selectată pentru modelarea armăturilor. Forțele concentrate sunt aplicate sistemului structural prin intermediul unor plăcuțe rigide în scopul eliminării concentrărilor de tensiuni ce pot genera probleme de convergență a soluției. Spre deosebire de modelul avansat care permite considerarea variației liniare a tensiunilor reziduale, conform ECCS, în *Abaqus* s-a introdus o variație 'în trepte' deoarece aceste tensiuni inițiale autoechilibrate pot fi introduse doar în nodurile rețelei de discretizare, așa cum s-a precizat în secțiunea dedicată descrierii modelului numeric dezvoltat în pachetul comercial de elemente finite, *Abaqus*.

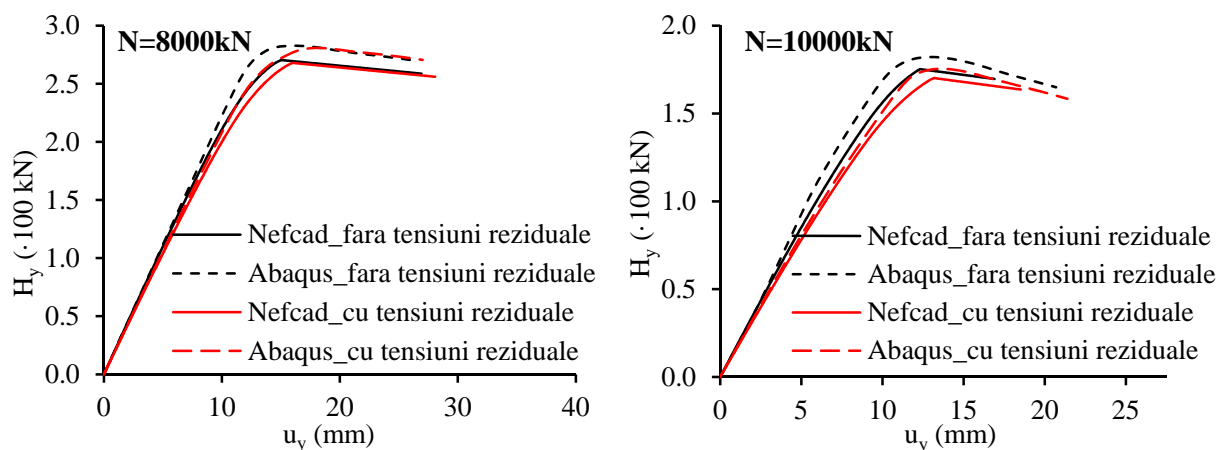


Fig. 7.42 Curbe încărcare laterală – deplasare. Încovoiere în raport cu axa tare de inerție

Fig. 7.42 prezintă variația încărcării laterale H_y (încovoiere după axa tare de inerție) în raport cu deplasarea orizontală corespunzătoare pentru două valori ale efortului axial, $8 \cdot 10^3$ kN respectiv 10^4 kN. Curbele încărcare-deplasare trasate cu modelul propus sunt comparate cu cele obținute cu programul Abaqus. Se poate constata că ambele modele numerice detectează, în prezența tensiunilor reziduale, degradarea rigidității și rezistenței, fenomenul fiind mai pronunțat în cazul efortului axial mai mare. Pentru $N=10^4$ kN, reducerea încărcării ultime manifestată de modelul propus este de 3%, iar de Abaqus de 4%. Se observă deci aproximativ aceeași sensibilitate a ambelor modele numerice la efectul tensiunilor reziduale deși, se pot constata mici diferențe între curbele omoloage trasate cu cele procedee.

Curbele de comportare în situația încovoierii în raport cu axa slabă de inerție sunt prezentate în Fig. 7.43, pentru diferite valori ale efortului axial aplicat. Se observă, că în acest caz efectul tensiunilor reziduale asupra capacității de rezistență și rigiditate este mai pronunțat decât în cazul anterior al încovoierii în raport cu axa tare de inerție a secțiunii. Și de această dată cele două modele numerice manifestă, în termeni generali, aceeași tendință de degradare a caracteristicilor mecanice în prezența tensiunilor reziduale, deși diferențe între curbele corespondente pot fi sesizate. Pentru efortul axial maxim considerat în acest studiu, micșorarea forței laterale capabile detectată de modelul propus este de 16%, acest ecart fiind identic cu cel furnizat de Abaqus. Acest studiu demonstrează necesitatea includerii efectului tensiunilor reziduale în analiza avansată a elementelor cu secțiune mixtă asupra cărora sunt aplicate eforturi axiale considerabile.

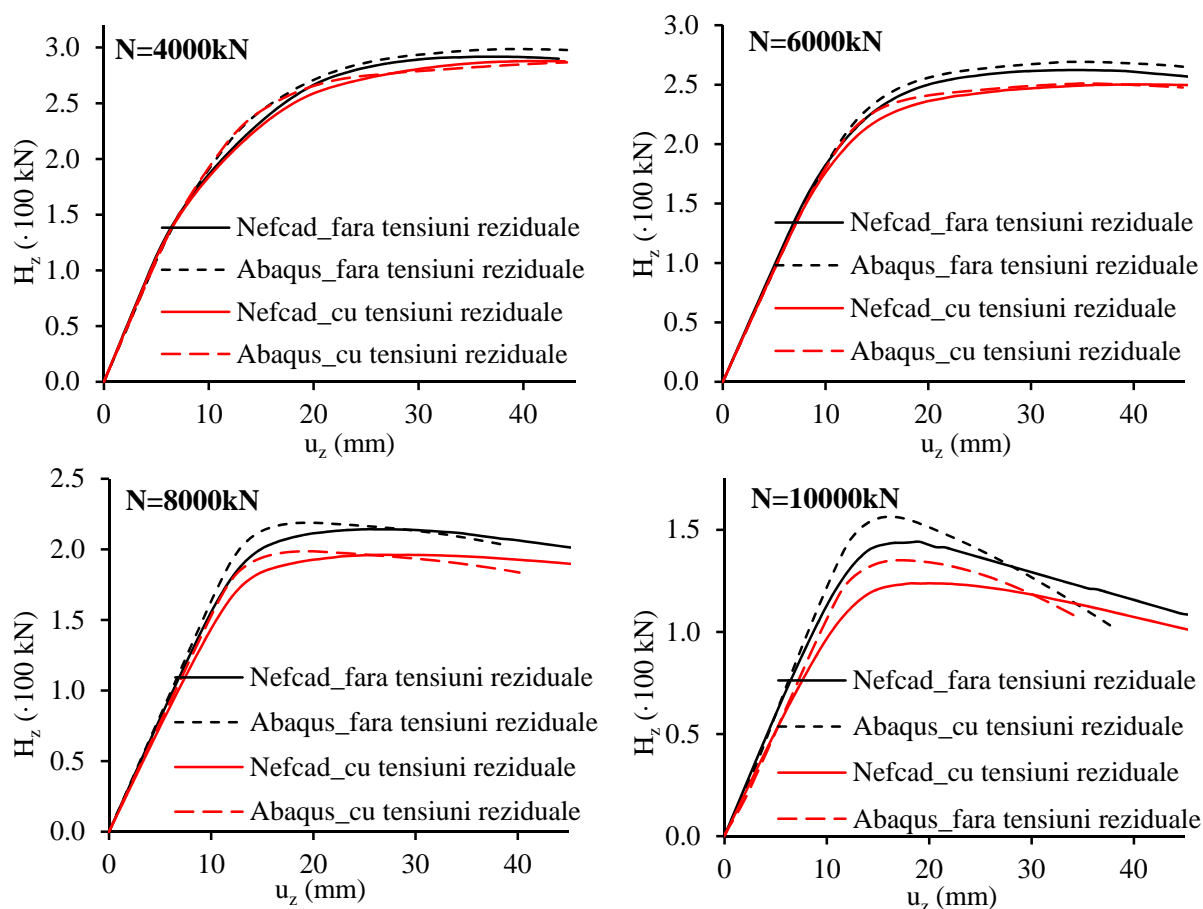


Fig. 7.43 Curbe încărcare laterală – deplasare. Încovoiere în raport cu axa slabă de inerție

7.3 Testări numerice pe cadre mixte oțel-beton

7.3.1 Cadru portal cu stâlpi metalici și grindă mixtă oțel-beton

Cadrul portal prezentat în Fig. 7.44 este alcătuit din doi stâlpi metalici încastrați la bază, având secțiunea transversală W12x50, în timp ce grindă este conformată în variantă mixtă, componenta de beton (102x1219 mm) fiind fixată rigid de cea metalică (W12x27). Acest cadru a fost analizat de Ngo-Hu & Kim [111] folosind un procedeu numeric, bazat pe modelul articulațiilor plastice punctuale, coroborat cu o analiză secțională la nivel de fibră.

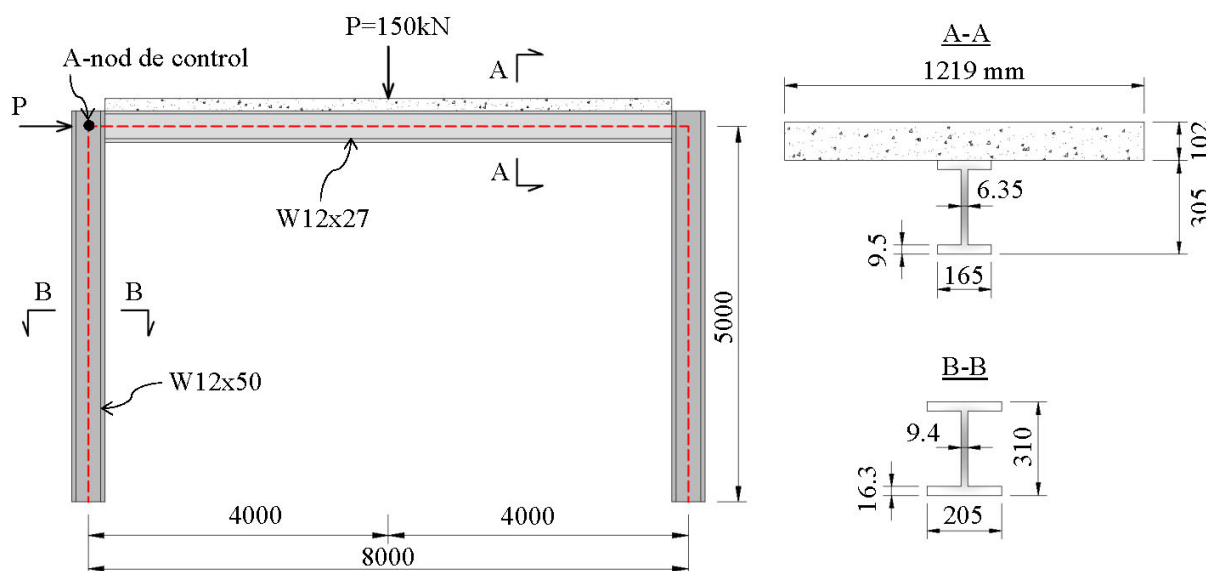


Fig. 7.44 Configurația geometrică a cadrului portal analizat de Ngo-Huu & Kim

Comportarea betonului comprimat, adoptată de autorii menționați anterior, este cea propusă de standardul EC2, pentru porțiunea ascendentă, până la atingerea rezistenței la compresiune $f_c=16$ MPa și a deformației corespunzătoare $\epsilon_{c0}=0.002$, urmată de o comportare ideal-plastică până la atingerea deformației ultime $\epsilon_{cu}=0.00806$. Oțelul structural s-a modelat ca un material elastic – plastic cu reconsolidare, tensiunea de curgere fiind $f_y=252.4$ MPa, modulul de elasticitate inițial $E_s=2 \cdot 10^5$ MPa, iar modulul de elasticitate pe porțiunea de consolidare $E_h=6000$ MPa. Cadrul este supus acțiunii a două forțe concentrate $P=150$ kN, aplicate simultan și monoton crescător. Una dintre ele este aplicată gravitațional la mijlocul deschiderii grinzii mixte, iar cealaltă este aplicată lateral în dreptul nodului grindă-stâlp din partea stângă. Conexiunile grindă-stâlp sunt considerate rigide. Analizele efectuate cu modelul de analiză propus i-au în considerare efectul nodurilor de dimensiuni finite, așa cum s-a descris în capitolul 5. Astfel, extremitățile grinzilor și ale stâlpilor concurente într-un nod, au comportare rigidă pe lungimi egale cu jumătate din dimensiunile reale ale nodului respectiv. În programul Abaqus, comportarea nodurilor grindă-stâlp s-a considerat rigidă, prin modelarea porțiunii teoretice de nod cu elemente finite rigide, indeformabile. În modelul propus, structura s-a discretizat în 3 EF cu 12 GDL, iar în Abaqus s-au folosit 5040 EF de tip shell S4R și 7700 EF tridimensionale C3D8I.

Fig. 7.45 prezintă comparativ variația factorului de încărcare în raport cu deplasarea orizontală a nodului de control. Se poate constata că modelul avansat de analiză, descris în

capitolul 5, trasează cu acuratețe foarte bună curba de comportare a cadrului portal, diferențele înregistrate în ceea ce privește factorul ultim de încărcare fiind de 2.8% față de cel obținut de *Ngo-Huu & Kim* [111] respectiv de 3.5% față de cel furnizat de programul Abaqus.

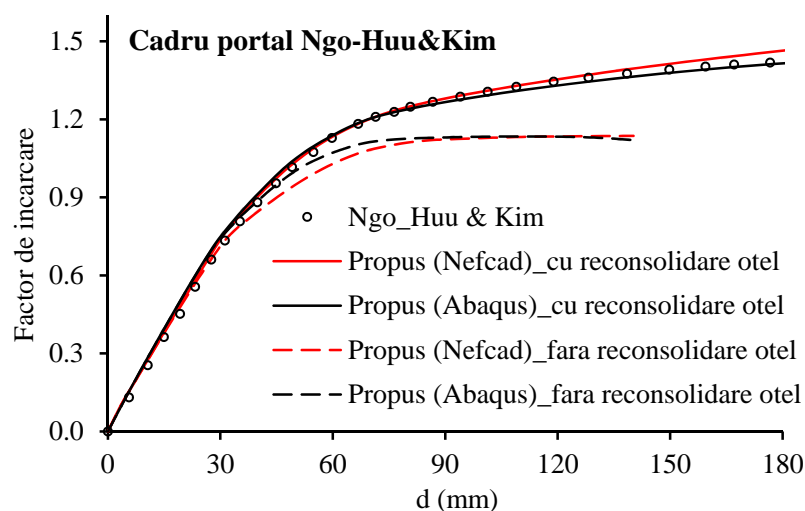


Fig. 7.45 Curbe încărcare – deplasare laterală nod A pentru cadrul portal cu grinda mixtă

În Fig. 7.45 se observă că și rigiditatea sistemului este evaluată cu acuratețe semnificativă. Trebuie sesizat că în cazul neglijării efectului de reconsolidare al oțelului structural, factorul ultim de încărcare este drastic diminuat (cu 29%), curba de comportare trasată cu modulul propus fiind în bună concordanță cu cea obținută cu modelul complex dezvoltat în Abaqus.

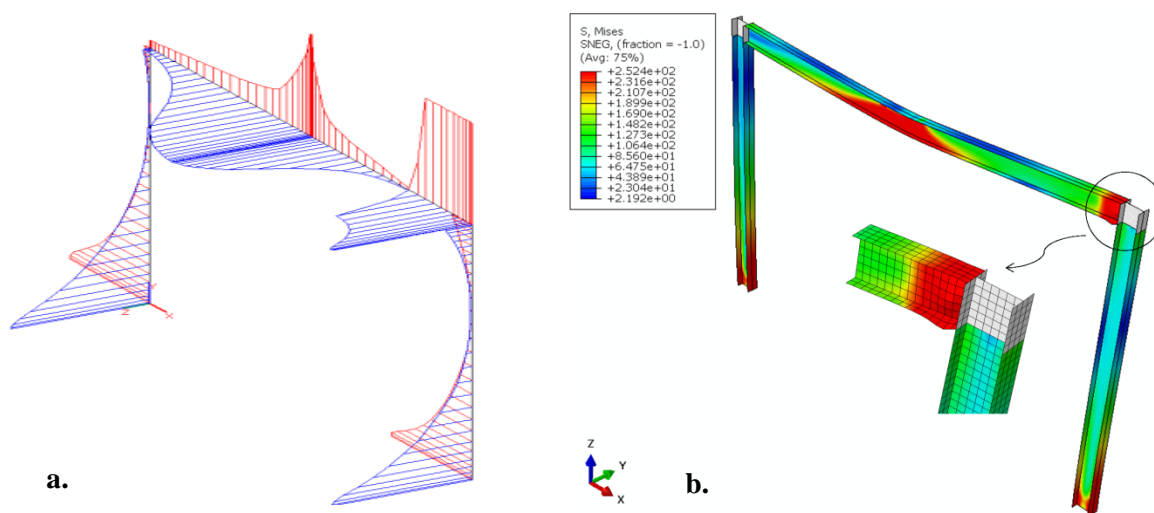


Fig. 7.46 Cadru portal: a. Variația rigidității la încovoiere - Nefcad; b. Variația tensiunilor – Abaqus

Cedarea sistemului survine ca urmare a dezvoltării zonelor plastice la mijlocul deschiderii și la extremitatea dreaptă a grinzii, respectiv la baza stâlpilor. De asemenea, programul Abaqus a detectat fenomenul de flambaj local al inimii și al tălpii inferioare a grinzii în vecinătatea nodului grindă-stâlp din partea dreaptă (Fig. 7.46.b). În Fig. 7.46.a. se prezintă schematic variația degradărilor rigidității la încovoiere în raport cu ambele axe proprii ale elementelor componente. Se poate observă că zonele cele mai afectate sunt cele de la baza

stâlpilor respectiv cele din vecinătatea mijlocului deschiderii și a extremității drepte a grinzii mixte. Comparativ, în Fig. 7.46.b. este expusă variația tensiunilor normale pentru componentele metalice ale cadrului analizat, placa de beton nefiind inclusă în afișaj. Se constată că zonele cu concentrări de tensiuni sunt similare cu cele enumerate anterior. Durata unei analize în programul Abaqus pe un sistem de calcul dotat cu 2 procesoare având frecvența de 2.80 GHz și 8 nuclee fiecare respectiv 48 GB RAM durează în medie 18 min., în timp ce o analiză similară condusă în programul Nefcad pe un sistem inferior din punct de vedere al performanțelor, echipat cu 1 procesor cu 2 nuclee având frecvența de 2.0 GHz respectiv 2 GB RAM se finalizează în 4s.

7.3.2 Cadru plan cu două deschideri și șase niveluri

Cadrul metalic plan cu două deschideri și șase niveluri propus de Vogel [157] și folosit de numeroși cercetători pentru calibrarea metodelor numerice dezvoltate, este preluat și transformat într-un cadru având elemente cu secțiune mixtă în vederea validării modelului propus, prin compararea rezultatelor cu cele obținute folosind programul Abaqus.

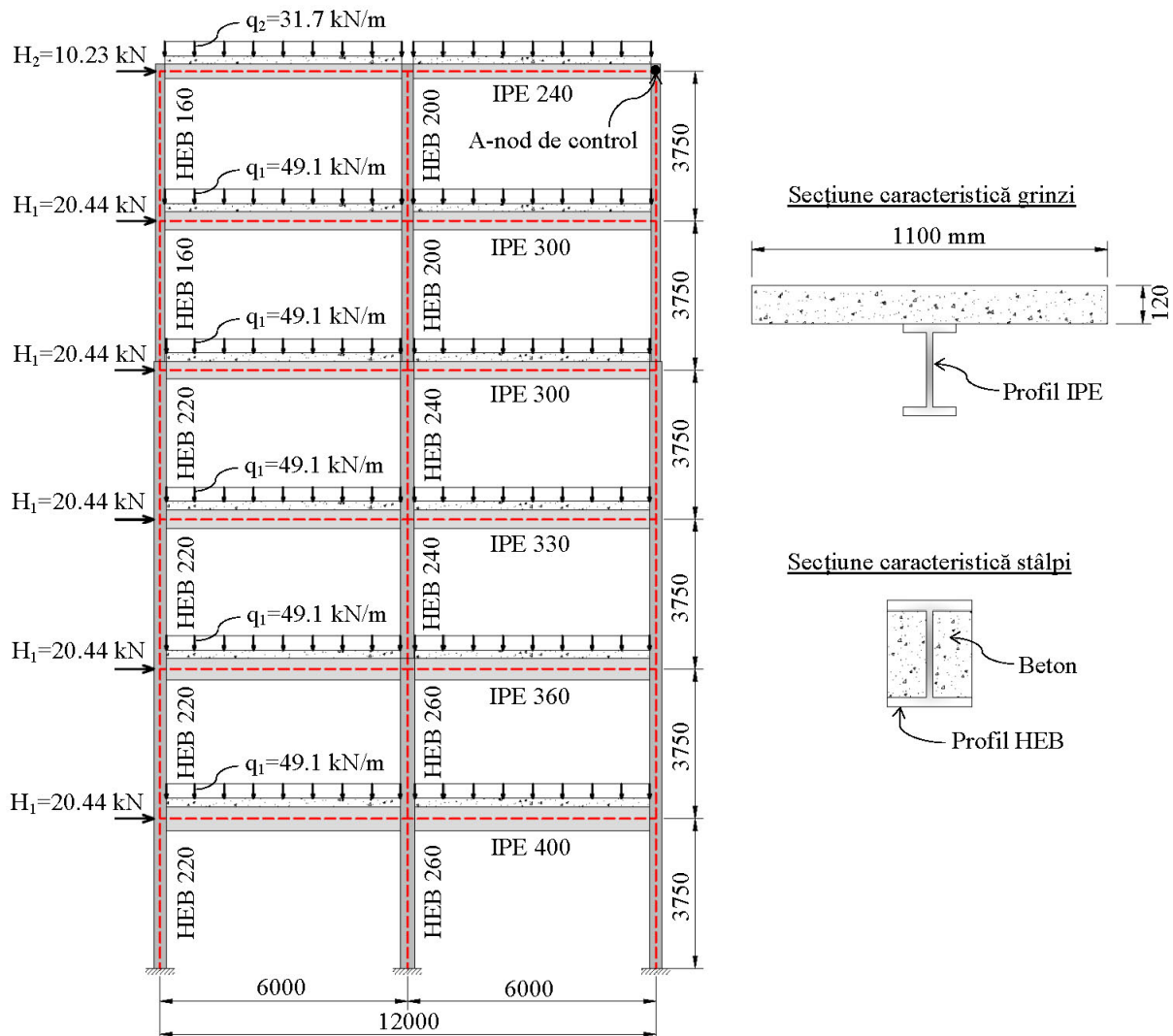


Fig. 7.47 Configurația geometrică a cadrului Vogel

Geometria cadrului și schema de încărcare sunt prezentate în Fig. 7.47. Stâlpii cadrului sunt parțial înglobați în beton, iar grinzile sunt conformate în varianta unei plăci de beton (1100x120 mm) rezemate pe un profil metallic IPE.

Comportarea betonului comprimat s-a idealizat pe baza modelului *Hognestad* [134], rezistența la compresiune considerându-se 16 MPa în grinzi și 26 MPa în stâlpi. Modulul de elasticitate longitudinal corespunzător, determinat conform codului *CEB-FIP* [136], este 25146 MPa respectiv 29564 MPa. Comportarea betonului întins s-a idealizat folosind modelul propus de *Vecchio & Collins* [135], rezistența la întindere a betonului din grinzi fiind de 1.9 MPa, iar a celui din stâlpi 2.6 MPa. Oțelul structural s-a modelat ca material cu comportare elastică-perfect plastică, limita de curgere fiind 235 MPa, iar modulul de elasticitate longitudinal aferent 205 GPa. Imperfecțiunile geometrice inițiale sunt luate în considerare cu factorul 1/450. Cadrul este supus acțiunii unor sarcini gravitaționale uniforme distribuite respectiv acțiunii unor forțe concentrate laterale aplicate în nodurile grindă-stâlp din partea stângă. Trebuie menționat că aplicarea încărcărilor se face simultan. În modelul propus, fiecare bară a structurii este simulată cu un singur EF cu 12 GDL formulat în eforturi, așa cum s-a prezentat în capitolul 5. Nodurile grindă-stâlp au comportare rigidă și se ține cont de dimensiunea finită a nodurilor, în aceeași manieră cu cea descrisă în cadrul exemplului anterior. Modelul numeric creat în programul *Abaqus* [15] constă într-o combinație de EF bidimensionale, folosite pentru modelarea elementelor metalice, și EF tridimensionale utilizate pentru discretizarea volumelor de beton. Pe parcursul acestui exemplu numeric curbele încărcare-deplasarea laterală, vor fi prezentate pentru trei conformări structurale distincte ale cadrului, funcție de tipul secțiunilor selectate pentru grinzi și stâlpi. Astfel, în prima varianta, atât elementele verticale cât și cele orizontale sunt pur metalice, în cea de-a doua grinzile sunt considerate cu secțiune mixtă oțel-beton și stâlpii metalici, iar în cea de-a treia atât grinzile cât și stâlpii sunt alcătuiți în sistem mixt.

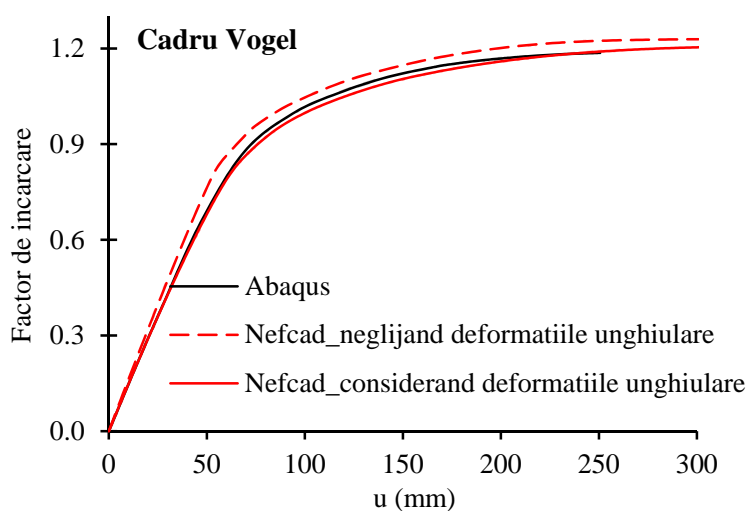


Fig. 7.48 Curbe încărcare-deplasare pentru cadrul metalic Vogel

În Fig. 7.48. sunt trasate curbele încărcare-deplasare laterală a nodului de control pentru cadrul pur metalic Vogel. Rezultatele obținute cu modelul propus sunt redată în două variante - cu și fără considerarea aportului deformațiilor unghiulare. În cazul includerii acestui efect,

Această pagină a fost eliminată din conținutul electronic al acestei lucrări

de comportare a acestora este trasată cu ajutorul relației propuse de *Ollgaard* [37] cu parametrii de formă $\alpha=0.558$ și $\beta=1$ mm⁻¹. Capacitatea portantă a conectorilor s-a calculat conform prescripțiilor EC4 [1] obținându-se $P_{sc}=64.34$ kN. Corespunzător acestei curbe de comportare s-a calculat rigiditatea secantă $K_{50\%}$ a conectorilor rezultând valoarea 94415 N/mm. Gradele de conectare selectate pentru acest studiu sunt prezentate în Tab. 7.12, numărul de conectori aferent fiind determinat urmând prevederile standardului european EC4 [1]. Rigiditatea secantă a conexiunii $k_{50\%}$, gradul de acțiune compozită γ și valoarea funcției de reducere a efortului axial din placa de beton $f(\gamma)$ sunt menționate în Tab. 7.12 pentru fiecare grindă componentă a cadrului.

Tab. 7.12. Caracteristicile conexiunilor pentru gradele de conectare considerate

		Grad de conectare (%)			
		200	100	70	40
Grindă nivel 1	nr. conectori	112	56	40	24
	$k_{50\%}$	1851	910	640	370
	γ	5.947	4.169	3.497	2.659
	$f(\gamma)$	0.781	0.638	0.553	0.417
Grindă nivel 2	nr. conectori	104	52	36	20
	$k_{50\%}$	1717	843	572	303
	γ	6.110	4.28	3.527	2.567
	$f(\gamma)$	0.791	0.650	0.558	0.400
Grindă nivel 3	nr. conectori	88	44	32	20
	$k_{50\%}$	1447	706	505	302
	γ	6.031	4.212	3.562	2.756
	$f(\gamma)$	0.786	0.642	0.562	0.435
Grindă nivel 4, 5	nr. conectori	76	40	28	16
	$k_{50\%}$	1242	640	437	235
	γ	6.000	4.301	3.559	2.610
	$f(\gamma)$	0.784	0.652	0.562	0.408
Grindă nivel 6	nr. conectori	56	28	20	12
	$k_{50\%}$	899	434	300	167
	γ	5.821	4.044	3.360	2.506
	$f(\gamma)$	0.774	0.624	0.534	0.389

Situațiile caracterizate prin valori ale gradului de conectare mai mari sau egale cu 100% ne încadrează în domeniul conectării totale, în timp ce valorile inferioare acestei limite fac obiectul conectării parțiale. Trebuie menționat că fiecare caz de conectare analizat este caracterizat prin interacțiune parțială deoarece sunt permise lunecări relative longitudinale între placa de beton și profilul metalic în lungul interfeței de contact dintre aceste componente.

În Fig. 7.50 se prezintă curbele încărcare-deplasare laterală obținute cu cele două modele numerice pentru gradele de conectare considerate. Suplimentar, pentru evidențierea diferențelor calitative ce apar între curbele trasate în condițiile interacțiunii totale și cele ale conectării totale, graficele din Fig. 7.50 sunt completate cu cele obținute pentru cazul interacțiunii perfecte. Se sesizează cu ușurință capacitatea modelului propus de a detecta cu rigurozitate variația rigidității și a rezistenței odată cu variația gradului de conectare. Totuși, mici diferențe pot fi sesizate între curbele omoloage trasate cu cele două modele numerice, în ceea ce privește factorul maxim de încărcare, diferențele situându-se în limita a 2%.

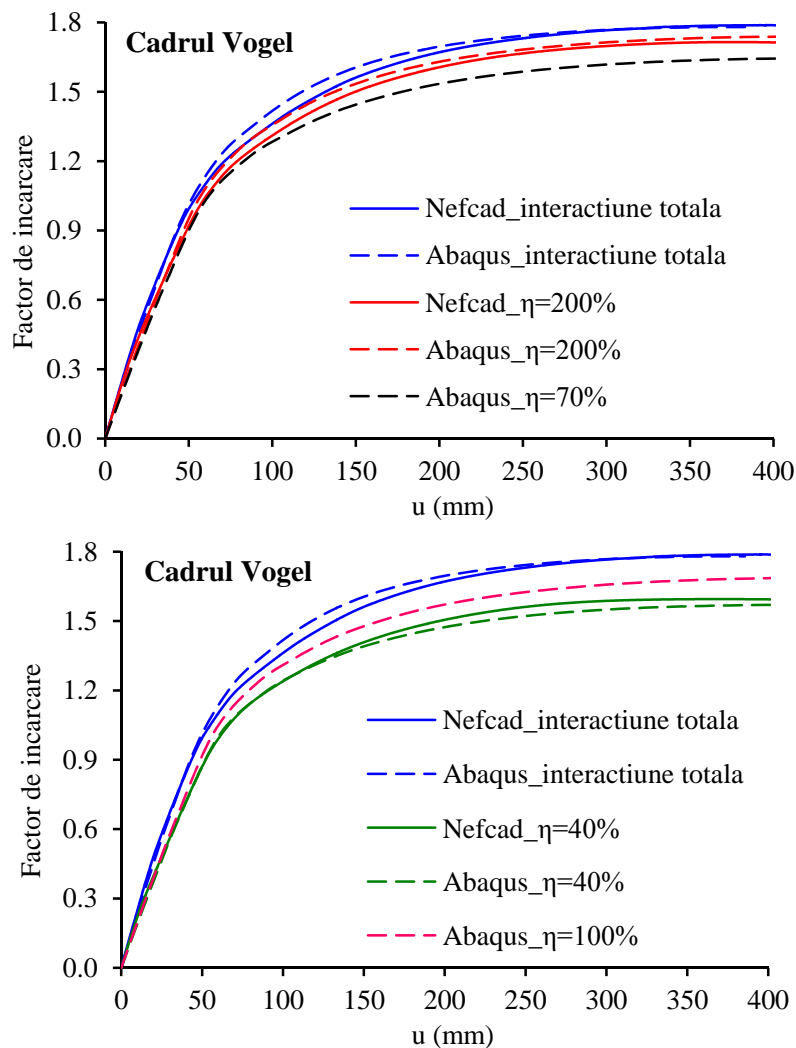


Fig. 7.50. Curbe încărcare-deplasare pentru cadrul Vogel. Influența gradului de conectare.

Raportarea curbelor trasate pentru gradele de conectare 100% și 200% (conectare totală) la cele trasate în condițiile interacțiunii totale scoate în evidență diferența dintre cele două concepte. În cazul conectării totale, se observă atât reducerea rigidității cât și a rezistenței față de situația interacțiunii totale. De exemplu factorul ultim de încărcare pentru gradul de conectare de 100% (conectare totală) este cu aproximativ 6% mai mic decât cel calculat pentru domeniul interacțiunii totale.

7.3.3 Cadru spațial cu două deschideri, două travee și șase niveluri

În cadrul acestui exemplu numeric, cadrul spațial Orbison, deseori folosit ca exemplu de calibrare, este preluat și modificat din varianta clasică de cadru metalic, într-un cadru alcătuit din elemente cu secțiune mixtă oțel-beton, interacțiunea dintre componentele de beton și cele metalice aferente fiind considerată perfectă. Geometria cadrului este prezentată în Fig. 7.51 Stâlpii cadrului sunt parțial înglobați în beton, iar grinzile sunt conformate în varianta unei plăci de beton (1000x125 mm) rezemate pe un profil metalic american W. Comportarea betonului comprimat s-a idealizat pe baza modelului *Hognestad* [134], rezistența la compresiune considerându-se 16 MPa atât în grinzi cât și în stâlpi. Modulul de elasticitate

longitudinal corespunzător, determinat conform codului *CEB-FIP* [136], este 25146 MPa. După atingerea rezistenței la compresiune, comportarea betonului s-a considerat a fi perfect plastică până la atingerea deformației ultime de 0.0035. Oțelul structural s-a modelat ca material cu comportare elastică-perfect plastică, limita de curgere fiind 250 MPa, iar modulul de elasticitate longitudinal aferent 207 GPa. Cadrul este supus acțiunii unor încărcări gravitaționale la nivelul fiecărui nivel, având intensitatea de 9.60 kN/m^2 , aceasta fiind repartizată și aplicată uniform distribuit pe lungimea fiecărei grinzi. Suplimentar, sunt aplicate încărcări concentrate laterale de 53.376 kN în fiecare nod grindă-stâlp al cadrului transversal frontal. Trebuie menționat că aplicarea încărcărilor se face simultan.

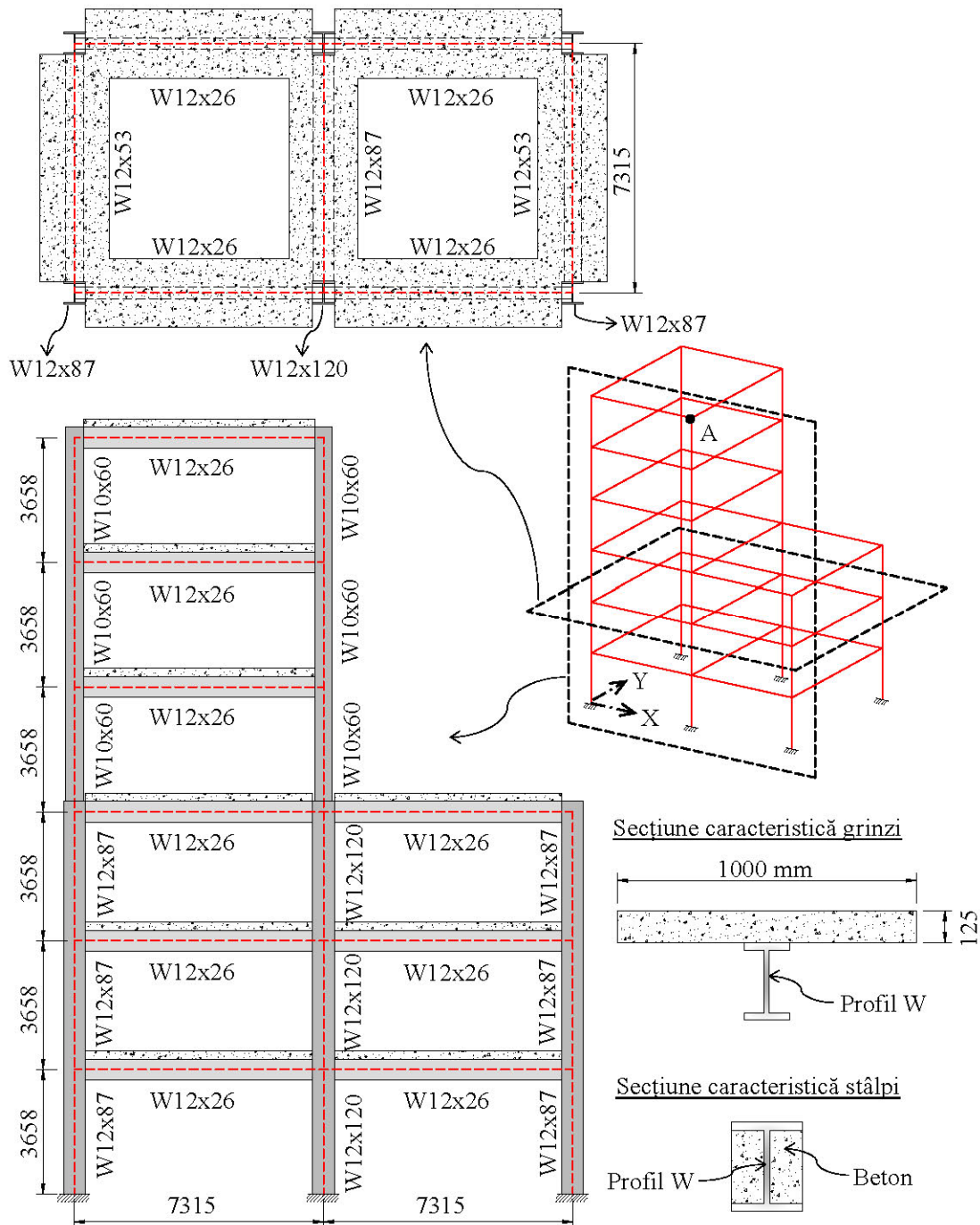


Fig. 7.51 Configurația geometrică a cadrului Orbison

În modelul propus, fiecare bară a structurii este simulată cu un singur EF cu 12 GDL formulat în eforturi, iar nodurile grindă-stâlp au comportare rigidă, ținându-se cont de dimensiunea finită a nodurilor și astfel extremitățile elementelor concurente într-un nod au comportare rigidă pe lungimi egale cu jumătate din dimensiunile reale ale nodului respectiv. Această particularitate de modelare face posibilă compararea rezultatelor cu cele furnizate de programul Abaqus în care modelarea elementelor structurale s-a realizat cu EF bi- și tri-dimensionale. Totuși, pentru completitudine, modelarea cadrului se realizează și în varianta cu noduri rigide punctuale, iar rezultatele obținute sunt comparate cu altele similare preluate din literatura de specialitate pentru cadrul cu grinzi și stâlpi micști. Pentru evidențierea aportului de rigiditate și rezistență în cazul alcătuirii cadrului din elemente cu secțiune mixtă, se pun în antiteză și rezultatele obținute pe cadrul complet metalic respectiv pe cadrul cu stâlpi metalici și grinzi mixte.

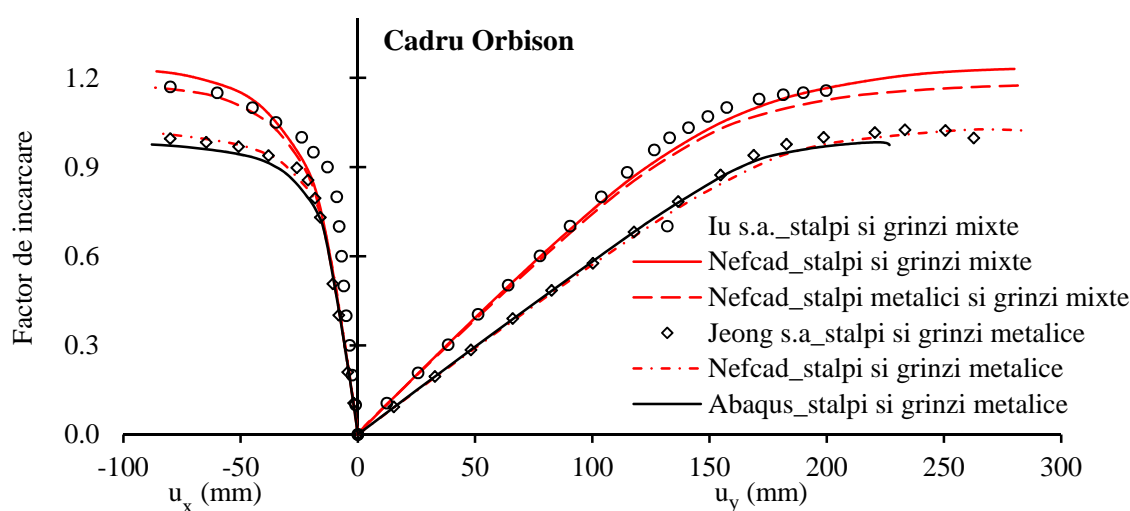


Fig. 7.52 Curbe încărcare-deplasare pentru cadrul Orbison - noduri grindă-stâlp punctuale

În Fig. 7.52 se prezintă curbele încărcare - deplasare nod A, trasate în situația neglijării dimensiunilor nodurilor, astfel conexiunile grindă-stâlp fiind considerate punctuale și rigide. Rezultatele sunt redată pentru trei conformări ale elementelor cadrului: stâlpi și grinzi metalice, stâlpi metalici și grinzi mixte respectiv stâlpi și grinzi mixte. Curbele trasate pentru prima variantă sunt comparate cu cele obținute de *Jiang ș.a.* [158] folosind un model numeric bazat pe metoda elementelor finite, în cadrul căruia analiza secțională se efectuează la nivel de fibră. O bună corelare poate fi observată între curbele corespondente trasate cu cele două modele, atât în termeni de rezistență cât și în termeni de rigiditate. De asemenea, rezultatele sunt asemănătoare cu cele trasate cu Abaqus, diferența în ceea ce privește factorul de încărcare maxim fiind de 4%. Modelul numeric dezvoltat în Abaqus s-a discretizat în EF unidimensionale de tip B31 formulate în teoria Timoshenko. Rezultatele obținute pentru cadrul alcătuit în totalitate din elemente cu secțiune mixtă sunt comparate cu cele publicate de *Iu ș.a.* [12], obținute cu un procedeu numeric ce are la baza modelul articulațiilor plastice punctuale cu formare graduală. Se constată o bună corelare a curbelor trasate cu cele două modele numerice, factorul de încărcare calculat de modelul propus fiind cu 4% mai mare decât cel determinat de *Iu ș.a.* [12]. Mai mult, modelul propus de *Iu ș.a.* [12] manifestă rigiditate sporită, în special pe direcția axei X. Pentru evidențierea aportului de rigiditate și

rezistență generat de utilizarea stâlpilor având secțiune mixtă, în varianta înglobării parțiale a profilului metalic în volumul de beton, graficul este completat cu curbele de comportare ale cadrului în configurația stâlpi metalici și grinzi compozite oțel-beton, diminuarea înregistrată în ceea ce privește factorul de încărcare fiind de 4%.

În vederea testării eficienței și acurateței modelului propus, se analizează cadrul în varianta considerării dimensiunii nodurilor, această particularizare de modelare făcând posibilă compararea rezultatelor cu cele obținute cu modelul numeric dezvoltat în *Abaqus* [15]. Consecințele modelării explicite a dimensiunii nodurilor, prin considerarea de porțiuni cu rigiditate infinită la capetele elementelor structurale, sunt evidențiate în *Fig. 7.53*. Se constată că dimensiunea nodurilor joacă un rol important atât asupra capacității de rezistență cât, mai ales, asupra rigidității sistemului structural, indiferent de varianta de conformare a secțiunilor elementelor cadrului. Acest studiu evidențiază importanța includerii dimensiunii finite a nodurilor în analiza avansată a cadrelor, acestea influențând substanțial comportarea de ansamblu a acestor sisteme structurale.

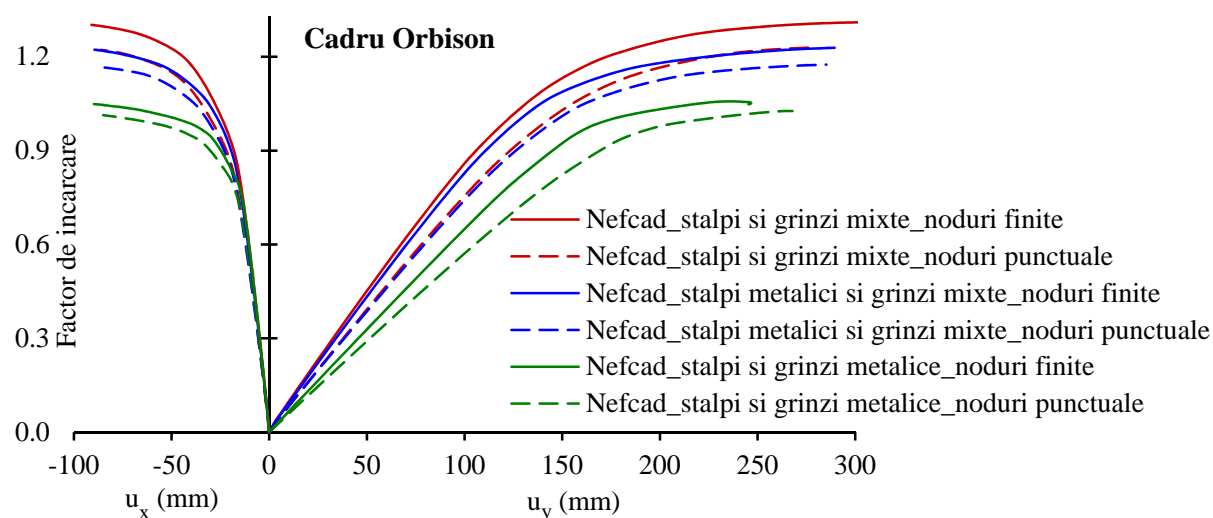


Fig. 7.53. Influența dimensiunii nodurilor asupra curbelor încărcare-deplasare

În continuare se compară rezultatele obținute cu modelul propus, considerând dimensiunea finită a nodurilor, cu cele furnizate de modelul complex dezvoltat în *Abaqus* [15], în cadrul căruia componentele metalice au fost modelate cu EF de tip *shell* (capabile să includă efectul deformațiilor unghiulare), iar volumele de beton s-au discretizat în EF tridimensionale. Interacțiunea beton-oțel s-a modelat folosind opțiunea **Tie*, astfel orice deplasare relativă între cele două componente fiind împiedicată. În cazul modelului cu stâlpi micști, răspunsul furnizat de *Abaqus* este ușor supraestimat deoarece aportul betonului dislocuit de profilele metalice nu este exclus din analiză. Nodurile grindă-stâlp s-au considerat cu rigiditate infinită. Analizând graficele de răspuns din *Fig. 7.54* se constată că modelul propus surprinde cu acuratețe însemnată răspunsul la nivel de structură al cadrului Orbison, atât în termeni de rigiditate cât și în termeni de rezistență, diferențele înregistrate în valoarea factorului maxim de încărcare fiind de cel mult 3%. Pe direcția axei X, se observă că modelul propus manifestă rigiditate laterală ușor inferioară celei manifestate de *Abaqus*. Durata unei analize avansate, folosind un singur EF cu 5 puncte de integrare pentru fiecare bară componentă a structurii,

este de aproximativ 20 s pe un sistem de calcul dotat cu un procesor cu frecvența de 2 GHz și memorie internă de 2 GB RAM. Analiza cadrului mixt cu programul Abaqus, pe un sistem de calcul paralel alcătuit din șase unități având câte 2 procesoare (2.80 GHz și 8 nuclee) și 23.4 GB RAM, durează aproximativ 3 h, numărul de EF depășind 450000. Toate acestea demonstrează eficiența metodei de calcul, predicția rezultatelor realizându-se în timpi de calcul net inferiori față de cei necesari programului Abaqus, acuratețea rezultatelor neavând de suferit.

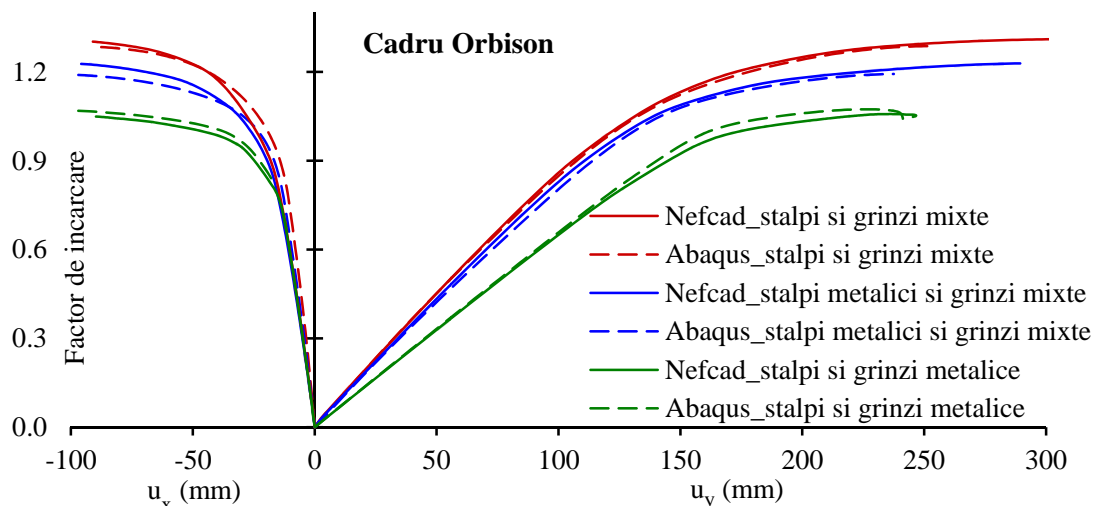


Fig. 7.54. Curbe încărcare-deplasare pentru cadrul Orbison. Nefcad vs. Abaqus

Trebuie menționat că o parte din rezultatele discutate în cadrul acestui capitol de validarea a modelului de analiză propus, se regăsesc și în alte materiale aflate în curs de recenzie și de publicare [159–161].

7.4 Concluzii parțiale

Acest capitol prezintă o sinteză a principalelor studii elaborate pentru validarea modelului de calcul propus și totodată pentru relevarea anumitor caracteristici și particularități de comportare a structurilor compozite oțel-beton. Studiile numerice au fost conduse cu programul de calcul elaborat în baza metodologiei descrise în capitolele precedente, și implementat în aplicația *Nefcad* [11], specializată pe analiza neliniară a structurilor, precum și în baza unui model de calcul avansat dezvoltat în aplicația *Abaqus* [15]. Simulările numerice s-au concentrat în primul rând pe analiza neliniară a grinzilor compozite oțel-beton cu considerarea conectării parțiale. În acest sens au fost conduse o serie de analize pe structuri standard de calibrare analizate experimental și numeric, a căror rezultate sunt disponibile în literatura de specialitate. Au fost selectate grinzi testate experimental în cadrul a patru programe experimentale distincte conduse de către *Aribert ș.a.* [155], *Chapman & Balakrishnan* [17], *Ansourian* [25] respectiv *Fabroccino & Pecce* [30]. Alegerea acestor tipuri de structuri, cu grad mic de nedeterminare statică, se justifică și de faptul că acestea sunt foarte sensibile la efectele acțiunii compozite precum și la efectele plastificării graduale, la nivel de secțiune respectiv în lungul elementului. Performanțele modelului de calcul propus au fost testate prin simulări numerice și asupra unor elemente de tip stâlp (pentru evidențierea efectului tensiunilor reziduale) precum și pe structuri cu grad mare de

nedeterminare statică (structuri în cadre plane și spațiale) a căror comportare neliniară este dominată de ambele surse principale de neliniaritate, fizică și geometrică. Validarea modelului de calcul propus s-a efectuat atât prin comparații cu rezultate din literatura de specialitate cât și prin comparații cu propriul model de analiză avansată dezvoltat în aplicația Abaqus, acest model fiind aplicat de asemenea și pentru relevarea anumitor aspecte cu privire la comportarea neliniară de detaliu a structurilor testate. În urma acestui studiu putem formula următoarele observații cu privire la performanțele modelului de calcul elaborat respectiv cu privire la comportarea structurilor compozite otel-beton.

a. *Cu privire la acuratețea și eficiența computațională a modelului de calcul propus:*

- Modelul propus este capabil să surprindă cu acuratețe sporită efectul combinat al acțiunii compozite parțiale (conectare și interacțiune parțială) și cel al plastificării distribuite prin modelarea inelasticității la nivel de fibră înglobând în analiza secțională comportarea elasto-plastică a tuturor componentelor constitutive ale secțiunii: dala de beton, profilul metalic, conectorii și armaturile;
- Modelul propus pentru analiza secțională permite efectuarea unor studii avansate capabile să releve anumite particularități de comportare și să deoaieze factorii dominanți ce guvernează răspunsul elasto-plastic al secțiunilor compozite cu conectare parțială oferind astfel indicatori cantitativi și calitativi asupra influenței diferitelor variabile asupra răspunsului secțional. Studiile parametrice și de sensibilitate conduse au urmărit cuantificarea influenței unor efecte specifice precum: conectarea parțială prin considerarea diferitelor grade de conectare, influența curbilor de comportare a conectorilor, forma secțională a grinzilor prin considerarea diferitelor dimensiuni ale dalei de beton și a profilului metalic, forma și parametrii fizico-mecanici și de rezistență în definirea relațiilor constitutive pentru beton și otel, variații distincte ale limitei de curgere în tâlpile și înima profilului metalic, variația deformației specifice asociate inițierii reconsolidării oțelului, variații ale rezistenței la compresiune ale dalei de beton, influența considerării aportului betonului întins, considerarea secțiunilor solicitate atât la moment încovoiator pozitiv cât și la moment încovoiator negativ, efectul tensiunilor reziduale asociate profilului metalic;
- Prin definirea unui modul de rigiditate transversal echivalent pentru secțiunile de grinzi compozite cu conectare parțială, modelul poate surprinde efectul deformațiilor unghiulare asupra capacității de deformabilitate și de rezistență a grinzilor compozite otel-beton. Studiile comparative conduse în acest capitol atât pe grinzi simplu rezemate cât și pe grinzi continue demonstrează eficiența modelului propus;
- Studiile întreprinse prin analiza grinzilor compozite cu conectare parțială (simplu rezemate și continue) certifică faptul că modelul de calcul propus este capabil să surprindă comportarea neliniară globală a acestora prin utilizarea unui singur element finit per bară. Suplimentarea numărului de elemente finite utilizate pentru modelarea fiecărei bare este impusă doar din condiții de rezemare sau încărcare concentrată, situații în care sunt necesare noduri interioare pentru simularea acestor condiții. Răspunsul acestor tipuri de structuri în spațiul Forța-deplasare și Moment încovoiator-curbură sunt în bună concordanță cu rezultatele furnizate de testele experimentale și cele obținute cu ajutorul modelului avansat de analiza generat în aplicația *Abaqus* [15];

- Efectul combinat al neliniarității geometrice (locale și globale) și al neliniarității fizice (plastificare distribuită) este surprins de modelul propus folosind un singur element cu două noduri pentru modelarea fiecărei bare componente a structurilor analizate, rezultatele obținute fiind comparabile cu cele furnizate de modele de calcul bazate pe metoda elementului finit, înzestrate cu modele constitutive avansate, dar care necesită o discretizare și un număr de parametri mult superior modelului propus. Studiile au fost conduse atât pe structuri cu un grad mic de nedeterminare statică (stâlpi individuali și cadre portal) cât și pe structuri în cadre plane și spațiale de mari dimensiuni, a căror răspuns este dominat de ambele surse de neliniaritate. Prin intermediul acestor studii se certifică, de asemenea, eficiența computațională a modelului și programului de calcul elaborat, timpul de calcul, simplitatea în modelarea structurală, iar aceste aspecte coroborate cu acuratețea rezultatelor furnizate precum și a datelor privind evoluția stării de solicitare (eforturi, deplasări, apariția și extinderea zonelor plastice până la apariția mecanismului de cedare, factori de încărcare limită) conferă o valoare deosebită acestui model făcându-l competitiv cu alte modele și programe de calcul ce vizează analiza avansată a structurilor în cadre compozite oțel-beton;

b. Cu privire la răspunsul neliniar al grinzilor și cadrelor compozite oțel-beton

- Studiile numerice conduse atât în modelul de calcul propus cât și în cel dezvoltat în aplicația Abaqus, pe o serie de grinzi mixte, relevă faptul că efectul interacțiunii parțiale asupra răspunsului structural este prezent indiferent de nivelul de conectare (teoretic) asumat. Astfel alunecări relative (interacțiune parțială) între placa de beton și grinda metalică sunt înregistrate chiar și în cazul dispunerii unui număr de conectori mai mare decât cel necesar asigurării conectării totale, datorită rigidității finite a conectorilor folosiți. Pe baza acestei observații se poate remarca diferența între interacțiune totală și conectare totală. Desigur, pentru grade de conectare mai mari de 100%, majorarea numărului de conectori nu produce un spor semnificativ asupra capacității de deformabilitate și de rezistență. De exemplu în cazul grinzii simplu rezemate E1, crescând numărul de conectori cu aprox. 35%, de la 68 ($\eta=100\%$) la 92 ($\eta=136\%$), se înregistrează o creștere a încărcării capabile cu doar 7%, iar aportul de rigiditate este chiar mai redus. Pe de altă parte, rigiditatea inițială a grinzilor, dar mai cu seamă capacitatea de rezistență este vizibil afectată odată cu scăderea numărului de conectori sub pragul celor necesari asigurării conectării totale. Astfel, pentru aceeași grinda E1, micșorând numărul de conectori cu aprox. 41%, de la 68 ($\eta=100\%$) la 48 ($\eta=71\%$) se înregistrează o scădere a încărcării capabile cu cca. 13%. Aceste observații calitative sunt observate atât în cazul încărcării cu sarcini distribuite la mijlocul deschiderii cât și în cazul aplicării de sarcini uniforme distribuite pe lungimea grinzii;
- Studiile parametrice și de sensibilitate conduse la nivel de element, pe baza modelului dezvoltat în Abaqus, relevă faptul că influența cea mai pronunțată asupra curbei de răspuns (a grinzii E1) o are calitatea oțelului din tăpile profilului, printre parametri variați numărându-se și calitatea oțelului din inima profilului respectiv rezistența la compresiune a betonului. Această concluzie s-a trasat și la nivel de secțiune, în baza

studiilor parametrice conduse cu modelul propus;

- Studiile numerice efectuate relevă influența deformațiilor unghiulare asupra rigidității sistemelor structurale analizate. Dacă în modelul complex generat în aplicația Abaqus, acest efect este luat în considerare implicit prin modelarea profilului metalic cu elemente finite bidimensionale formulate în teoria Mindlin-Reissner și a dalei de beton cu elemente finite tridimensionale, în modelul propus se ține seama de acest efect într-un mod pragmatic, prin intermediul unei rigidități echivalente la forfecare a cărei valoare include și aportul betonului, acesta fiind deseori neglijat în modelele numerice regăsite în literatura de specialitate. Sensibilitate la acest efect, prezintă atât grinzile simplu rezemate cât și cele continue. Trebuie menționat că în cazul grinzilor continue, modelul propus furnizează rezultate cu acuratețe ridicată în situația în care pe porțiunile adiacente reazemului interior (zone supuse la încovoiere negativă – betonul este întins), în valoarea rigidității echivalente la forfecare nu se include aportul betonului;
- Studiul influenței tensiunilor reziduale asupra răspunsului unei secțiuni tipice de grindă mixtă (efort axial exterior nul), evidențiază faptul că răspunsul *Moment încovoiator-curbură* nu este sensibil la acest efect, însă acesta contribuie semnificativ la degradarea rigidității la încovoiere secționale, deoarece intrarea în curgere respectiv inițierea reconsolidării sunt manifestate, în acest caz, mai devreme decât în cazul contrar al neglijării acestor imperfecțiuni mecanice inițiale. Deși, în literatura de specialitate acest efect este studiat cu preponderență doar în cazul stâlpilor supuși acțiunii unor eforturi axiale considerabile, acesta trebuie considerat și în cazul grinzilor mixte cu interacțiune parțială deoarece pentru valori mari ale gradului de conectare, în grinda metalică se dezvoltă eforturi axiale interioare semnificative;
- Studiile numerice conduse asupra unui stâlp cu secțiune mixtă (profil metalic complet înglobat în beton), încastrat în bază și supus acțiunii a două forțe concentrate, una aplicată axial, iar cealaltă lateral, scot în evidență efectul tensiunilor reziduale asupra capacității de rezistență și de rigiditate a elementului studiat. Efectul este mai pronunțat în cazul aplicării forței laterale în direcție paralelă cu tălpile profilului metalic (încovoiere în raport cu axa de inerție slabă), în prezența unor eforturi axiale mari înregistrându-se diminuări ale încărcării laterale capabile de până la 16%;
- Studiile numeric efectuate asupra cadrelor mixte scot în evidență în primul rând importanța considerării dimensiunii finite a nodurilor grindă-stâlp, această particularitate de modelare având efect direct atât asupra capacității de rezistență a structurilor analizate cât mai ales asupra rigidității acestora. De asemenea trebuie observat aportul, în termeni de capacitate portantă și rezistență, adus de considerarea succesivă a grinzilor cu secțiune mixtă și a stâlpilor micști, față de cazurile analoage în care elementele cadrelor sunt pur metalice. Influența nivelului de conectare asupra răspunsului structural de ansamblu s-a studiat asupra cadrului plan cu șase niveluri, pe de-o parte constatându-se și în acest caz diferența între conceptul de interacțiune totală și cel de conectare totală, iar pe de altă parte, raportându-ne la comportarea manifestată de grinzi la variația gradului de conectare, se observă o sensibilitate mai puțin pronunțată a curbelor de răspuns la variația aceluiași parametru.

8 Considerații finale

8.1 Concluzii

Studiile întreprinse în cadrul prezentei lucrări se încadrează în preocupările actuale de cercetare științifică în domeniul analizei și proiectării structurilor alcătuite din elemente cu secțiune mixtă oțel-beton. Filosofia de calcul a acestor tipuri de structuri, adoptată de principalele standarde de proiectare în vigoare, are la bază metoda stărilor limită, asociată cu diverse modele de analiză statică globală: liniar elastică, rigid plastică și neliniară. Analiza și proiectarea elementelor mixte trebuie să includă, în mod direct sau indirect, influența principalilor factori ce domină comportarea de ansamblu a acestora, printre care se regăsesc neliniaritățile fizice și geometrice, imperfecțiunile inițiale mecanice și geometrice, și în cazul grinzilor cu secțiune mixtă, trebuie să se țină seama și de efectele conectării parțiale dintre profilul metalic și placa de beton. Analizele globale de tipul celor liniar elastice și rigid plastice nu sunt capabile să includă explicit totalitatea efectelor enumerate anterior, urmând ca acestea să fie luate în considerare, în mod conservativ, pe parcursul procesului de verificare individuală a fiecărui element, prin intermediul unor relații de interacțiune, factori de reducere și/sau prin aplicarea unor încărcări orizontale echivalente (pentru considerarea imperfecțiunilor geometrice inițiale). În acest context, în literatura de specialitate se înregistrează preocupări majore asupra dezvoltării de modele de analiză avansată, grefate pe metoda stărilor limită, capabile să includă într-un mod cât mai riguros majoritatea factorilor care influențează rezistența, rigiditatea și stabilitatea globală a structurilor, verificarea individuală a fiecărei bare a structurii nemaifiind necesară. Aceste demersuri sunt încurajate pe de-o parte de precizările consemnate în majoritatea codurilor de proiectare referitoare la eliminarea verificării individuale a stabilității elementelor în cazul includerii efectelor de ordinul doi în calculul global al structurii, iar pe de altă parte de dezvoltarea continuă a tehnologiei și puterii de calcul. În acest context, asupra analizei avansate a structurilor în cadre metalice, sunt consemnate contribuții importante în literatura de specialitate, printre alții de *Chen & Toma* [6], *Kim & Chen* [7], *Chiorean* [8,9], metoda fiind chiar aplicată în procesul de proiectare în țări avansate tehnologic. Eforturi substanțiale sunt înregistrate în ultima perioadă asupra dezvoltării metodelor de analiză avansate dedicate structurilor mixte oțel-beton (*Liew ș.a.* [10], *Chiorean* [11], *Iu ș.a.* [12]). Pentru aceste tipuri de structuri, suplimentar efectelor ce trebuie luate în considerare în studiul structurilor metalice, o atenție deosebită trebuie acordată neliniarității fizice manifestate de beton și conexiunii dintre componenta de beton și cea metalică (în cazul grinzilor mixte), acest ultim factor fiind inclus, după cunoștințele noastre, doar aproximativ în formulările curente ale elementelor finite dedicate analizei avansate a structurilor în cadre mixte. Obiectivul fundamental al acestei lucrări constă în dezvoltarea și perfecționarea modelelor de analiză statică avansată a structurilor mixte oțel-beton, având impact direct asupra activității de proiectare a structurilor. Bine-nțeles, această problematică generează o serie de obiective principale ale cercetării, al căror conținut este prezentat în continuare.

Capitolul 2 – Stadiul actual al cercetărilor în domeniu – scoate în evidență pe de-o parte actualitatea temei, iar pe de altă parte interesul manifestat de comunitatea științifică pentru dezvoltarea de modele numerice care să țină cont de factorii determinanți ai răspunsului structural al elementelor mixte. Majoritatea modelelor propuse sunt fundamentate pe metoda

elementelor finite formulate în deplasări, în eforturi sau cu formulare mixtă, în cadrul cărora, pentru atingerea unui nivel de acuratețe ridicat, se impune de regulă (în cazul formulării în deplasări) utilizarea unei rețele fine de discretizare conducând astfel implicit la timp însemnați de execuție. Un alt aspect care conduce la majorarea dimensiunilor problemelor studiate, constă în modelarea separată a celor două componente principale ale grinzilor mixte și introducerea de legături suplimentare între acestea pentru considerarea efectului conectării parțiale. Această abordare se depărtează de caracteristica esențială a analizelor avansate de a utiliza un singur element pentru simularea fiecărei bare independente a structurii și, suplimentar induce complicații în integrarea efectelor conexiunilor semirigide de prindere a barelor în noduri. De asemenea, includerea efectului deformațiilor unghiulare asupra capacității de rezistență și rigiditate a grinzilor mixte reprezintă o altă preocupare actuală a studiilor din domeniu, în general acest efect fiind inclus fie prin intermediul ecuațiilor diferențiale de echilibru și compatibilitate aferente domeniului elastic de comportare (în expresia cărora sunt considerate rotiri diferențiate în cele două componente) fie prin teoria Timoshenko adoptată în formularea elementelor finite utilizate. Comportarea elasto-plastică este surprinsă în general prin două categorii de modele, primele bazate pe conceptul de articulație plastică punctuală (plastificare concentrată), iar celelalte pe conceptul de zone plastice (plastificare distribuită). Studiul cercetărilor în domeniu a relevat de asemenea că imperfecțiunile geometrice și mecanice inițiale (de tipul tensiunilor reziduale) sunt aspecte rar tratate. Cu toate acestea, în pofida diversității de modele numerice propuse, se poate concluziona că anumite aspecte specifice comportării neliniare ale acestor tipuri de structuri nu sunt complet soluționate, referindu-ne aici în primul rând la lipsa unui model eficient din punct de vedere computațional, dar consistent în același timp, care să permită abordarea structurilor compozite reale, de mari dimensiuni, și totodată capabil să surprindă concomitent efectele acțiunii compozite parțiale, efectele locale ale neliniarității geometrice, comportarea neliniară complexă la nivelul interfetei de contact dintre dala de beton și profilul metalic (în cazul grinzilor compozite), includerea efectelor deformațiilor unghiulare, considerarea cu acuratețe ridicată a formei geometrice secționale precum și a comportării neliniare a conexiunilor semirigide de prindere a barelor în noduri.

Preluarea și prezentarea în cadrul *Capitolului 3*, a prescripțiilor furnizate de principale standarde de proiectare asupra calculului grinzilor la starea limită ultimă și la starea limită de exploatare normală conduce la desprinderea unei concluzii importante cu privire la faptul că la ora actuală nu există o formulare unitară, consistentă și unanim acceptată cu privire la evaluarea capacității de rezistență (moment capabil) și mai ales a capacității de deformabilitate (în domeniul elastic) pentru grinzile mixte cu conectare parțială. Astfel, pentru evaluarea săgeților aferente conectării parțiale, în funcție de valoarea gradului de conectare (direct influențat de capacitatea portantă a conectorilor și nu de rigiditatea inițială a acestora), codul american și cel australian propune o relație empirică de reducere a rigidității la încovoiere aferente interacțiunii totale, în timp ce standardul european propune relații directe de majorare a săgeților corespunzătoare situației de interacțiune perfectă. În fine, codul chinez sugerează o relație de evaluarea a rigidității la încovoiere asociate conectării parțiale în care se ține cont, într-un mod mai rațional de rigiditatea conectorilor și nu de capacitatea portantă a acestora. În ceea ce privește calculul la starea limită a grinzilor compozite cu conectare parțială, acesta se efectuează la nivel de secțiune prin evaluarea

momentului capabil în baza unei analize rigid-plastice, exprimând condițiile de echilibru secționale coroborate cu admiterea unei valori prestabilite a forței axiale din dala de beton comprimată, exprimată în funcție de gradul de conectare. De aici poate fi desprinsă o altă concluzie importantă și anume faptul că, în baza prescripțiilor menționate în standardele de proiectare, fenomenul complex al conectării parțiale manifestat la nivel de element, prin comportarea neliniară complexă a conectorilor și a materialelor componente, poate fi surprins doar în mod simplificat și aproximativ.

În *Capitolul 4* s-a condus un studiu în domeniul elastic de comportare a materialelor, în cadrul căruia în baza cunoscutului model de interacțiune propus de *Newmark* [14], s-a obținut ecuația diferențială de ordinul II (când variabila necunoscută este definită prin curbură, lunecare longitudinală sau efort axial din componenta de beton) respectiv de ordinul IV (când necunoscuta este reprezentată prin deplasarea transversală) ce descrie comportarea grinzilor mixte în condițiile interacțiunii parțiale dintre placa de beton și profilul metalic. Rezolvarea ecuației diferențiale de ordinul II neomogene și cu coeficienți constanți, pentru diverse cazuri de rezemare și încărcare, ne-a condus spre o altă concluzie esențială care poate fi enunțată astfel: efortul axial din placa de beton, în condițiile interacțiunii parțiale dintre componente, poate fi exprimat ca o fracțiune din valoarea forței axiale din dala de beton, calculată în condițiile interacțiunii totale, prin intermediul unei funcții $f(\alpha L)$ a cărei valoare este direct influențată de rigiditatea conexiunii și implicit de gradul de conectare dar și de caracteristicile secționale și de lungimea elementului. Aceasta observație deschide câmpul unei discuții cu privire la modalități aproximative de cuantificare a efectului acțiunii compozite în analiza liniară și neliniară a acestor tipuri de structuri.

În contextul aspectelor discutate anterior, în *Capitolul 5* se prezintă succint formularea matematica a modelului de calcul propus pentru analiza neliniară a structurilor compozite oțel-beton. Procedeu descris extinde capabilitățile modelului existent cu privire la analiza neliniară avansată a structurilor în cadre [9,11], prin considerarea efectului conectării parțiale între componente (în cazul grinzilor mixte), considerarea relațiilor constitutive complexe pentru beton și oțel, forma exactă a secțiunilor transversale, studiul imperfecțiunilor materiale (de tipul tensiunilor reziduale) asupra capacității de deformabilitate și de rezistență a grinzilor compozite, grefând de asemenea efectul nodurilor de dimensiuni finite și propunând totodată un model de considerare a conexiunilor semirigide. Adoptând un procedeu de calcul incremental-iterativ, în analiza inelastică se ține seama de efectul plastificării materialelor structurii, în cea mai evoluată formă, considerându-se variația continuă a rigidității structurii în raport cu dezvoltarea zonelor de plastificare în lungul barelor în funcție de nivelul de solicitare a acestora, considerându-se relațiile constitutive neliniare σ - ϵ pentru modelarea neliniarității fizice la nivel de fibră. Efectele conexiunii parțiale dintre dala de beton și profilul metalic al unei grinzi compozite, sunt luate în considerare printr-un procedeu inovativ, prin introducerea, în mod aproximativ, a unui efort axial în dala de beton ca funcție de gradul efectiv de conexiune asociat elementului de grindă, metoda fiind argumentată de observațiile desprinse din capitolul anterior. Efortul axial interior asociat dalei de beton, în ipoteza conexiunii parțiale, este considerat a fi o fracțiune din efortul axial din dala de beton evaluat în ipoteza conexiunii totale. În acest fel, răspunsul neliniar la nivel de secțiune, ținând cont de efectele conectării parțiale, se determină în baza a trei ecuații de echilibru secțional, dezvoltarea graduală a zonelor plastice pe înălțimea secțiunilor transversale fiind surprinsă

prin echilibru elementar, compatibilitate, relații constitutive neliniare pentru materiale și conectori, starea de tensiune și deformație fiind monitorizată pe parcursul fiecărei etape de încărcare. Se determină apoi rigiditatea tangentă la încovoiere și la efort axial a fiecărei secțiuni transversale de control, iar prin aplicarea metodei forțelor în formulare matriceală, se determină matricea de rigiditate tangentă elasto-plastică și vectorul încărcărilor nodale echivalente a elementului de bară de cadru cu 12 grade de libertate, incluzând în formulare și efectele deformațiilor unghiulare prin intermediul unei rigidități echivalente la forfecare în valoarea căreia se ține cont și de aportul betonului. Modelul de calcul propus a fost implementat în cadrul aplicației Nefcad [5] extinzând astfel capabilitățile acestei aplicații software.

Validarea modelului de calcul propus, principalul obiectiv al *Capitolului 7*, s-a efectuat atât prin comparații cu rezultate din literatura de specialitate cât și prin comparații cu propriul model avansat de analiza dezvoltat în aplicația Abaqus [15], acest model fiind aplicat de asemenea și pentru relevarea anumitor aspecte cu privire la comportarea neliniară de detaliu a structurilor testate. O atenție deosebită a fost acordată simulărilor numerice asupra grinzilor mixte oțel-beton, deoarece răspuns structural (rezistență și rigiditate) al acestor tipuri de structuri, cu grad mic de nedeterminare statică, este influențat semnificativ de nivelul de conectare dintre componente, dorindu-se astfel evidențierea capacității modelului propus de a surprinde acest fenomen. Performanțele modelului de calcul propus au fost testate prin simulări numerice și asupra unor elemente de tip stâlp (pentru evidențierea efectului tensiunilor reziduale) precum și pe structuri cu grad mare de nedeterminare statică (structuri în cadre plane și spațiale) a căror comportare neliniară este dominată de ambele surse principale de neliniaritate, fizică și geometrică. În urma studiilor numerice efectuate, putem desprinde următoarele concluzii cu privire la performanțele modelului de calcul elaborat respectiv cu privire la comportarea structurilor mixte oțel-beton:

a. *Cu privire la acuratețea și eficiența computațională a modelului de calcul propus:*

- Modelul propus este capabil să surprindă cu acuratețe sporită efectul combinat al acțiunii compozite parțiale (conectare și interacțiune parțială în cazul grinzilor mixte) și cel al plastificării distribuite, prin modelarea inelasticității la nivel de fibră, înglobând în analiza secțională comportarea elasto-plastică a tuturor componentelor constitutive ale secțiunii: placa de beton, profilul metalic, conectorii și armaturile;
- Modelul propus pentru analiza secțională permite efectuarea unor studii avansate capabile să releve anumite particularități de comportare și să devoaleze factorii dominanți ce guvernează răspunsul elasto-plastic al secțiunilor compozite cu conectare parțială, oferind astfel indicatori cantitativi și calitativi asupra influenței diferitelor variabile asupra răspunsului secțional. Studiile parametrice și de senzitivitate conduse au urmărit cuantificarea influenței unor efecte specifice precum: conectarea parțială, prin considerarea diferitelor grade de conectare, influența curbelor de comportare a conectorilor, forma și parametrii fizico-mecanici și de rezistență în definirea relațiilor constitutive pentru beton și oțel, variații distincte ale limitei de curgere în tălpile și inima profilului metalic, variația deformației specifice asociate inițierii reconsolidării oțelului, variații ale rezistenței la compresiune ale dalei de beton, influența considerării aportului betonului întins, considerarea secțiunilor solicitate atât la moment încovoietor

pozitiv cât și la moment încovoietor negativ, efectul tensiunilor reziduale asociate profilului metalic;

- Influența deformațiilor unghiulare asupra capacității de deformabilitate și de rezistență, atât a grinzilor simplu rezemate cât și a celor continue, este inclusă cu acuratețe însemnată prin definirea unui modul sectional echivalent de rigiditate transversal, în valoarea căreia se ține cont de aportul betonului într-un quantum proporțional cu gradul de acțiune compozită dintre componentele sistemului mixt. Rezultatele obținute considerând acest efect s-au demonstrat a fi în bună concordanță cu cele raportate în literatura de specialitate și obținute prin utilizarea de elemente finite formulate în teoria Timoshenko, care exclude ipoteza secțiunilor normale la axa barei după deformare;
 - Studiile întreprinse prin analiza grinzilor compozite cu conectare parțială (simplu rezemate și continue) certifică faptul ca modelul de calcul propus este capabil să surprindă comportarea neliniară globală a acestora prin utilizarea unui singur element per bară. Suplimentarea numărului de elemente finite utilizate pentru modelarea fiecărei bare este impusă doar din condiții de rezemare sau încărcare concentrată, situații în care sunt necesare noduri interioare pentru simularea acestor condiții. Răspunsul acestor tipuri de structuri în spațiul Forța-deplasare și Moment încovoietor-curbură sunt în bună concordanță cu rezultatele furnizate de testele experimentale și cele obținute cu ajutorul modelului avansat de analiza generat în aplicația Abaqus [15].
 - Studiile conduse atât pe structuri cu un grad mic de nedeterminare statică (stâlpi individuali și cadre portal) cât și pe structuri în cadre plane și spațiale de mari dimensiuni relevă surprinderea cu acuratețe considerabilă a efectului combinat al neliniarității geometrice (locale și globale) și al neliniarității fizice (dezvoltarea graduală a zonelor plastice) folosind un singur element finit cu două noduri pentru modelarea fiecărei bare componente a structurilor analizate, rezultatele obținute fiind comparabile cu cele furnizate de modele de calcul bazate pe metoda elementului finit, înzestrate cu modele constitutive avansate, dar care necesita o discretizare și un număr de parametri mult superior modelului propus. Prin intermediul acestor studii de validare se certifică, încă o dată, eficiența computațională a modelului și programului de calcul elaborat, timpul de calcul, simplitatea în modelarea structurală coroborată cu acuratețea rezultatelor furnizate precum și a datelor privind evoluția stării de solicitare (eforturi, deplasări, apariția și extinderea zonelor plastice până la apariția mecanismului de cedare, factori de încărcare limită) conferă o valoare deosebită acestui model făcându-l competitiv cu alte modele și programe de calcul ce vizează analiza avansată a structurilor în cadre mixte otel-beton.
- b. *Cu privire la răspunsul neliniar al grinzilor și cadrelor compozite oțel-beton*
- Studiile numerice conduse atât în modelul de calcul propus cât și în cel dezvoltat în aplicația Abaqus, pe o serie de grinzi mixte, relevă faptul ca efectul interacțiunii parțiale asupra răspunsului structural este prezent indiferent de nivelul de conectare (teoretic) asumat. Astfel lunecări relative (interacțiune parțială) între placa de beton și grinda metalică sunt înregistrate chiar și în cazul dispunerii unui număr de conectori mai mare decât cel necesar asigurării conectării totale, datorită rigidității finite a conectorilor folosiți. Pe baza acestei observații se poate remarca diferența între

interacțiune totală și conectare totală. Desigur, pentru grade de conectare mai mari de 100%, majorarea numărului de conectori nu produce un spor semnificativ asupra capacității de deformabilitate și de rezistență. De exemplu în cazul grinzii simplu rezemate E1, crescând numărul de conectori cu aprox. 35%, de la 68 ($\eta=100\%$) la 92 ($\eta=136\%$), se înregistrează o creștere a încărcării capabile cu doar 7%, iar aportul de rigiditate este chiar mai redus. Pe de altă parte, rigiditatea inițială a grinzilor, dar mai cu seamă capacitatea de rezistență este vizibil afectată odată cu scăderea numărului de conectori sub pragul celor necesari asigurării conectării totale. Astfel, pentru aceeași grinda E1, micșorând numărul de conectori cu aprox. 41%, de la 68 ($\eta=100\%$) la 48 ($\eta=71\%$) se înregistrează o scădere a încărcării capabile cu cca. 13%. Aceste observații calitative sunt observate atât în cazul încărcării cu sarcini distribuite la mijlocul deschiderii cât și în cazul aplicării de sarcini uniform distribuite pe lungimea grinzii.

- Studiile parametrice și de senzitivitate conduse la nivel de element, pe baza modelului dezvoltat în Abaqus, relevă faptul că influența cea mai pronunțată asupra curbei de răspuns (a grinzii E1) o are calitatea oțelului din tălpile profilului, printre parametrii variați numărându-se și calitatea oțelului din inima profilului respectiv rezistența la compresiune a betonului. Aceeași concluzie s-a trasat și la nivel de secțiune, în baza studiilor parametrice conduse cu modelul propus;
- Studiile numerice efectuate relevă influența deformațiilor unghiulare asupra rigidității sistemelor structurale analizate. Dacă în modelul complex generat în aplicația Abaqus, acest efect este luat în considerare implicit prin modelarea profilului metalic cu elemente finite bidimensionale formulate în teoria Mindlin-Reissner și a dalei de beton cu elemente finite tridimensionale, în modelul propus se ține seama de acest efect într-un mod pragmatic, prin intermediul unei rigidități echivalente la forfecare a cărei valoare include și aportul betonului, acesta fiind deseori neglijat în modelele numerice regăsite în literatura de specialitate. Sensibilitate la acest efect, prezintă atât grinzile simplu rezemate cât și cele continue. Trebuie menționat că în cazul grinzilor continue, modelul propus furnizează rezultate cu acuratețe ridicată în situația în care pe porțiunile adiacente reazemului interior (zone supuse la încovoiere negativă – betonul este întins), în valoarea rigidității echivalente la forfecare nu se include aportul betonului;
- Studiul influenței tensiunilor reziduale asupra răspunsului unei secțiuni tipice de grindă mixtă (efort axial exterior nul), evidențiază faptul că răspunsul *Moment încovoietor-curbură* nu este sensibil la acest efect, însă acesta contribuie semnificativ la degradarea rigidității la încovoiere secționale, deoarece intrarea în curgere respectiv inițierea reconsolidării sunt manifestate, în acest caz, mai devreme decât în cazul contrar al neglijării acestor imperfecțiuni mecanice inițiale. Deși, în literatura de specialitate acest efect este studiat cu preponderență doar în cazul stâlpilor supuși acțiunii unor eforturi axiale considerabile, acesta trebuie considerat și în cazul grinzilor mixte cu interacțiune parțială deoarece pentru valori mari ale gradului de conectare, în grinda metalică se dezvoltă eforturi axiale interioare semnificative.
- Studiile numerice conduse asupra unui stâlp cu secțiune mixtă (profil metalic înglobat în beton), încastrat în bază și supus acțiunii a două forțe concentrate, una aplicată axial, iar cealaltă lateral, scot în evidență efectul tensiunilor reziduale asupra capacității de

rezistență și de rigiditate a elementului studiat. Efectul este mai pronunțat în cazul aplicării forței laterale în direcție paralelă cu tălpile profilului metalic (încovoiere în raport cu axa de inerție slabă), în prezența unor eforturi axiale mari înregistrându-se diminuări ale încărcări laterale capabile de până la 16%.

- Studiile numeric efectuate asupra cadrelor mixte scot în evidență în primul rând importanța considerării dimensiunii finite a nodurilor grindă-stâlp, această particularitate de modelare având efect direct atât asupra capacității de rezistență a structurilor analizate cât mai ales asupra rigidității acestora. De asemenea trebuie observat aportul, în termeni de capacitate portantă și rezistență, adus de considerarea succesivă a grinzilor cu secțiune mixtă și a stâlpilor micști, față de cazurile analoge în care elementele cadrelor sunt pur metalice. Influența nivelului de conectare asupra răspunsului structural de ansamblu s-a studiat asupra cadrului plan cu șase niveluri, pe de-o parte constatându-se și în acest caz diferența între conceptul de interacțiune totală și cel de conectare totală, iar pe de altă parte, raportându-ne la comportarea manifestată de grinzi la variația gradului de conectare, se observă o sensibilitate mai puțin pronunțată a curbelor de răspuns la variația aceluiași parametru.

8.2 Contribuții personale

Obiectivul principal al cercetărilor teoretice și numerice întreprinse pe parcursul acestei lucrări se încadrează în preocupările manifestate la nivel mondial în vederea formulării și stabilirii unei metode de analiză avansată a structurilor mixte oțel-beton care, pe de-o parte să permită studiul global al acestor structuri, cu luarea în considerare a principalilor factori determinanți, iar pe de altă parte să prezinte acuratețe suficientă și eficiență computațională astfel încât să devină o metoda susceptibilă de aplicat în procesul curent de proiectare. În baza unei vaste documentări, prin care s-a stabilit nivelul actual al cercetărilor în domeniul și care a reliefat capabilitățile, performanțele și eficiența metodele numerice curente dedicate analizei structurilor mixte, s-au trasat obiectivele principale și conexe ale prezentei lucrări, prin a căror îndeplinire considerăm că au fost aduse următoarele contribuții tehnicii curente de calcul în domeniul studiat:

- Formularea matematică a unei analize elasto-plastice la nivel de secțiune cu includerea efectului acțiunii compozite parțiale dintre placa de beton și profilul metalic al grinzilor mixte. Luarea în considerare a acestui efect se realizează printr-un procedeu inovativ în cadrul căruia ne asumăm o valoare prestabilită a efortului axial din dala de beton (ca fracțiune din valoarea efortului axial evaluată în condițiile acțiunii compozite totale), calculată în funcție de caracteristicile reale ale conexiunii ținându-se astfel seama în mod riguros de caracteristicile de rezistență și rigiditate a conectorilor dispuși în lungul interfeței de contact dintre componentele sistemului mixt;
- Deducerea unei expresii analitice pentru evaluarea rigidității la încovoiere a secțiunilor mixte oțel-beton în domeniul elastic și elasto-plastic de solicitare. Prin rezolvarea sistemului de trei ecuații (și implicit exprimarea matricei de rigiditate tangentă a secțiunii transversale) ce definește echilibrul la nivel de secțiune în cazul prezenței conectării parțiale și prin definirea rigidității la încovoiere tangente, ca fiind raportul dintre momentul încovoietor incremental și curbura incrementală (efortul axial

menținându-se constant), s-a dedus expresia rigidității la încovoiere în domeniul elasto-plastic de comportare ținându-se cont de proprietățile fizico-mecanice ale conexiunii;

- Deducerea unei expresii pentru evaluarea rigidității echivalente la forfecare a secțiunilor mixte oțel-beton solicitate în domeniul elastic. Prin echivalarea energiei potențiale de deformație produse de forța tăietoare prin deformațiile unghiulare asociate secțiunii reale (alcătuite din două componente) cu energia potențială de deformație asociată unui model echivalent (o singură componentă caracterizată printr-o valoare echivalentă a deformației unghiulare), se deduce o expresie pentru rigiditatea secțiunii la forfecare care include și aportul betonului într-un quantum proporțional cu nivelul de conexiune dintre placa de beton și profilul metalic;
- Integrarea aspectelor discutate anterior (acțiune compozită parțială și rigiditate echivalentă la forfecare) dar și a dimensiunii finite a nodurilor în formularea matematică elementului finit cu două noduri dezvoltat de Chiorean [11], ce ține seama de efectul plastificării materialelor structurii în cea mai evoluată formă, considerându-se variația continuă a rigidității structurii în raport cu dezvoltarea zonelor de plastificare în lungul barelor în funcție de nivelul de solicitare a acestora;
- Dezvoltarea unui model complex de analiză a structurilor mixte oțel-beton folosind capacitățile aplicației Abaqus [15]. În acest scop s-au testat trei variante de modelare a unei grinzi mixte, diferențiate prin tipul elementelor finite selectate pentru modelarea diferitelor componente ale sistemului mixt și implicit prin modalitatea de conectare a profilului metalic de placa de beton;
- Conducerea unei analize riguroase cu privire la modalitățile analitice de soluționare în domeniul elastic a răspunsului grinzilor compozite cu interacțiune parțială. În baza modelului Newmark [14] de comportare a grinzilor mixte caracterizate prin interacțiunea incompletă dintre componente, s-au prezentat patru forme (funcție de variabila necunoscută) ale ecuației diferențiale ce guvernează comportarea acestor sisteme structurale în domeniul elastic de comportare. Pentru cazul ecuației diferențiale de ordinul II formulate în necunoscuta efort axial din dala de beton, se prezintă soluția ecuației pentru diferite cazuri de rezemare și încărcare, evidențiindu-se posibilitatea exprimării efortului axial din dala de beton, în ipoteza interacțiunii parțiale, în funcție de efortul axial din dala de beton calculat în condițiile interacțiunii totale;
- Studii numerice extensive elaborate pentru validarea modelului de analiză propus și totodată pentru relevarea anumitor caracteristici și particularități de comportare a structurilor compozite oțel-beton. În Capitolul 7 al prezentei lucrări se prezintă o serie de studii numerice realizate pe grinzi simplu rezemate și continue, stâlpi și cadre plane și spațiale mixte oțel-beton. Pe de-o parte studiile vin spre validarea modelului de analiză propus și a particularitățile aferente (capacitatea modelului de a surprinde efectele conectării/interacțiunii parțiale, ale deformațiilor unghiulare, ale neliniarității materiale și geometrice, ale dimensiunii finite a nodurilor, a imperfecțiunilor mecanice inițiale), iar pe de altă parte doresc să evidențieze sensibilitatea structurilor analizate la variația diferiților parametri fizico-mecanici ai materialelor.

8.3 Direcții viitoare de cercetare

Principalele aspecte considerate a acorda un plus de valoarea cercetării conduse în această lucrare sunt:

- Includerea efectelor de pierdere a stabilității prin încovoiere – răsucire. Acest fenomen de instabilitate laterală este specific atât grinzilor metalice cât și celor mixte și trebuie luat în considerare în cadrul unei analize avansate, deoarece poate contribui la cedarea prematură a elementelor analizate. În plus, standardele de proiectare prevăd verificări (în starea limită ultimă) asupra influenței acestui fenomen;
- Implementarea unor relații constitutive uniaxiale $\tau - \gamma$ pe bază cărora să existe posibilitatea verificării cedărilor datorate forfecării;
- Includerea efectelor de lungă durată asociate betonului (contractia și dilatarea);
- Extinderea exemplurilor numerice asupra grinzilor cu tablă cutată.

Bibliografie

- [1] Asociația de Standardizare din România. SR EN 1994-1-1:2006 Eurocod 4: Calculul structurilor compozite din oțel și beton Partea 1-1: Reguli generale și reguli pentru clădiri. București: 2004.
- [2] Standards Australia. AS 2327.1-2003 Composite structures Part 1 : Simply supported beams. Sydney: 2003.
- [3] American Institute of Steel Construction. ANSI/AISC 360-05. Specification for Structural Steel Buildings. Chicago: 2005.
- [4] Chiorean C. Calculul Neliniar al Structurilor Vol. 1 Structuri Plane. Cluj Napoca: UTPRESS; 2009.
- [5] Chiorean CG. Aplicații software pentru analiza neliniară a structurilor în cadre. U.T.PRES; 2006.
- [6] Chen W-F, Toma S. Advanced analysis of steel frames. Boca Raton: CRC Press; 1994.
- [7] Kim S-E, Chen W-F. Design guide for steel frames using advanced analysis program. Eng Struct 1999;21:352–64.
- [8] Chiorean CG. Contribuții la analiza avansată a structurilor în cadre. Teză de doctorat. Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca, 2001.
- [9] Chiorean CG. A computer method for nonlinear inelastic analysis of 3D semi-rigid steel frameworks. Eng Struct 2009;31:3016–33. doi:10.1016/j.engstruct.2009.08.003.
- [10] Liew JYR, Chen H, Shanmugam NE. Inelastic Analysis of Steel Frames with Composite Beams. J Struct Eng 2001;127:194–202.
- [11] Chiorean CG. A computer method for nonlinear inelastic analysis of 3D composite steel–concrete frame structures. Eng Struct 2013;57:125–52.
- [12] Iu CK, Bradford M a., Chen WF. Second-order inelastic analysis of composite framed structures based on the refined plastic hinge method. Eng Struct 2009;31:799–813.
- [13] Iu CK. Nonlinear analysis for the pre- and post-yield behaviour of a composite structure with the refined plastic hinge approach. J Constr Steel Res 2016;119:1–16.
- [14] Newmark NM, Siess CP, Viest IM. Tests and analysis of composite beams with incomplete interaction. Proc Soc Exp Stress Anal 1951;9.
- [15] Abaqus - User's Manual. Hibbit, Karlsson & Sorenson; 2011.
- [16] Slutter RG, Driscoll G. The flexural strength of steel and concrete composite beams. Fritz Laboratory Report: 1963.
- [17] Chapman JC, Balakrishnan S. Experiments on composite beams. Struct Eng 1964;42:369–83.
- [18] McGarraugh JB, Baldwin JW. Lightweight concrete-on-steel composite beams. Eng Journal, Am Soc Civ Eng 1971;8:90–8.
- [19] Daniels JH, Fisher JW. Static behavior of composite beams with variable load position. Fritz Laboratory Report: 1967.
- [20] Wu YC, Slutter RG. Continuous composite beams under fatigue loading. Fritz Laboratory Report: 1970.
- [21] Wu YC, Slutter RG, Fisher JW. Analysis of continuous composite beams. Fritz Laboratory Report: 1971.
- [22] Sarnes FW, Daniels JH. Prestressing the negative moment region. Fritz Laboratory Report: 1971.
- [23] Fisher JW, Daniels JH, Slutter RG. Continuous composite beams for steel-concrete bridges. Fritz Laboratory Report: 1972.
- [24] Daniels JH. Variables affecting the negative moment behavior of composite beams. Fritz Laboratory Report: 1972.
- [25] Ansourian P. Experiments on continuous composite beam. Proc Instn Civ Engrs 1981.

- [26] Nie J, Xiao Y, Chen L. Experimental studies on shear strength of steel concrete composite beams. *J Struct Eng* 2004.
- [27] Hope Gill M, Johnson R. Tests on Three Three-Span Continuous Composite Beams. *ICE Proc* 1976;61:367–81.
- [28] Amadio C, Fedrigo C, Fragiaco M, Macorini L. Experimental evaluation of effective width in steel-concrete composite beams. *J Constr Steel Res* 2004;60:199–220.
- [29] Nie J-G, Tian C-Y, Cai CS. Effective width of steel-concrete composite beam at ultimate strength state. *Eng Struct* 2008;30:1396–407.
- [30] Fabbrocino G, Pecce M. Experimental tests on steel-concrete composite beams under negative bending. *Can. Society Civ. Eng.*, 2000.
- [31] Loh HY, Uy B, Bradford M a. The effects of partial shear connection in the hogging moment regions of composite beams Part I - Experimental study. *J Constr Steel Res* 2004;60:897–919.
- [32] Sun Q, Yang Y, Fan J, Zhang Y, Bai Y. Effect of longitudinal reinforcement and prestressing on stiffness of composite beams under hogging moments. *JCSR* 2014;100:1–11.
- [33] Uy B, Sloane RJ. Behaviour of composite tee beams constructed with high strength steel. *J Constr Steel Res* 1998;46:203–4.
- [34] Nie J, Xiao Y, Tan Y, Wang H. Experimental Studies on Behavior of Composite Steel High-Strength Concrete Beams. *ACI Struct J* 2004;101.
- [35] Zhao H, Yuan Y. Experimental studies on composite beams with high-strength steel and concrete. *Steel Compos Struct* 2010;10:373–83.
- [36] Tan EL, Uy B. Experimental study on straight composite beams subjected to combined flexure and torsion. *J Constr Steel Res* 2009;65:1855–63.
- [37] Ollgaard JG, Slutter RG, Fisher JW. Shear Strength of Stud Connectors in Lightweight and Normal-Weight Concrete. *Am Inst Steel Constr Eng J* 1971;8:55–64.
- [38] Ciutina A, Dogariu A. Performanțele Conectorilor la încărcări ciclice. *Acta Teh Napocensis* 2008;I:335–45.
- [39] Ciutina A, Dubina D, Danku G, Senila M, Petran I. Influence of the Connection Between Steel and Concrete on the Seismic Behaviour of Steel Ebf. In: Landolfo R, Mazzolani FM, editors. *EUROSTEEL 2014 7th Eur. Conf. Steel Compos. Struct.*, Naples, Italy: n.d.
- [40] Xue D, Liu Y, Yu Z, He J. Static behavior of multi-stud shear connectors for steel-concrete composite bridge. *J Constr Steel Res* 2012;74:1–7.
- [41] Câmpian C. Contribution a l'étude de comportement et au calcul des poteaux mixtes acier-beton. Teză de doctorat. INSA (Institut National des Sciences Appliquées), Rennes, Franța, 2001.
- [42] Siess CP, Viest IM, Newmark NM. Studies of slab and beam highway bridges: Part III. 1952.
- [43] Kuang-Hsun Dai P. Analytical study of composite beams with inelastic shear connection. University of Illinois, 1963.
- [44] Adekola AO. Partial interaction connected elements between elastically of a composite beam. *Int J Solids Struct* 1968;4:1125–35.
- [45] Girhammar UA, Gopu V. Composite beam-columns with interlayer slip-exact analysis. *J Struct Eng* 1993;119:1265–82.
- [46] Girhammar UA, Pan DH. Exact static analysis of partially composite beams and beam-columns. *Int J Mech Sci* 2007;49:239–55.
- [47] Girhammar UA. Composite beam-columns with interlayer slip-Approximate analysis. *Int J Mech Sci* 2008;50:1636–49.

- [48] Girhammar UA. A simplified analysis method for composite beams with interlayer slip. *Int J Mech Sci* 2009;51:515–30.
- [49] Nie J, Cai CS, Asce M. *Steel – Concrete Composite Beams Considering Shear Slip Effects* 2003.
- [50] Nie J, Fan J, Cai CS. Stiffness and Deflection of Steel – Concrete Composite Beams under Negative Bending 2005;130:1842–51.
- [51] Loh HY, Uy B, Bradford MA. The effects of partial shear connection in the hogging moment regions of composite beams Part II—Analytical study. *J Constr Steel Res* 2004;60:921–62.
- [52] Faella C, Consalvo V, Nigro E. An “ exact ” finite element model for the linear analysis of continuous composite beams with flexible shear connections. Fourth Interantional Conf. Steel Alum. Struct. ICSAS’99, Espoo, Finland: 1998, p. 761–70.
- [53] Faella C, Martinelli E, Nigro E. Steel and concrete composite beams with flexible shear connection: “exact” analytical expression of the stiffness matrix and applications. *Comput Struct* 2002;80:1001–9.
- [54] Faella C, Martinelli E, Nigro E. Steel-concrete composite beams in partial interaction: Closed-form “exact” expression of the stiffness matrix and the vector of equivalent nodal forces. *Eng Struct* 2010;32:2744–54.
- [55] Ranzi G, Bradford MA, Uy B. A direct stiffness analysis of a composite beam with partial interaction. *Int J Numer Methods Eng* 2004;61:657–72.
- [56] Ranzi G, Bradford MA. Direct stiffness analysis of a composite beam-column element with partial interaction. *Comput Struct* 2007;85:1206–14.
- [57] Faella C, Martinelli E, Nigro E. Nonlinear analysis of steel-concrete composite beams: A finite element model. *Proc. Symp. Connect. between Steel Concr.*, Stuttgart, Germany: 2001.
- [58] Faella C, Martinelli E, Nigro E. Shear Connection Nonlinearity and Deflections of Steel–Concrete Composite Beams: A Simplified Method. *J Struct Eng* 2003;129:12–20.
- [59] Faella C, Martinelli E, Nigro E. Analysis of steel-concrete composite PR-frames in partial shear interaction: A numerical model and some applications. *Eng Struct* 2008;30:1178–86.
- [60] Li G-Q, Li J-J. *Advanced Analysis and Design of Steel Frames*. John Wiley & Sons; 2007.
- [61] Luan NK, Bakhshi H, Ronagh HR, Barkhordari MA, Amiri GG. Analytical solutions for the in-plane behavior of composite steel/concrete beams with partial shear interaction. *Asian J Civ Eng* 2011;12:751–71.
- [62] Fabbrocino G, Manfredi G, Cosenza E. Non-linear analysis of composite beams under positive bending. *Comput Struct* 1999;70:77–89.
- [63] Manfredi G, Fabbrocino G, Cosenza E. Modeling fo steel-concrete composite beams under negative bending. *J Struct Eng* 1999;125:654–62.
- [64] Fabbrocino G, Manfredi G, Cosenza E. Analysis of continuous composite beams including partial interaction and bond. *J Struct Eng* 2000;126:1288–94.
- [65] Fabbrocino G, Manfredi G, Cosenza E. Modelling of continuous steel–concrete composite beams: computational aspects. *Comput Struct* 2002;80:2241–51.
- [66] Schnabl S, Saje M, Turk G, Planinc I. Analytical solution of two-layer beam taking into account interlayer slip and shear deformation. *J Struct Eng* 2007;133:886–94.
- [67] Nguyen Q-H, Hjiatj M, Martinelli E. Closed-form solution for two-layer composite shear deformable beams with interlayer. 4th Int. Conf. Steel Compos. Struct., Sydney, Australia: 2010.
- [68] Nguyen QH, Martinelli E, Hjiatj M. Derivation of the exact stiffness matrix for a two-layer Timoshenko beam element with partial interaction. *Eng Struct* 2011;33:298–307.

- [69] Martinelli E, Nguyen QH, Hjjaj M. Dimensionless formulation and comparative study of analytical models for composite beams in partial interaction. *J Constr Steel Res* 2012;75:21–31.
- [70] Gara F, Carbonari S, Leoni G, Dezi L. A higher order steel-concrete composite beam model. *Eng Struct* 2014;80:260–73.
- [71] Wang Y, Nie J, Cai CS. Numerical modeling on concrete structures and steel–concrete composite frame structures. *Compos Part B Eng* 2013;51:58–67.
- [72] Zhao H, Yuan Y, Ye Z. Simplified nonlinear simulation of steel–concrete composite beams. *J Constr Steel Res* 2012;71:83–91.
- [73] Vasdravellis G, Valente M, Castiglioni C a. Dynamic response of composite frames with different shear connection degree. *J Constr Steel Res* 2009;65:2050–61.
- [74] Nie J, Tao M, Cai CS, Chen G. Modeling and investigation of elasto-plastic behavior of steel–concrete composite frame systems. *J Constr Steel Res* 2011;67:1973–84.
- [75] Chung KF, Chan CK. Advanced Finite Element Modelling of Composite Beams with High Strength Materials and Deformable Shear Connectors. *Procedia Eng* 2011;14:1114–22.
- [76] Titoum M, Tehami M, Achour B. Effects of partial shear connection on the behavior of semi-continuous composite beams. *Int J Steel Struct* 2009;9:301–13.
- [77] Ban H, Bradford M a. Flexural behaviour of composite beams with high strength steel. *Eng Struct* 2013;56:1130–41.
- [78] Queiroz FD, Vellasco PCGS, Nethercot D a. Finite element modelling of composite beams with full and partial shear connection. *J Constr Steel Res* 2007;63:505–21.
- [79] Ibrahim AM, Ahmed QW. Nonlinear analysis of simply supported composite steel-concrete beam. *Diyala J Enginnering Sci* 2013;06:107–26.
- [80] Queiroz FD, Queiroz G, Nethercot D a. Two-dimensional FE model for evaluation of composite beams, I: Formulation and validation. *J Constr Steel Res* 2009;65:1055–62.
- [81] Queiroz FD, Queiroz G, Nethercot D a. Two-dimensional FE model for evaluation of composite beams, II: Parametric study. *J Constr Steel Res* 2009;65:1063–74.
- [82] El-Lobody E, Lam D. Finite Element Analysis of Steel-Concrete Composite Girders. *Adv Struct Eng* 2003;6:267–81.
- [83] Vasdravellis G, Uy B, Tan EL, Kirkland B. Behaviour and design of composite beams subjected to negative bending and compression. *J Constr Steel Res* 2012;79:34–47.
- [84] Jeong YJ. Simplified model to predict partial-interactive structural performance of steel-concrete composite slabs. *J Constr Steel Res* 2008;64:238–46.
- [85] Jeong YJ, Kim HY, Kim SH. Partial-interaction analysis with push-out tests. *J Constr Steel Res* 2005;61:1318–31.
- [86] Prakash A, Anandavalli N, Madheswaran CK, Rajasankar J, Lakshmanan N. Three Dimensional FE Model of Stud Connected Steel-Concrete Composite Girders Subjected to Monotonic Loading 2011;1:1–11.
- [87] Bavan M, Baharom S, Mutalib AA, Osman SA. Numerical prediction of composite beam subjected to combined negative bending and axial tension 2013;8:428–47.
- [88] Tan EL, Uy B. Nonlinear analysis of composite beams subjected to combined flexure and torsion. *J Constr Steel Res* 2011;67:790–9.
- [89] Ellobody E, Young B, Lam D. Eccentrically loaded concrete encased steel composite columns. *Thin-Walled Struct* 2011;49:53–65.
- [90] Ellobody E, Young B. Numerical simulation of concrete encased steel composite columns. *J Constr Steel Res* 2011;67:211–22.
- [91] Salvatore W, Bursi OS, Lucchesi D. Design, testing and analysis of high ductile partial-strength steel-concrete composite beam-to-column joints. *Comput Struct* 2005;83:2334–52.

- [92] Fu F, Lam D, Ye J. Parametric study of semi-rigid composite connections with 3-D finite element approach. *Eng Struct* 2007;29:888–98.
- [93] Mirza O, Uy B. Finite element model for the long-term behaviour of composite steel-concrete push tests. *Steel Compos Struct* 2010;10:45–67.
- [94] Guezouli S, Lachal A. Numerical analysis of frictional contact effects in push-out tests. *Eng Struct* 2012;40:39–50.
- [95] Sun EQ. Shear Locking and Hourglassing in MSC Nastran , ABAQUS , and ANSYS. Proc. MSC.Software Corp. 2006 Am. Virtual Prod. Dev. Conf., 2006, p. 1–9.
- [96] Spacone E, El-Tawil S. Nonlinear Analysis of Steel-Concrete Composite Structures: State of the Art. *J Struct Eng* 2004;130:159–68.
- [97] Gattesco N. Analytical modeling of nonlinear behavior of composite beams with deformable connection. *J Constr Steel Res* 1999;52:195–218.
- [98] Dall’Asta A, Zona A. Non-linear analysis of composite beams by a displacement approach. *Comput Struct* 2002;80:2217–28.
- [99] Ranzi G, Gara F, Leoni G, Bradford M a. Analysis of composite beams with partial shear interaction using available modelling techniques: A comparative study. *Comput Struct* 2006;84:930–41.
- [100] Zona A, Barbato M, Conte JP. Nonlinear Seismic Response Analysis of Steel – Concrete Composite Frames. *J Struct Eng* 2008;134:986–97.
- [101] Ranzi G, Gara F, Ansourian P. General method of analysis for composite beams with longitudinal and transverse partial interaction. *Comput Struct* 2006;84:2373–84.
- [102] Ranzi G, Zona A. A steel–concrete composite beam model with partial interaction including the shear deformability of the steel component. *Eng Struct* 2007;29:3026–41.
- [103] Zona A, Ranzi G. Finite element models for nonlinear analysis of steel–concrete composite beams with partial interaction in combined bending and shear. *Finite Elem Anal Des* 2011;47:98–118.
- [104] Ranzi G, Bradford M a. Nonlinear analysis of composite beams with partial shear interaction by means of the direct stiffness method. *Steel Compos Struct* 2009;9:131–58.
- [105] Čas B, Bratinat S, Saje M, Planinc I. Non-linear analysis of composite steel-concrete beams with incomplete interaction. *Steel Compos Struct* 2004;4:489–507.
- [106] Čas B, Saje M, Planinc I. Non-linear finite element analysis of composite planar frames with an interlayer slip. *Comput Struct* 2004;82:1901–12.
- [107] Attalla MR, Deierlein GG, McGuire W. Spread of Plasticity: Quasi-Plastic-Hinge Approach. *J Struct Eng* 1994;120:2451–73.
- [108] Iu CK. Inelastic finite element analysis of composite beams on the basis of the plastic hinge approach. *Eng Struct* 2008;30:2912–22.
- [109] Lemes ÍJM, Silva ARD, Silveira RAM, Rocha PAS. Determinação da capacidade resistente de elementos estruturais mistos através do método da rótula plástica refinado. *Rev Int Métodos Numéricos Para Cálculo Y Diseño En Ing* 2015.
- [110] Landesmann A. Plastic-hinge approach for inelastic analysis of steel-concrete framed structures. *J Constr Steel Res* 2010;66:323–34.
- [111] Ngo-Huu C, Kim S-E. Practical nonlinear analysis of steel–concrete composite frames using fiber–hinge method. *J Constr Steel Res* 2012;74:90–7.
- [112] Salari MR, Spacone E, Shing PB, Frangopol DM. Nonlinear Analysis of Composite Beams with Deformable Shear Connectors. *J Struct Eng* 1998;124:1148–58. doi:10.1061/(ASCE)0733-9445(1998)124:10(1148).
- [113] Salari MR, Spacone E. Finite element formulations of one-dimensional elements with bond-slip. *Eng Struct* 2001;23:815–26.
- [114] Salari MR, Spacone E. Analysis of steel-concrete composite frames with bond-slip. *J*

- Struct Eng 2001;127:1243–50.
- [115] Ayoub A. A force-based model for composite steel–concrete beams with partial interaction. *J Constr Steel Res* 2005;61:387–414.
- [116] Valipour HR, Bradford M a. A steel-concrete composite beam element with material nonlinearities and partial shear interaction. *Finite Elem Anal Des* 2009;45:966–72.
- [117] Ayoub A, Filippou FC. Mixed formulation of nonlinear steel-concrete composite beam element. *J Struct Eng* 2000;126:371–81.
- [118] Dall’Asta A, Zona A. Three-field mixed formulation for the non-linear analysis of composite beams with deformable shear connection. *Finite Elem Anal Des* 2004;40:425–48.
- [119] Dall’Asta A, Zona A. Comparison and validation of displacement and mixed elements for the non-linear analysis of continuous composite beams. *Comput Struct* 2004;82:2117–30.
- [120] Dall’Asta A, Zona A. Slip locking in finite elements for composite beams with deformable shear connection. *Finite Elem Anal Des* 2004;40:1907–30.
- [121] Nguyen QH, Hjiij M, Uy B, Guezouli S. Analysis of composite beams in the hogging moment regions using a mixed finite element formulation. *J Constr Steel Res* 2009;65:737–48.
- [122] Ministry of Construction of the People’s Republic of China. GB 50017 - 2003 Code for design of steel structures. Beijing: 2003.
- [123] Oehlers DJ, Bradford MA. COMPOSITE STEEL AND CONCRETE STRUCTURAL MEMBERS: Fundamental Behaviour. Oxford, UK: Pergamon; 1995.
- [124] Loh HY, Uy B, Bradford MA. The behaviour of composite beams in hogging moment regions - Part I: Experimental Study. Sydney: 2003.
- [125] Liang QQ, Uy B, Bradford MA, Ronagh HR. Strength analysis of steel-concrete composite beams in combined bending and shear. *J Struct Eng* 2005;131:1593–600.
- [126] Pacurar V, Aribert JM. EUROCODE 4: Exemple de Calcul. Timisoara: BRIDGEMAN Ltd.; 1997.
- [127] Girhammar UA, Atashipour SR. Analysis of shear deflections of deep composite box-type of beams using different shear deformation models. *Comput Struct* 2015;155:42–53.
- [128] Liu S-W, Liu Y-P, Chan S-L. Advanced analysis of hybrid steel and concrete frames. *J Constr Steel Res* 2012;70:337–49.
- [129] El-Tawil S, Deierlein GG. Nonlinear Analysis of Mixed Steel-Concrete Frames. I: Element Formulation. *J Struct Eng* 2001;127:647–55.
- [130] Turmo J, Lozano-Galant J a., Mirambell E, Xu D. Modeling composite beams with partial interaction. *J Constr Steel Res* 2015;114:380–93.
- [131] Timoshenko S. Strength of materials. Second Edi. New York: D. Van Nostrand Company; 1940.
- [132] Nguyen QH, Hjiij M, Guezouli S. Exact finite element model for shear-deformable two-layer beams with discrete shear connection. *Finite Elem Anal Des* 2011;47:718–27.
- [133] Buru SM, Chiorean CG. Analiza neliniară avansată a structurilor în cadre compozite oțel-beton cu interacțiune parțială și conexiuni semirigide. Construieste cu Steel - A 14-a Conf. Natl. Constr. Met., Cluj-Napoca, Romania: 2015.
- [134] Hognestad E. A study of combined bending and axial load in reinforced concrete members. vol. 399. 1951.
- [135] Vecchio FJ, Collins MP. The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear. *ACI J Proc* 1986;83:219–31.
- [136] Comité Euro-International du Béton. CEB-FIP Model Code 1990. 1991.

- [137] SR EN 1993-1-1:2006 Eurocod 2: Proiectarea structurilor de beton Partea 1-1: Reguli generale și reguli pentru clădiri. Bruxelles: 2006.
- [138] Tamai S, Shima H, Izumo J, Okamura H. Average stress-strain relationship in post yield range of steel bar in concrete. *Concr Libr JSCE* 1988.
- [139] Mansour M, Lee J-Y, Hsu TTC. Cyclic stress-strain curves of concrete and steel bars in membrane elements. *J Struct Eng* 2001;127:1402–11.
- [140] Johnson RP, Greenwood RD, van Dalen K. Stud shear-connectors in hogging moment regions of composite beams. *Struct Eng* 1969;47:47–58.
- [141] Yavari A, Sarkani S, Moyer ET. On applications of generalized functions to beam bending problems. *Int J Solids Struct* 2000;37:5675–705.
- [142] Chiorean CG, Barsan GM. Large deflection distributed plasticity analysis of 3D steel frameworks. *Comput Struct* 2005;83:1555–71.
- [143] Riks E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *Int J Solids Struct* 1979;15:529–51.
- [144] Wemper GA. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. *Int J Solids Struct* 1971;7:1581–99.
- [145] Crisfield M a. A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through.” *Comput Struct* 1981;13:55–62.
- [146] Lubliner J, Oliver J, Oller S, Onate E. A plastic-damage model for concrete. *Int J Solids Struct* 1989;25:299–329.
- [147] Lee J, Fenves GL. Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures. *J Eng Mech* 1998;124:892–900.
- [148] Jankowiank T, Lodygowski T. Identification of parameters of concrete damage plasticity constitutive model. *Found Civ Environ Eng* 2005.
- [149] Dubina D. General Report - Recent research advances and trends on coupled instability of bar members. In: Camotim D, Dubina D, Rondal J, editors. *Proc. Third Conf. Coupled Instab. Met. Struct.*, Imperial College Press; 2000, p. 131–44.
- [150] Kim S, Han TH, Won DH, Kang YJ. Tangent moduli of hot-rolled I-shaped axial members considering various residual stress distributions. *Thin-Walled Struct* 2014;76:77–91.
- [151] Szalai J, Papp F. A new residual stress distribution for hot-rolled I-shaped sections. *J Constr Steel Res* 2005;61:845–61.
- [152] European Convention for Constructional Steelwork (ECCS). Ultimate limit state calculation of sway frames with rigid joints. Technical Committee 8-Structural Stability Technical Working Group 8.2-System, Publication no. 33 1984.
- [153] Shayan S. System Reliability-Based Design of 2D Steel Frames by Advanced Analysis. School of Civil Engineering The University of Sydney, 2013.
- [154] Ban H, Bradford MA. Elastoplastic Cross-Sectional Behavior of Composite Beams with High-Strength Steel : Analytical Modeling. *J Struct Eng* 2014.
- [155] Aribert JM, Labib AG, Rival JC. Etude numérique et expérimentale de l'influence d'une connexion partielle sur le comportement de poutres mixtes. Commun Présentée Aux Journées AFPC 1983;Mars.
- [156] Nguyen QH, Martinelli E, Hjiat M. Derivation of the exact stiffness matrix for a two-layer Timoshenko beam element with partial interaction. *Eng Struct* 2011;33:298–307.
- [157] Vogel U. Calibrating Frames. vol. 10. *Der Stahlbau*; 1985.
- [158] Jiang XM, Chen H, Liew JYR. Spread-of-plasticity analysis of three-dimensional steel frames. *J Constr Steel Res* 2002;58:193–212.
- [159] Chiorean CG, Buru SM. Practical nonlinear inelastic analysis method of composite steel- concrete beams with partial composite action. În curs de recenzie. *Composita Struct* n.d.

- [160] Chiorean CG, Buru SM. Advanced Nonlinear Inelastic Analysis of 3D Composite Steel- Concrete Frameworks with Partial Shear Connection. În curs de recenzie. Comput Struct n.d.:15–6.
- [161] Chiorean CG, Buru SM. A computer method for nonlinear inelastic analysis of 3D composite steel-concrete frame structures. Acceptat spre publicare. Proc. Sixth International Conf. Struct. Eng. Mech. Comput., Cape Town (South Africa): 2016.